極小曲面の Gauss 写像の値分布論の研究の最近の進展について[*1]

金沢大学・理工研究域数物科学系　川上　裕 [*2]
Yu Kawakami
Faculty of Mathematics and Physics,
Kanazawa University

1　序

本稿では, 3 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面の Gauss 写像の値分布論に関する最近の研究成果から，著者の指導学生である笠尾俊輔氏との共同研究 [13] で得られた "Bloch-Ros principle" の概要と，同じく指導学生である渡邉元嗣氏との共同研究 [20] で得られた，種数 0 の有限全曲率完備極小曲面（代数的極小曲面ともいう）の Gauss 写像の除外値数と完全分岐値数に関する結果を解説する．また，Gauss 写像の値分布論の新たな問題として「4 点予想」を取り上げる．

2　Bloch-Ros principle

本章では，Bloch-Ros principle の概要と極小曲面論への応用を紹介する．詳細は，論文 [13] または笠尾俊輔氏の修士論文 [14] を参照して欲しい.

2.1　有理型関数に対する compact property について

まず，球面弦距離 $\chi(\cdot,\cdot)$ を確認する．Riemann 球面 $\overline{\mathbf{C}} := \mathbf{C}\cup\{\infty\}$ は立体射影 $\pi_N\colon \overline{\mathbf{C}} \to S^2$, つまり

$$\pi_N(z) = \left(\frac{2\mathrm{Re}\, z}{|z|^2+1}, \frac{2\mathrm{Im}\, z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)\ (z\in\mathbf{C}), \quad \pi_N(\infty) := (0,0,1)(=: N)$$

によって，2 次元球面 S^2 と同一視することができる．ここで，S^2 の距離は $\mathbf{R}^3$ の Euclid 距離から定まる部分距離として定める．$\overline{\mathbf{C}}$ における z_1 と z_2 の距離を，S^2 と考えたときの距離の半分で定め，$\chi(z_1,z_2)$ と表し，**球面弦距離**と呼ぶ．球面弦距離 $\chi(z_1,z_2)$ は，$z_1,z_2\in\mathbf{C}$ に対して，

$$\chi(z_1,z_2) = \frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}, \quad \chi(z_1,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}$$

となる.

Σ を Riemann 面，$(\overline{\mathbf{C}},\chi)$ を Riemann 球面とする．このとき,

$$\mathscr{M}(\Sigma) := \{f\colon \Sigma\to\overline{\mathbf{C}}\ \text{正則写像}\ \} = \{f\colon \Sigma\to\overline{\mathbf{C}}\ \text{有理型関数}\ \}\cup\{f\equiv\infty \text{ on } \Sigma\}$$

[*1] 本研究は科研費（基盤研究 (C)，課題番号：19K03463, 23K03086）の助成を受けたものである.
[*2] 住所：920-1192 金沢大学数物科学系，e-mail: y-kwkami@se.kanazawa-u.ac.jp

と定める．$\mathscr{M}(\Sigma)$ の位相として，Σ 内の compact 部分集合上の一様収束位相を用いる．

P を Σ 上の $\overline{\mathbf{C}}$ に値を取る正則写像のある性質としたとき，

$$\mathscr{P}(\Sigma) := \{ f \in \mathscr{M}(\Sigma)\,;\, f \text{ は } \Sigma \text{ 上で性質 } P \text{ を満たす} \}$$

と定める．

定義 2.1 (closed property と compact property [30])**.** $\overline{\mathbf{C}}$ に値を取る正則写像の性質 P に対して，次の条件を考える：

(P1) 任意の 2 つの Riemann 面 Σ, Σ' と分岐点を持たない任意の正則写像 $\phi\colon \Sigma \to \Sigma'$ に対して，$f \in \mathscr{P}(\Sigma')$ ならば $f \circ \phi \in \mathscr{P}(\Sigma)$ となる．

(P2) Σ を Riemann 面，$f \in \mathscr{M}(\Sigma)$ とする．Σ 内の任意の相対コンパクト領域 Ω に対して，$f|_\Omega \in \mathscr{P}(\Omega)$ ならば $f \in \mathscr{P}(\Sigma)$ となる．

