共形平坦な多様体の体積に関する性質と，Marginally Trapped Submanifold への一般化について

岸田 陸玖 *
東京科学大学 情報理工学院
Riku Kishida
School of Computing
Institute of Science Tokyo

概要

本稿では，まず初めに，筆者の論文 [9] の要約を述べる．また，この研究の続きで得られた結果として，準備中の論文 [10] の概要について述べる．

1 準備

本稿では，すべての写像および多様体は滑らか（C^∞ 級）であると仮定する．まず初めに，「共形平坦な多様体」と「光錐の空間的超曲面」の定義を与える．

定義 1.1. Σ^n を n 次元の多様体とする．Σ^n 上の 2 つの Riemann 計量 g と g' に対して，Σ^n 上のある実数値関数 σ により，$g' = e^{2\sigma}g$ と表されるとき，g と g' は共形同値という．また，Riemann 計量 g が局所的に平坦な計量と共形同値であるとき，Riemann 多様体 (Σ^n, g) は**共形平坦** (conformally flat) な多様体という．

定義 1.2. $\mathbb{R}^{n+2}_1$ を $n+2$ 次元の Minkowski 時空とし，その符号は $(-+\cdots+)$ とする．$\mathbb{R}^{n+2}_1$ に付随する標準的な Lorentz 内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表す．ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+2}_1$ が $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$ を満たすとき，ベクトル $\boldsymbol{x}$ は**光的** (light-like) といい，$\mathbb{R}^{n+2}_1$ の光的なベクトル全体の集合

$$\Lambda^{n+1} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+2}_1 \,;\, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = 0\}$$

を $n+1$ 次元の**光錐** (light-cone) という．Σ^n を n 次元の多様体とし，$\boldsymbol{p} : \Sigma^n \to \Lambda^{n+1}$ をはめ込みとする．$\boldsymbol{p}$ によって誘導される Σ^n 上の計量が各点で正定値であるとき，$\boldsymbol{p}$ は光錐の**空間的超曲面** (space-like hypersurface) という．

共形平坦な多様体と，光錐の空間的超曲面に関して，次の事実が知られている．

事実 1.3 (Brinkmann [5], Asperti-Dajczer [4])**.** (Σ^n, g) を $n(\geq 3)$ 次元の単連結な Riemann 多様体とする．このとき，以下の主張は同値である．

(i) (Σ^n, g) は共形平坦な多様体である．
(ii) 等長はめ込み $\boldsymbol{p} : \Sigma^n \to \Lambda^{n+1}$ が存在する．

* 〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2 丁目 12 − 1 東京科学大学 情報理工学院 数理・計算科学コース
e-mail: kishida.r.aa@m.titech.ac.jp

またこのとき，等長はめ込み $\boldsymbol{p} : \Sigma^n \to \Lambda^{n+1}$ は，Λ^{n+1} の等長変換の違いを除いて一意的に定まる．

なお $n = 2$ の場合，任意の 2 次元 Riemann 多様体 (Σ^2, g) は共形平坦であり，Σ^2 が単連結である場合は Λ^3 に等長はめ込み可能であるが，一意性については成立しない（cf. [12]）．

(Σ^n, g) を $n(\geq 2)$ 次元の共形平坦な多様体とし，$\boldsymbol{p} : \Sigma^n \to \Lambda^{n+1}$ を等長はめ込みとする．このとき，写像 $\boldsymbol{q} : \Sigma^n \to \Lambda^{n+1}$ で，

$$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \rangle = 1, \qquad \langle X, \boldsymbol{q} \rangle = 0 \qquad (X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n))$$

を満たすものが一意的に存在し，$\boldsymbol{q}$ を $\boldsymbol{p}$ に対応する**双対写像**という．ただし，$\mathfrak{X}(\Sigma^n)$ は Σ^n 上のベクトル場全体の集合を表す．なお，$\boldsymbol{p}$ は空間的はめ込みであるが，双対写像 $\boldsymbol{q}$ は一般に特異点を持つ写像となる．光錐の写像に対する双対性については，Espinar-Gálvez-Mira [6], 泉屋 [8], Liu-Jung [11] でそれぞれ独立に指摘されている．