(P3) 任意の Riemann 面 Σ に対して，$\mathscr{P}(\Sigma)$ の元からなる収束列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数が $\mathscr{P}(\Sigma)$ の元になる．

(P4) 任意の Riemann 面 Σ に対して，$\mathscr{P}(\Sigma)$ は Σ 上の正規族となる．

性質 P が条件 (P1)，(P2)，(P3) を満たすとき，P を **closed property** という．また，性質 P が条件 (P1)，(P2)，(P3)，(P4) を満たすとき，P を **compact property** という．

$\Omega \subset \mathbf{C}$ を領域とし，$\hat{f} := \pi_N \circ f\colon \Sigma \to S^2 \subset \mathbf{R}^3$ とする．D 上における $\hat{f}$ の Euclid 勾配の長さを $|\nabla \hat{f}|_e$ で表す．このとき，D 上の有理型関数 f に対して，

$$|\nabla \hat{f}|_e = \frac{2\sqrt{2}|f'|}{1+|f|^2},$$

また D 上 $f \equiv \infty$ のときは $|\nabla \hat{f}|_e = 0$ が成り立つ．

closed property と compact property との違いに関して，次の定理が成り立つ．これは正規族の理論における Zalcman の補題 [33, 34] に対応する．

定理 2.2 (Ros による Zalcman の補題 [30])**.** P を closed property とする．このとき，次の (1) または (2) のいずれかが成り立つ：

(1) P は compact property である．

(2) $f \in \mathscr{P}(\mathbf{C})$ が存在して，$|\nabla \hat{f}|_e(0) = 1$ かつ $\mathbf{C}$ 上で $|\nabla \hat{f}|_e \leq 1$ をみたす．

また，compact property は次のような性質を持つ．以後，$\mathbf{D}$ は単位円板を表す．

命題 2.3 (compact property の性質 [13, 30])**.** P を compact property とする．

(1) $\mathscr{P}(\mathbf{C})$ は定値写像しか含まない．

(2) 任意の $f \in \mathscr{P}(\mathbf{D} \setminus \{0\})$ に対して，$z = 0$ は f の真性特異点にはならない．つまり，$f\colon \mathbf{D} \to \overline{\mathbf{C}}$ は正則写像になる．

compact property の例を 2 つ紹介する．

例 2.4 (Montel-Liouville 型の性質 [13])**.** $L > 0$ とする．任意の Riemann 面 Σ および正則写像

$f\colon \Sigma \to \overline{\mathbf{C}}$ に対して，性質 P_L を

$$|f| < L \quad \text{on } \Sigma \quad \text{or} \quad f \equiv (\text{constant}) \quad \text{on } \Sigma$$

と定めると，P_L は compact property である．

例 2.5 (Carathéodory-Montel-Picard 型の性質 [2, 13, 30, 34])**.** $X \subset \overline{\mathbf{C}}$ とする．任意の Riemann 面 Σ および正則写像 $f\colon \Sigma \to \overline{\mathbf{C}}$ に対して，性質 P_X を

$$f(\Sigma) \subset \overline{\mathbf{C}} \setminus X \quad \text{or} \quad f \equiv (\text{constant}) \quad \text{on } \Sigma$$

とすると，P_X は closed property である．さらに，X が 3 個以上の元を含んでいれば，P_X は compact property である．

例 2.5 を適用すると，命題 2.3 (1) は Picard の小定理，命題 2.3 (2) は Picard の大定理にそれぞれ対応する．

2.2 Weierstrass m-triple に対する曲率評価について

曲面の Gauss 写像の値分布論的を統一的に扱うため，Weierstrass m-triple という次の概念を定義する．

定義 2.6 (Weierstrass m-triple [13])**.** Σ を等角計量

$$ds^2 = (1 + |g|^2)^m |f|^2 |dz|^2$$

（但し，fdz を Σ 上の正則 1 次微分形式，g を Σ 上の有理型関数，m を正の整数）が付随した開 Riemann 面とする．このとき，組 (Σ, fdz, g) を **Weierstrass m-triple** という．

次に，compact property をみたす有理型関数が m-curvature estimate を満たすことを定義する．

定義 2.7 (m-curvature estimate [13])**.** P を compact property，m を正の整数とする．このとき，P が **m-curvature estimate** を満たすとは，ある $C = C(P, m) > 0$ が存在して，$g \in \mathscr{P}(\Sigma)$ を満たす任意の Weierstrass m-triple (Σ, fdz, g) に対して，任意の $p \in \Sigma$ において

$$|K_{ds^2}(p)|(d(p))^2 \leq C$$

が成り立つことである．ここで，$K_{ds^2}(p)$ は $ds^2 = (1 + |g|^2)^m |f|^2 |dz|^2$ に関する p の Gauss 曲率，$d(p)$ は p から Σ の境界への測地的距離である．

[13] において，我々は compact property が m-curvature esimate を満たすための判定条件として，以下の定理を示した．この定理が Bloch-Ros principle の重要な核となる結果である．

定理 2.8 (Kasao-Kawakami [20])**.** P を compact property，m を正の整数とする．このとき，次の (1) または (2) のいずれかが成り立つ：

(1) P は m-curvature estimate を満たす．

(2) ある $\mathbf{D}$ 上の正則 1 次微分形式 fdz およびある $\mathbf{D}$ 上の非定数有理型関数 g が存在して，

次の (A) および (B) を満たす：

(A) $ds^2 = (1+|g|^2)^m|f|^2|dz|^2$ が $\mathbf{D}$ 上の完備な等角計量となる，

(B) $g \in \mathscr{P}(\mathbf{D})$ であり，$|K_{ds^2}(0)| = 1/4$ で，$\mathbf{D}$ 上の各点 p において $|K_{ds^2}(p)| \leq 1$ が成り立つ．

定理 2.8 を用いると，例えば，次の結果を示すことができる．

命題 2.9 (Kasao-Kawakami [20])**.** 例 2.4 で与えた性質 P_L は，m-curvature estimate を満たす compact property である．

証明. 正の整数 m を任意に取り固定する．このとき，P_L は m-curvature estimate を満たさない compact property であると仮定すると，定理 2.8 より $\mathbf{D}$ 上の正則 1 次微分形式 fdz および $\mathbf{D}$ 上の非定数有理型関数 g が存在して，次の (A) と (B) を満たす：

(A) $ds^2 = (1+|g|^2)^m|f|^2|dz|^2$ が $\mathbf{D}$ 上の完備な等角計量となる，

(B) $\mathbf{D}$ 上で $|g| < L$.

そこで，$ds_0^2 := (1+L^2)^m|f|^2|dz|^2$ とすると，$\mathbf{D}$ 上で

$$(1+|g|^2)^{m/2}|f| < (1+L^2)^{m/2}|f|$$

を満たすため，ds_0^2 は $\mathbf{D}$ 上の完備等角計量となる．また，f は $\mathbf{D}$ 上に零点を持たないため，

$$\Delta \log{(1+L^2)^{m/2}|f|} = 0$$

となり，ds_0^2 に関する Gauss 曲率 $K_{ds_0^2}$ が $\mathbf{D}$ 上で恒等的に 0 となる．よって，ds_0^2 は $\mathbf{D}$ 上の完備かつ平坦な等角計量となる．一方，完備かつ平坦な 2 次元 Riemann 多様体の普遍被覆面は複素平面 $\mathbf{C}$ であることから，$(\mathbf{D}, ds_0^2)$ の普遍被覆面は $\mathbf{C}$ となるが，これは明らかに矛盾する． □

命題 2.9 の系として，次の Liouville 型の定理を導くことができる．

系 2.10 (Kasao-Kawakami [20])**.** 組 (Σ, fdz, g) を Weierstrass m-triple とする．$ds^2 = (1+|g|^2)^m|f|^2|dz|^2$ が Σ 上の完備等角計量で，さらにある $L > 0$ が存在して，Σ 上で $|g| < L$ を満たすならば，ds^2 に関する Gauss 曲率 K_{ds^2} は Σ 上で恒等的に 0 となる．特に，g は Σ 上で定数である．