$\boldsymbol{p}$ に包含写像 $\Lambda^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}_1$ を合成した写像を考えることにより，Σ^n は $\mathbb{R}^{n+2}_1$ にはめ込まれた部分多様体とみなすことができ，その余次元は 2 である．Σ^n を $\mathbb{R}^{n+2}_1$ の部分多様体とみなしたときの法束を $N\Sigma^n$ とし，$\Gamma(N\Sigma^n)$ で法ベクトル場全体の集合を表す．$\mathbb{R}^{n+2}_1$ の接空間と $\mathbb{R}^{n+2}_1$ 自身を同一視することにより，$\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p}$ 自身に沿うベクトル場とみなすことができる．加えて，$\boldsymbol{p}$ は各点で光的なベクトルであるため，$\boldsymbol{p} \in \Gamma(N\Sigma^n)$ となる．双対写像 $\boldsymbol{q}$ も $\boldsymbol{p}$ に沿うベクトル場とみなすことができ，$\boldsymbol{p}$ と同様に $\boldsymbol{q} \in \Gamma(N\Sigma^n)$ となる．

写像 $\mathrm{II} : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \times \mathfrak{X}(\Sigma^n) \to \Gamma(N\Sigma^n)$ を

$$\mathrm{II}(X, Y) := (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp} \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n))$$

と定め，$\boldsymbol{p}$ に対する**第二基本形式**という．ただし，$\overline{\nabla}$ は $\mathbb{R}^{n+2}_1$ 上の標準的な Levi-Civita 接続とし，$\perp$ は $N\Sigma^n$ への射影とする．ここで，写像 $A : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \to \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ を

$$\langle AX, Y \rangle := \langle \mathrm{II}(X, Y), \boldsymbol{q} \rangle \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n))$$

と定義し，$\boldsymbol{p}$ に対する**形作用素**という．また，$\{e_1, \ldots, e_n\}$ を接束 $T\Sigma^n$ の正規直交枠とし，

$$\boldsymbol{H} := \sum_{i=1}^{n} \mathrm{II}(e_i, e_i)$$

で定義される法ベクトル場 $\boldsymbol{H}$ を $\boldsymbol{p}$ の**平均曲率ベクトル場**といい，形作用素 A を用いて，

$$\boldsymbol{H} = \mathrm{tr}(A)\boldsymbol{p} - n\boldsymbol{q}$$

と表すことができる．ただし，$\mathrm{tr}(A)$ は A のトレースを表す．$\mathrm{tr}(A)$ の値は，(Σ^n, g) のスカラー曲率 S と関連性があり，次の事実が知られている．

事実 1.4 ([6, 8, 11])**.** 上記の定義の下で，$S = -2(n-1)\,\mathrm{tr}(A)$ が成立する．

この事実から，共形平坦な多様体のスカラー曲率 S は平均曲率としての役割を持ち，特に $S = 0$ である場合，平均曲率ベクトル場 $\boldsymbol{H}$ は各点で光的なベクトルとなる．

2 光錐の空間的超曲面の体積に関する変分公式

本節では，光錐の空間的超曲面に対して，体積の第一変分公式および第二変分公式について説明する．(Σ^n, g) をコンパクトで向き付けられた共形平坦な多様体で境界を含むものとし，$\boldsymbol{p} : \Sigma^n \to \Lambda^{n+1}$ は等長はめ

込みとする．$F:(-\varepsilon,\varepsilon)\times\Sigma^n\to\mathbb{R}^{n+2}_1$ は $\boldsymbol{p}$ の変分で境界を保つとし，X を F の変分ベクトル場とする．また，$\boldsymbol{p}$ に沿うベクトル場 $\overline{\nabla}_t\overline{X}$ を

$$(\overline{\nabla}_t\overline{X})_x := \left.\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right|_{t=0} F(t,x) \qquad (x\in\Sigma^n) \tag{2.1}$$

と定義する．ここで，$\boldsymbol{p}$ の変分の中でも特に振る舞いの良いものとして，「許容的」な変分と，「特性的」な変分を導入する．定義は以下のとおりである．

定義 2.1. Σ^n 上のある実数値関数 φ を用いて，$X=\varphi\boldsymbol{q}$ と表すことができる場合，変分 F は**許容的** (admissible) であると呼ぶ．さらに，F が許容的であり，Σ^n 上のある実数値関数 ψ を用いて，$\overline{\nabla}_t\overline{X}=\psi\boldsymbol{q}$ と表すことができる場合，変分 F は**特性的** (characteristic) であると呼ぶ．

Vol(t) を，変分 F から定まる体積関数とする．このとき，体積の第一・第二変分公式は以下の命題のように表される．

命題 2.2. 変分 F が許容的であるとする．このとき，F に関する体積の第一変分は

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathrm{Vol}(t) = -\int_{\Sigma^n}\mathrm{tr}(A)\,\langle X,\boldsymbol{p}\rangle\,dV_0$$

と表される．ただし，dV_0 は (Σ^n,g) の体積形式を表す．

命題 2.3. (Σ^n,g) のスカラー曲率 S は恒等的に零であるとし，変分 F は特性的であるとする．このとき，F に関する体積の第二変分は

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0}\mathrm{Vol}(t) = -\int_{\Sigma^n}\mathrm{tr}\bigl(A^2\bigr)\,\langle X,\boldsymbol{p}\rangle^2\,dV_0$$

と表され，この値は非正である．

注意 2.4. 命題 2.3 で与えられている第二変分公式は，本質的には Liu-Jung [11], Andersson-Metzger [3], 本田-泉屋 [7] で与えられた第二変分公式と同じものであるが，いくつかコメントしておく．実際，[7] では，許容的な変分において第一変分公式を与えているが，第二変分公式については変分が特性的であることを明示せずに計算されている．また，第二変分が非負であることが指摘されていない．[11] では，第一・第二変分公式を一般の次元で計算しており，第二変分の非負性についても示されているが，変分を規制する条件が明示されていない．一方 [3] では，変分の制限なしに変分公式を導出している．また，[3] と [7] では，全体空間が 4 次元の場合に限定して変分公式が記述されている．ただし，[3] と [7] については，光錐内のスカラー曲率が零の曲面より広いクラス（2 次元の MT-部分多様体，cf. §5）において変分公式が計算されている．

3 L-完備な光的波面

本節では，赤嶺-本田-梅原-山田 [2] で導入された概念である，「L-完備な光的波面」について説明する．

まず，光的波面の定義を与える．$(\mathbb{R}^{n+2})^*$ は $\mathbb{R}^{n+2}$ の双対ベクトル空間を表し，$P^*(\mathbb{R}^{n+2})$ で $(\mathbb{R}^{n+2})^*$ の射影空間を表すものとする．また，$\pi:(\mathbb{R}^{n+2})^*\to P^*(\mathbb{R}^{n+2})$ を標準的な射影とする．

定義 3.1 ([2])**.** L^{n+1} を $n+1$ 次元の多様体とし，$\Psi: L^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+2}_1$ を写像とする．写像 $\tilde{\alpha}: L^{n+1}\to(\mathbb{R}^{n+2})^*\setminus\{0\}$ が存在し，以下の条件を満たすとき，Ψ を **（余向き付け可能な）波面** (co-orientable wave front) という．

(i) $\tilde{\alpha}_x\bigl(d\Psi_x(v)\bigr)=0$ $(x\in L^{n+1},\ v\in T_xL^{n+1})$.

(ii) $(\Psi, \pi\circ\tilde{\alpha}) : L^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+2}_1 \times P^*(\mathbb{R}^{n+2})$ がはめ込みとなる．

さらに, Ψ に沿うベクトル場 $\hat{\xi}$ を

$$\left\langle \hat{\xi}_x, v \right\rangle = \tilde{\alpha}_x(v) \qquad \left(x \in L^{n+1},\ v \in T_{\Psi(x)}\mathbb{R}^{n+2}_1\right)$$

が成立するように定め，$\hat{\xi}$ が各点で光的なベクトルである場合，Ψ は **（余向き付け可能な）光的波面** (co-orientable null wave front) という．また，$\hat{\xi}$ を Ψ に沿う**法ベクトル場**という．