証明. 命題 2.9 より，任意の $p \in \Sigma$ に対して

$$|K_{ds^2}(p)|^{1/2} \leq \frac{C}{d(p)}$$

を満たす $C = C(L, m) > 0$ が存在する．ds^2 は完備計量であることから，任意の $p \in \Sigma$ に対して $d(p) = \infty$ が成り立つ．よって，Σ 上で $K_{ds^2} \equiv 0$ となる．また，

$$K_{ds^2} = -\frac{2m|g'|^2}{(1+|g|^2)^{m+2}|f|^2}$$

となるので，$K_{ds^2} \equiv 0$ のとき g は Σ 上で定数となる． □

また，藤本坦孝氏が得た不等式 [9, (8.12) on page 136] を用いることで，命題 2.9 をさらに精密化することができる．

命題 2.11 (Kasao-Kawakami, [20]). m を正の整数とする．例 2.5 で与えた性質 P_X は，X が $m+2$ 個以上の元を含んでいれば，m-curvature estimate を満たす compact property となる．

系 2.10 の証明と同様の議論をすることで，命題 2.11 の系として，次の Picard 型の定理を導くことができる．

系 2.12 (Kawakami [16]). 組 (Σ, fdz, g) を Weierstrass m-triple とする．$ds^2 = (1+|g|^2)^m|f|^2|dz|^2$ が Σ 上の完備等角計量で，g が Σ 上非定数有理型関数ならば，g の除外値数は高々 $m+2$ である．

系 2.12 は最良である．実際，Σ を $\mathbf{C}\setminus\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+1}\}$ またはその普遍被覆面とし，

$$fdz = \frac{dz}{\prod_{j=1}^{m+1}(z-\alpha_j)}, \quad g(z) = z$$

と定めると，g は Σ 上で $m+2$ 個の除外値 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{m+1},\infty$ を持ち，$ds^2=(1+|g|^2)^m|f|^2|dz|^2$ は Σ 上の完備等角計量となる．

2.3 極小曲面論への応用

第 2.2 節で得た結果を $\mathbf{R}^3$ 内の極小曲面論へ適用する．その他の 3 次元空間型内の曲面のクラス（例えば，3 次元 Lorentz-Minkowski 空間内の極大曲面や 3 次元アファイン空間内の非固有アファイン球面など）への応用は [13] を参照して欲しい．

$\mathbf{R}^3$ 内の極小曲面の基本事項を復習する．詳細は洋書では [1, 27, 28]，最近の和書では [18, 22] を参照して欲しい．$X=(x_1,x_2,x_3)\colon \Sigma\to\mathbf{R}^3$ を向き付けられた極小曲面とする．この曲面で等温座標系 (u,v) をとることにより，Σ を $\mathbf{R}^3$ からの誘導計量を等角計量として持つ Riemann 面とみなすことができる．このとき，

$$\Delta_{ds^2}X = 0 \tag{2.1}$$

を満たす，つまり各成分関数 x_i は Σ 上の調和関数となる．複素座標 $z=u+iv$ を用いると，(2.1) から

$$\bar{\partial}\partial X = 0 \tag{2.2}$$

となる．ここで，$\partial = (\partial/\partial u - i\,\partial/\partial v)/2$, $\bar{\partial} = (\partial/\partial u + i\,\partial/\partial v)/2$ とする．(2.2) より，各 $\phi_i := \partial x_i dz$ $(i=1,2,3)$ は Σ 上の正則 1 次微分形式となる．また，次の 3 条件が成り立つ：