以後，波面は余向き付け可能であるもののみを考えることにする．$\hat{\xi}$ を光的波面 $\Psi : L^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+2}_1$ の法ベクトル場とする，必要ならば $\hat{\xi}$ を $-\hat{\xi}$ に置き換え，$\hat{\xi}$ は未来向きであると仮定する．$\mathbb{R}^{n+2}(=\mathbb{R}^{n+2}_1)$ 上の標準的な正定値内積を $(\cdot,\cdot)_E$ と表し，$\hat{\xi}_E := \sqrt{2/(\hat{\xi},\hat{\xi})_E}\,\hat{\xi}$ で定義されるベクトル場 $\hat{\xi}_E$ を Ψ の**正規化された法ベクトル場** (E-normalized normal vector field) という．光的波面は一般の波面とは異なり，写像 Ψ に沿うベクトル場である $\hat{\xi}_E$ を，L^{n+1} 上のベクトル場として捉えることができ，より正確には次の命題が成立する．

命題 3.2 ([2])**.** $\Psi : L^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+2}_1$ を光的波面とし，$\hat{\xi}_E$ を Ψ の正規化された法ベクトル場とする．このとき，ベクトル場 $\xi_E \in \mathfrak{X}(L^{n+1})$ で，$d\Psi(\xi_E) = \hat{\xi}_E$ を満たし，ξ_E の各積分曲線の Ψ による像が $\mathbb{R}^{n+2}_1$ の光的な直線の一部となるものが一意的に存在する．

この命題から得られる L^{n+1} 上のベクトル場 ξ_E のことを，Ψ に対応する**正規化された零的ベクトル場** (E-normalized null vector field) という．光的波面の L-完備性は，ξ_E を用いて次のように定義される．

定義 3.3 ([2])**.** $\Psi : L^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+2}_1$ を光的波面とし，ξ_E を Ψ の正規化された零的ベクトル場とする．ξ_E が完備なベクトル場であり，各積分曲線 $\gamma : \mathbb{R} \to L^{n+1}$ に対して，$\Psi\circ\gamma$ の像が $\mathbb{R}^{n+2}_1$ の光的な直線全体に一致しているとする．このとき，光的波面 Ψ は **L-完備** (L-complete) という．

例えば，光錐は L-完備な光的波面の典型例である．一般に L-完備な光的波面は特異点を持つ超曲面であり，次の事実が知られている．

事実 3.4 ([1])**.** L-完備な光的波面 $\Psi : L^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+2}_1$ が proper なはめ込みであるとする．このとき，Ψ の像は $\mathbb{R}^{n+2}_1$ の光的な超平面に含まれる．

4　光錐内のスカラー曲率が零の空間的超曲面の体積極大性

本節では，[9] の主結果として，$S = 0$ を満たす光錐の空間的超曲面は，$\mathbb{R}^{n+2}_1$ の光錐とは異なるある光的な超曲面において，体積の極大性を有していることを説明する．

定義 4.1. (Σ^n, g) を $n(\geq 2)$ 次元の共形平坦な多様体とし，$\boldsymbol{p} : \Sigma^n \to \Lambda^{n+1}$ を等長はめ込みとする．$\mathcal{N}^{n+1}_{\boldsymbol{p}} := \mathbb{R}\times\Sigma^n$ とおき，写像 $\Phi_{\boldsymbol{p}} : \mathcal{N}^{n+1}_{\boldsymbol{p}} \to \mathbb{R}^{n+2}_1$ を

$$\Phi_{\boldsymbol{p}}(t,x) := \boldsymbol{p}(x) + t\boldsymbol{q}(x) \qquad (t\in\mathbb{R},\ x\in\Sigma^n) \tag{4.1}$$

と定義する．$\mathcal{N}^{n+1}_{\boldsymbol{p}}$ には $\Phi_{\boldsymbol{p}}$ の引き戻しによって誘導される計量が付随しているとみなし，$\mathcal{N}^{n+1}_{\boldsymbol{p}}$ を $\boldsymbol{p}$ に対応する**零空間** (null-space) と呼ぶ.