[C] $\sum\phi_i^2 = 0$（共形条件），

[R] $\sum|\phi_i|^2 > 0$（正則条件），

[P] 各 ϕ_i が，任意の $\gamma\in H_1(M,\mathbf{Z})$ に対して

$$\mathrm{Re}\int_\gamma \phi_i = 0$$

を満たす（周期条件）．

Σ 上の正則 1 次微分形式 fdz と Σ 上の有理型関数 g を

$$fdz = \phi_1 - i\phi_2, \quad g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} \tag{2.3}$$

とする．このとき，$g\colon \Sigma \to \overline{\mathbf{C}} \simeq S^2$ はこの曲面の Gauss 写像となる．また，$\mathbf{R}^3$ からの誘導計量 ds^2 は

$$ds^2 = (1+|g|^2)^2|f|^2|dz|^2 \tag{2.4}$$

となる．さらに，

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1-g^2)dz, \qquad \phi_2 = \frac{i}{2}f(1+g^2)dz, \qquad \phi_3 = fgdz \tag{2.5}$$

が成り立つ．逆に，Σ 上正則 1 次微分形式 fdz と有理型関数 g の対 (fdz, g) が与えられたとき，

$$\phi := (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

を (2.5) で定める．このとき，共形条件 [C] は自動的に満たされ，正則条件 [R] は，「g の h 位の極でのみ fdz は $2h$ 位の零点をもつ」となることが (2.4) からわかる．もし周期条件 [P] を満たしていれば，極小曲面は

$$X(z) = \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} 2\phi \tag{2.6}$$

で得られる．ここで，z_0 は Σ 上の点で 1 つ固定しておく．この対 (fdz, g) を極小曲面の **Weierstrass データ**（Weierstrass data）（以下，W-data と略す），(2.6) を **Enneper-Weierstrass の表現公式**（Enneper-Weierstrass representation）という．このとき，全曲率 $\tau(\Sigma)$ は

$$\tau(\Sigma) := \int_{\Sigma} K_{ds^2}dA = -\int_{\Sigma}\frac{2idg\wedge d\bar{g}}{(1+|g|^2)^2} \tag{2.7}$$

となり，その絶対値は Gauss 写像の像の Riemann 球面上の Fubini-Study 計量に関する面積と一致する．

(2.4) から，第 2.2 節にある結果の $m=2$ の場合を考えることで，極小曲面の Gauss 写像の値分布論の結果を得ることができる．まず，定理 2.8 の応用を考える．単位円板 $\mathbf{D}$ は単連結である，つまり W-data に対して曲面の周期条件 [P] が自動的に成り立つことに注意すると，Enneper-Weierstrass の表現公式から，Ros 氏により示された次の結果を得る．

定理 2.13 (Ros [30])**.** P を compact property とする．このとき，次の (1) または (2) のいずれかが成り立つ：

(1) P は 2-curvature estimate を満たす，

(2) ある完備極小曲面 $\psi\colon \mathbf{D} \to \mathbf{R}^3$ が存在して，その Gauss 写像は $\mathbf{D}$ 上で性質 P を満たし，曲面の Gauss 曲率は $|K_{ds^2}(0)| = 1/4$ および任意の $p \in \mathbf{D}$ に対して $|K_{ds^2}(p)| \leq 1$ が成り立つ．

また，系 2.10 を適用することで，Bernstein の定理が得られる．

定理 2.14 (Bernstein の定理). $\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面で，その Gauss 写像の像が S^2 において稠密でなければ平面である．特に，平面全体で定義された極小グラフは平面になる．

証明. $\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面 $\psi\colon \Sigma \to \mathbf{R}^3$ の W-data を $(f dz, g)$ とおく．仮定から，必要ならば適当な回転を施すことで，ある $L > 0$ が存在して，Σ 上で $|g| < L$ が成り立つ．また，$\mathbf{R}^3$ からの誘導計量 (2.4) は Σ 上の完備計量なので，系 2.10 より g は定数，つまり $\psi(\Sigma)$ は平面になる． □

系 2.12 を応用することで，藤本坦孝氏が示した次の結果を得る．

定理 2.15 (Fujimoto [6]). $\mathbf{R}^3$ 内の平面でない完備極小曲面の Gauss 写像の除外値数は高々 $4(= 2 + 2)$ である．さらに，この結果は最良である．

注意 2.16. 定理 2.15 の精密化として，藤本坦孝氏は次の章で述べる Gauss 写像の完全分岐値数についても次のことを示している：$\mathbf{R}^3$ 内の平面でない完備極小曲面の Gauss 写像 g の完全分岐値数 ν_g に対して，$\nu_g \leq 4$ が成り立つ ([7]).