零空間は L-完備な光的波面として捉えることができ，次の命題が成立する．

命題 4.2. (4.1) で定義される写像 $\Phi_{\boldsymbol{p}} : \mathcal{N}^{n+1}_{\boldsymbol{p}} \to \mathbb{R}^{n+2}_1$ は L-完備な光的波面である．

例 4.3. $\Sigma^n = \mathbb{R}^n$ の場合を考える．この場合，

$$\boldsymbol{p}\colon \mathbb{R}^n \ni (x^1,\dots,x^n) \mapsto \left(\frac{1+\sum_{i=1}^n (x^i)^2}{2}, \frac{-1+\sum_{i=1}^n (x^i)^2}{2}, x^1,\dots,x^n \right) \in \Lambda^{n+1}$$

が等長はめ込みとなり，その双対写像は $\boldsymbol{q} \equiv (-1,-1,0,\dots,0)$ となる．よって，

$$\Phi_{\boldsymbol{p}}(t,x) = \left(\frac{1+\sum_{i=1}^n (x^i)^2}{2} - t, \frac{-1+\sum_{i=1}^n (x^i)^2}{2} - t, x^1,\dots,x^n \right) \qquad (t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n)$$

となり，$\Phi_{\boldsymbol{p}}$ は単射で，$\Phi_{\boldsymbol{p}}$ の像は $\mathbb{R}^{n+2}_1$ の光的な超平面である．よって，$\boldsymbol{p}$ の零空間は，$\mathbb{R}^{n+2}_1$ の光的な超平面とみなすことができる．

例 4.4. $\mathbb{S}^n$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の原点を中心とする n 次元単位球面とし，

$$\mathbb{H}^n := \{\boldsymbol{x} = (x^1,\dots,x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}_1\,;\, \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle = -1,\ x^1>0\}$$

とする．包含写像 $\boldsymbol{p}:\mathbb{H}^n\times\mathbb{S}^n \hookrightarrow \Lambda^{2n+1}$ により，$\mathbb{H}^n\times\mathbb{S}^n$ は Λ^{2n+1} に埋め込まれた空間的超曲面とみなすことができるため，$\mathbb{H}^n\times\mathbb{S}^n$ は共形平坦な多様体である．また，$\mathbb{H}^n\times\mathbb{S}^n$ のスカラー曲率 S は恒等的に零である．$\boldsymbol{p}$ の双対写像は $\boldsymbol{q}(x,y) = (-x/2, y/2)$ となるため，$\boldsymbol{p}$ に対応する零空間は

$$\Phi_{\boldsymbol{p}}(t,x,y) = \left(\frac{2-t}{2}x, \frac{2+t}{2}y \right) \qquad (t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{H}^n,\ y\in\mathbb{S}^n)$$

により得られる．

写像 $\iota_{\boldsymbol{p}}:\Sigma^n \ni x \mapsto (0,x) \in \mathcal{N}^{n+1}_{\boldsymbol{p}}$ を考える．このとき，

$$\begin{array}{ccc} M^n & \xrightarrow{\ \boldsymbol{p}\ } & \Lambda^{n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_{\boldsymbol{p}}} & & \downarrow \\ \mathcal{N}^{n+1}_{\boldsymbol{p}} & \xrightarrow{\ \Phi_{\boldsymbol{p}}\ } & \mathbb{R}^{n+2}_1 \end{array}$$

は可換であり，$\iota_{\boldsymbol{p}}$ は等長埋め込みとなるため，$\iota_{\boldsymbol{p}}$ により Σ^n を $\mathcal{N}^{n+1}_{\boldsymbol{p}}$ の空間的超曲面とみなすことができる．また，$\iota_{\boldsymbol{p}}$ の変分を考えることにより，$\mathcal{N}^{n+1}_{\boldsymbol{p}}$ 内での Σ^n の変分を考えることができる．なお，$\boldsymbol{p}$ がはめ込みであると仮定しているため，写像 $\Phi_{\boldsymbol{p}}$ は $\{0\}\times\Sigma^n$ の管状近傍上ではめ込みである．そのため，変分を計算する上では，$\Phi_{\boldsymbol{p}}$ の特異点を考慮しなくてもよい．$\mathcal{N}^{n+1}_{\boldsymbol{p}}$ 内の任意の変分は，特性的な変分によって置き換えることができ，より正確には次の命題が成立する

命題 4.5. (Σ^n, g) をコンパクトで向き付けられた共形平坦な多様体とし，境界を含むものとする．また，$\boldsymbol{p}:\Sigma^n\to\Lambda^{n+1}$ を等長はめ込みとし，$\mathcal{N}^{n+1}_{\boldsymbol{p}}$ を $\boldsymbol{p}$ に対する零空間とする．$G:(-\varepsilon,\varepsilon)\times\Sigma^n\to\mathcal{N}^{n+1}_{\boldsymbol{p}}$ を $\iota_{\boldsymbol{p}}$ の境界を保つ変分とする．このとき，$\delta\in(0,\varepsilon)$ と，$\boldsymbol{p}$ の特性的な変分 $F:(-\delta,\delta)\times\Sigma^n\to\mathbb{R}^{n+2}_1$ で，F の体積関数と，G の体積関数が一致するものが存在する．

次の定理は，[9] での主結果である．

定理 4.6. (Σ^n, g) を共形平坦な多様体とし，$\boldsymbol{p}:\Sigma^n\to\Lambda^{n+1}$ を等長はめ込みとする．また，$\mathcal{N}^{n+1}_{\boldsymbol{p}}$ を $\boldsymbol{p}$ の零空間とする．さらに，(Σ^n, g) のスカラー曲率 S は恒等的に零であるとする．このとき，$\mathcal{N}^{n+1}_{\boldsymbol{p}}$ 内のコンパクトな台を持つ任意の変分に対して，体積の第一変分は零であり，第二変分は非正である（つまり，$\boldsymbol{p}$ は $\mathcal{N}^{n+1}_{\boldsymbol{p}}$ の中で体積が極大となる）．

5 Marginally Trapped Submanifold への一般化

本節では，前節で得られた主結果の一般化として，[10] で得られた結果について説明する．Λ^{n+1} のスカラー曲率が零であるような空間的超曲面は，後述の「marginally trapped 部分多様体」の典型例である．また，全体空間 $\mathbb{R}^{n+2}_1$ は，後述の「光的エネルギー条件（null energy condition）」を満たす Lorentz 多様体である．そこで，筆者の第一論文 [9] で得られた結果を，次のような観点で一般化した．

- $S=0$ であるような光錐の空間的超曲面から，marginally trapped 部分多様体に一般化した．
- 全体空間を $\mathbb{R}^{n+2}_1$ から，光的エネルギー条件を満たす Lorentz 多様体 M^{n+2}_1 に一般化した．

以下，M^{n+2}_1 は $n+2$ 次元の Lorentz 多様体とし，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ で M^{n+2}_1 に付随する Lorentz 内積を表し，$\overline{\nabla}$ で M^{n+2}_1 上の Levi-Civita 接続を表す．空間的はめ込み $f:\Sigma^n\to M^{n+2}_1$ に対し，第二基本形式 II や平均曲率ベクトル場 $\boldsymbol{H}$ は §1 と同様に定義する．まず，「marginally trapped 部分多様体」の定義を与える．

定義 5.1. Σ^n を n 次元の多様体で，$f:\Sigma^n\to M^{n+2}_1$ を空間的はめ込みとする．f の平均曲率ベクトル場 $\boldsymbol{H}$ が各点で光的ベクトルである場合（すなわち，$\langle\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}\rangle=0$ を満たす場合），写像 f は **marginally trapped 部分多様体** という（以下，**MT-部分多様体**と省略する）．

例 5.2. $M^{n+2}_1=\mathbb{R}^{n+2}_1$ の場合，MT-部分多様体の典型例として，

(i) $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の極小超曲面,
(ii) $\mathbb{R}^{n+1}_1$ 内の平均曲率が零の超曲面,
(iii) 平均曲率関数が ±1 に一定な空間的はめ込み $\boldsymbol{p}:\Sigma^n\to\mathbb{H}^{n+1}$,
(iv) 平均曲率関数が ±1 に一定な空間的はめ込み $\boldsymbol{p}:\Sigma^n\to\mathbb{S}^{n+1}_1$,
(v) スカラー曲率が恒等的に零である空間的はめ込み $\boldsymbol{p}:\Sigma^n\to\Lambda^{n+1}$,

などが挙げられる（cf. [7]）．

零空間を誘導するために，MT-部分多様体に対して次のような条件を考える．

定義 5.3 ([10])**.** Σ^n を n 次元の多様体で，$f:\Sigma^n\to M^{n+2}_1$ を MT-部分多様体とする．f の平均曲率ベクトル場 $\boldsymbol{H}$ が，Σ^n 上の各点で非零である場合，MT-部分多様体 f は **$\boldsymbol{H}$-nonvanishing** という．