2.4 今後の課題

本章の最後に，Bloch-Ros principle の研究における今後の課題として，$\mathbf{R}^3$ 内の平均曲率一定曲面の Gauss 写像の値分布の問題を取り上げる．$\mathbf{R}^3$ 内の平均曲率一定曲面の詳細は，例えば剱持勝衛氏の本 [17] を参照して欲しい．$\mathbf{R}^3$ 内の平均曲率一定曲面の Gauss 写像の値分布の結果として，次の結果が知られている．

定理 2.17 (Hoffman-Osserman-Schoen [12]). $\psi\colon \Sigma \to \mathbf{R}^3$ を完備平均曲率一定曲面とする．Gauss 写像を Σ から S^2 への写像として考えたとき，Gauss 写像の像が S^2 の閉半球に含まれているときは，$\psi(\Sigma)$ は平面か直円柱面のいずれかである．

よって，次の予想が立てられる．

予想 2.18. $\psi\colon \Sigma \to \mathbf{R}^3$ を完備平均曲率一定曲面，$g\colon \Sigma \to \overline{\mathbf{C}}$ をその曲面の Gauss 写像とする．Gauss 写像 g が Σ 上で $|g| \leq 1$ を満たすならば，任意の $p \in \Sigma$ に対して

$$|K_{ds^2}(p)|^{1/2} \leq \frac{C}{d(p)}$$

を満たす $C > 0$ が存在する．ただし，K_{ds^2} は曲面の Gauss 曲率，$d(p)$ は p から Σ の境界への測地的距離である．

予想 2.18 の Gauss 写像の条件は $|g| \leq 1$ とする必要があることに注意する．実際，アンデュロイドとノドイドの Gauss 写像の像は $\overline{\mathbf{C}}$ 内において有界となる．Ruh-Vilms [31] により，$\mathbf{R}^3$ 内の平均曲率一定曲面の Gauss 写像は S^2 への調和写像によって特徴付けられるので，今回我々が示した Bloch-Ros principle の枠組みが構築できそうである．しかし，調和写像に対して Hurwitz の定理が成り立つとは限らないなど枠組みを構築する上で技術的に難しいところもある．このことは，Ros 氏の論文 [30] でも触れられている．

3　種数 0 の有限全曲率完備極小曲面の Gauss 写像の値分布

本章では，有限全曲率完備極小曲面の Gauss 写像の値分布に関する結果，特に，渡邉元嗣氏との共同研究 [20] で得られた，種数 0 の有限全曲率完備極小曲面における Gauss 写像の除外値数と完全分岐値数の結果を紹介する．

3.1　複素平面上の有理型関数の値分布

本節では，このテーマの研究を理解する上で必要となる，複素平面 $\mathbf{C}$ 上の有理型関数の値分布の結果を復習する．まず，$\mathbf{C}$ 上の有理型関数の値分布論において，最も有名な結果の 1 つである，Picard の小定理を改めて確認する．

定理 3.1 (Picard の小定理)**.** $f\colon \mathbf{C} \to \overline{\mathbf{C}}$ を非定数有理型関数とし，D_f を f の除外値数とする．このとき，

$$D_f \leq 2 \tag{3.1}$$

が成り立つ．

(3.1) の評価は最良である．例えば，$f(z) = e^z$ を $\mathbf{C}$ 上の有理型関数として考えたとき，$0, \infty$ が f の除外値となり，(3.1) の等号を満たす例となる．