例 5.4. 例 5.2 で与えられた MT-部分多様体の例の中でも，(iii), (iv), (v) の例は $\boldsymbol{H}$-nonvanishing である．

以後，本稿で扱う MT-部分多様体はすべて $\boldsymbol{H}$-nonvanishing であるとする．
続いて，「光的エネルギー条件」の定義を与える．

定義 5.5. Lorentz 多様体 M^{n+2}_1 が光的に測地的完備であり，任意の光的な接ベクトル $v\in T_pM^{n+2}_1$ に対し，$\mathrm{Ric}(v,v)\geq0$ を満たすとき（Ric は M^{n+2}_1 の Ricci 曲率），M^{n+2}_1 は**光的エネルギー条件** (null energy condition) を満たしているという．

例 5.6. Einstein 多様体は光的エネルギー条件を満たす．特に，Minkowski 時空や (anti-)de Sitter 時空などの空間形は光的エネルギー条件を満たす．

定義 2.1 で定義された特性的な変分は，MT-部分多様体の変分に対しても同様に定義できる．

定義 5.7 (定義 2.1 の MT-部分多様体版，[10])**.** $f:\Sigma^n\to M^{n+2}_1$ を $\boldsymbol{H}$-nonvanishing な MT-部分多様体とし，$F:(-\varepsilon,\varepsilon)\times\Sigma^n\to M^{n+2}_1$ を f の変分とする．$\langle X,\boldsymbol{H}\rangle=0$ が Σ^n 上で成立しているとき，F は**許容的**

(admissible) な変分という．また，F が特性的な変分の上，$\left\langle \overline{\nabla}_t \overline{X}, \boldsymbol{H} \right\rangle = 0$ が Σ^n 上で成立しているとき，F は特性的 (characteristic) な変分という．ただし，f に沿うベクトル場 $\overline{\nabla}_t \overline{X}$ は

$$\overline{\nabla}_t \overline{X} := \left(\overline{\nabla}_{\partial/\partial t} \frac{\partial F}{\partial t} \right)\bigg|_{t=0}$$

と定める．

光錐の空間的超曲面に対する体積の第一・第二変分公式（命題 2.2 と 2.3）についても，MT-部分多様体において同様の公式が得られる．

命題 5.8 (命題 2.2 の MT-部分多様体版，[10])**.** Σ^n を n 次元の境界を持つ多様体とし，$f : \Sigma^n \to M_1^{n+2}$ を $\boldsymbol{H}$-nonvanishing な MT-部分多様体とする．f の変分 $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma^n \to M_1^{n+2}$ は境界を保ち，許容的であるとする．このとき，F に関する体積の第一変分は零である．

$\boldsymbol{H}$-nonvanishing な MT-部分多様体 $f : \Sigma^n \to M_1^{n+2}$ に対し，$A_f : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \to \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ を

$$\langle A_f X, Y \rangle := \langle \mathrm{II}(X, Y), \boldsymbol{H} \rangle \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n))$$

と定める．

命題 5.9 (命題 2.3 の MT-部分多様体版，[10])**.** Σ^n を n 次元の境界を持つ多様体とし，$f : \Sigma^n \to M_1^{n+2}$ を $\boldsymbol{H}$-nonvanishing な MT-部分多様体とする．f の変分 $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma^n \to M_1^{n+2}$ は境界を保ち，特性的であるとする．また，F の変分ベクトル場 X は，Σ^n 上の実数値関数 φ を用いて，$X = \varphi \boldsymbol{H}$ と表されるとする．このとき，F に関する体積の第二変分は

$$\frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} \mathrm{Vol}(t) = -\int_{\Sigma^n} \varphi^2 \Big(\mathrm{tr}\big(A_f^2\big) + \mathrm{Ric}(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}) \Big) dV_0 \tag{5.1}$$

と表される．ただし A_f^2 は，2 つの A_f を合成したものとする．特に M_1^{n+2} が光的エネルギー条件を満たしている場合，(5.1) の右辺の値は非正である．