一方，Nevanlinna [24] は定理 3.1 の一般化として，次の結果を示している．

定理 3.2 (分岐定理，[24], [29])**.** $f\colon \mathbf{C} \to \overline{\mathbf{C}}$ を非定数有理型関数とする．q を 1 以上の整数とし，$\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \overline{\mathbf{C}}$ を q 個の相異なる点とする．各 $\alpha_j \, (j = 1, \ldots, q)$ に対して，$f(z) = \alpha_j$ となる z の重複度が常に ν_j 以上であると仮定すると，

$$\sum_{j=1}^{q} \left(1 - \frac{1}{\nu_j}\right) \leq 2 \tag{3.2}$$

が成り立つ．もし，α_j が f の除外値のときは $\nu_j = \infty$ とし，$1 - (1/\nu_j) = 1$ と考える．このことから，本定理は Picard の小定理（定理 3.1）の精密化にあたる．

定理 3.2 は，Nevanlinna の第二主要定理から導くことのできる欠除指数関係式（defect relation）の系として得られる．詳細は，例えば [5] や [25] を参照して欲しい．

定理 3.2 を踏まえて，次の概念を定める．

定義 3.3 (完全分岐値とその重み，[20, 29])**.** Σ を Riemann 面とし，$f\colon \Sigma \to \overline{\mathbf{C}}$ を有理型関数とする．また，ν を 2 以上の整数とする．このとき，$\alpha \in \overline{\mathbf{C}}$ が f の ν 位の**完全分岐値**（totally ramified value）であるとは，方程式 $f = \alpha$ が ν より小さい重複度となる解を持たない，つまり，すべての解の重複度が ν 以上となることをいう．また，α が f の除外値のときは，どんな重複度の解も存在しないので，f の ∞ 位の完全分岐値とみなす．さらに，f の ν 位の完全分岐値

に対する**ウェイト**（weight）を

$$1-\frac{1}{\nu}$$

で定める．f の除外値に対するウェイトは 1 とする．このように定めたウェイトの Σ 上での総和を f の**完全分岐値数**または**完全分岐値のウェイトの総和**（total weight of the totally ramified values) という．

定義 3.3 より，完全分岐値数は除外値数の精密化にあたることがわかる．この概念を用いて定理 3.2 の主張を述べると次のようになる．

定理 3.4 (分岐定理)**.** $f\colon \mathbf{C}\to\overline{\mathbf{C}}$ を非定数有理型関数とする．D_f を f の除外値数とし，ν_f を f の完全分岐値数とする．このとき，

$$D_f \leq \nu_f \leq 2 \tag{3.3}$$

が成り立つ．

(3.3) は次の例からも最良の評価であることがわかる．$\mathbf{C}$ 上の有理型関数として，Weierstrass の $\wp$ 関数を考える．$\wp(z)$ は次の 4 つの 2 位の完全分岐値をもつ：

$$e_1 := \wp(\omega/2), \quad e_2 := \wp(\omega'/2), \quad e_3 := \wp((\omega+\omega')/2), \quad \infty.$$

ここで，ω, ω' は f の基本周期とする．このとき，$\wp(z)$ の完全分岐値数は $\nu_{\wp(z)} = 4(1-(1/2)) = 2$ となり，(3.3) の等号を満たす例となる．

完全分岐値数は除外値数より精密な情報を与える．例えば，Picard の小定理（定理 3.1）から，非定数有理型関数 $f\colon \mathbf{C}\to\overline{\mathbf{C}}$ に対して $D_f \leq 2$ が成り立つ．一方，代数学の基本定理から，非定数有理関数 $f\colon \mathbf{C}\to\overline{\mathbf{C}}$ に対しては $D_f \leq 1$ となる．よって，除外値数の最大数において，一般の場合と代数的な場合の違いは “1” だが，完全分岐値数の最大数になるとその差が小さくなる．実際，定理 3.4 から非定数有理型関数 $f\colon \mathbf{C}\to\overline{\mathbf{C}}$ に対して $\nu_f \leq 2$ となるが，次数が d の非定数有理関数 $f\colon \mathbf{C}\to\overline{\mathbf{C}}$ に対しては $D_f \leq 2-(1/d)$ となる（証明は例えば [20, Proposition 2.2] を参照して欲しい）．この評価は最良で，実際 $f(z)=z^d$ の完全分岐値数は $\nu_f = 2-(1/d)$ となる．この例からわかるように，一般の場合と代数的な場合の違いを調べる際に，完全分岐値数を調べることは有意義である．