定義 4.1 で与えられた，光錐の空間的超曲面に対する零空間は，MT-部分多様体の場合にも一般化できる．

定義 5.10 (定義 4.1 の MT-部分多様体版，[10])**.** M_1^{n+2} を光的に測地的完備な $n+2$ 次元の Lorentz 多様体とし，$f : \Sigma^n \to M_1^{n+2}$ を $\boldsymbol{H}$-nonvanishing な MT-部分多様体とする．$\mathcal{N}_f^{n+1} := \mathbb{R} \times \Sigma^n$ とおき，写像 $\Phi_f : \mathcal{N}_f^{n+1} \to M_1^{n+2}$ を

$$\Phi_f(t, x) := \exp_{f(x)}(t \boldsymbol{H}_x) \qquad (t \in \mathbb{R},\ x \in \Sigma^n) \tag{5.2}$$

と定義する．ただし，exp は M_1^{n+2} の指数写像とする．$\mathcal{N}_f^{n+1}$ には Φ_f の引き戻しによって誘導される計量が付随しているとみなし，$\mathcal{N}_f^{n+1}$ を f に対応する**零空間** (null-space) と呼ぶ．

次の定理は，定理 4.6 を MT-部分多様体に一般化することで得られた結果である．

定理 5.11 (定理 4.6 の MT-部分多様体版，[10])**.** M_1^{n+2} は $n+2$ 次元の Lorentz 多様体で，光的エネルギー条件を満たしているとする．また，$f : \Sigma^n \to M_1^{n+2}$ を $\boldsymbol{H}$-nonvanishing な MT-部分多様体とし，$\mathcal{N}_f^{n+1}$ を f の零空間とする．このとき，$\mathcal{N}_f^{n+1}$ 内のコンパクトな台を持つ任意の変分に対して，体積の第一変分は零であり，第二変分は非正である（つまり，f は $\mathcal{N}_f^{n+1}$ の中で体積が極大となる）．

謝辞. 研究集会での講演および本稿の執筆の機会を与えてくださった広島工業大学の直川耕祐先生に心から御礼申し上げます．また，筆者の研究について貴重なご意見を下さった横浜国立大学の本田淳史先生と東京科学大学の梅原雅顕先生に深く感謝申し上げます．

参考文献

[1] S. Akamine, A. Honda, M. Umehara, and K. Yamada, *Null hypersurfaces in Lorentzian manifolds with the null energy condition*, J. Geom. Phys. **155** (2020), 103751, 6pp.

[2] S. Akamine, A. Honda, M. Umehara, and K. Yamada, *Null hypersurfaces as wave fronts in Lorentz-Minkowski space*, preprint, arXiv:2203.02864, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[3] L. Andersson and J. Metzger, *Curvature estimates for stable marginally trapped surfaces*, J. Differential Geom. **84** (2010), 231–265.

[4] A. C. Asperti and M. Dajczer, *Conformally flat Riemannian manifolds as hypersurfaces of the light cone*, Canad. Math. Bull. **32** (1989), 281–285.

[5] H. W. Brinkmann, *On Riemann Spaces Conformal to Euclidean Space*, Proc. Nat. Acad. Sci. **9** (1923), 1–3.

[6] J. Espinar, J. Gálvez, and P. Mira, *Hypersurfaces in* $\mathbb{H}^{n+1}$ *and conformally invariant equations: the generalized Christoffel and Nirenberg problems*, J. Eur. Math. Soc. **11** (2009), 903–939.

[7] A. Honda and S. Izumiya, *The light-like geometry of marginally trapped surfaces in Minkowski space-time*, J. Geom. **106** (2015), 185–210.

[8] S. Izumiya, *Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the lightcone*, Mosc. Math. J. **9** (2009), 325–357.

[9] R. Kishida, *The volume of conformally flat manifolds as hypersurfaces in the light-cone*, Diff. Geom. and its Appl. **96** (2024), 102173.

[10] R. Kishida, *The volume of marginally trapped submanifolds in a Lorentzian manifold satisfying the null energy condition*, in preparation.

[11] H. Liu and S. D. Jung, *Hypersurfaces in light-like cone*, J. Geom. Phys. **58** (2008), 913–922.

[12] H. Liu, M. Umehara, and K. Yamada, *The duality of conformally flat manifolds*, Bull. Braz. Math. Soc. **42** (2011), 131–152.