3.2 代数的極小曲面の Gauss 写像の値分布

極小曲面の Gauss 写像の値分布論の研究において，多くの研究者が興味をもつ問題として，Osserman 問題と呼ばれる，有限全曲率完備極小曲面の Gauss 写像の除外値数の上限を求める問題がある．ここからこの問題を解説する．$\mathbf{R}^3$ 内の有限全曲率完備極小曲面について，次の性質が成り立つ．

定理 3.5 (Huber-Osserman)**.** $X\colon \Sigma\to\mathbf{R}^3$ を有限全曲率完備極小曲面とする．このとき，次のことが成り立つ：

(1) Σ は閉 Riemann 面 $\overline{\Sigma}$ から有限個の点（この点のことを**エンド**（end）と呼ぶ）を除いた

ものと等角同値となる ([10]),

(2) このとき，W-data は $\overline{\Sigma}$ 上有理型に拡張することができる ([26]).

定理 3.5 が成り立つことから，$\mathbf{R}^3$ 内の有限全曲率完備極小曲面は**代数的極小曲面**（algebraic minimal surface）と呼ばれている．本稿では，以後この用語を用いることとする．代数的極小曲面の Gauss 写像の除外値数について，次が成り立つ．

定理 3.6 (Osserman [26])**.** $\mathbf{R}^3$ 内の平面でない代数的極小曲面の Gauss 写像の除外値数は高々 3 である．

つまり，完備極小曲面のクラスに “有限全曲率（代数的）” という条件を加えれば，Gauss 写像の除外値数の上限は “4”（定理 2.15）から “3”（定理 3.6）へと変化する．問題となっているのは，定理 3.6 の評価が最良かどうかである．

問題 3.7 (Osseman 問題 [27])**.** $\mathbf{R}^3$ 内の平面でない代数的極小曲面の Gauss 写像の除外値数の上限は “2” か？それとも “3” か？

Gauss 写像の除外値数が “2” となる代数的極小曲面の例は存在する．例えば，カテノイド（懸垂面）は有限全曲率完備極小曲面で，$\Sigma = \mathbf{C}\setminus\{0\}$ 上で W-data を $(f dz, g) = (dz/z^2, z)$ とおくと，Σ 上で曲面が定まり，g の除外値数は 2 となる．また，[23] において，カテノイド以外の例が幾つか紹介されている．一方，Gauss 写像の除外値数が “3” の代数的極小曲面は例が見つかっておらず，存在に関しては次の制約条件が成り立つ．

命題 3.8 (Osserman [26])**.** Σ が種数 γ の閉 Riemann 面 $\overline{\Sigma}_\gamma$ から有限個（ここでは k 個とする）の点を除いた開 Riemann 面 $\overline{\Sigma}_\gamma\setminus\{p_1,\ldots,p_k\}$ と双正則同値となる，平面でない代数的極小曲面 $X\colon \Sigma \to \mathbf{R}^3$ とする．d を Gauss 写像 $g\colon \Sigma \to \overline{\mathbf{C}}$ を $\overline{\Sigma}_\gamma$ 上に有理型に拡張したときの次数とする．g の除外値数が 3 のとき，次のことが成り立つ：

- $\gamma \geq 1,\ d \geq k \geq 3,$
- もし $\gamma = 1$ ならば，$d = k$ となり，さらに各エンドは埋め込み（つまり，平面エンドかカテノイドエンド）になる，
- $\tau(\Sigma)$ は -12π 以下になる．

さらに，全曲率の絶対値の大きさが小さいときに対しては次の非存在性が成り立つことが知られている．

命題 3.9 (Weitsman-Xavier, Fang)**.** 全曲率が -12π ([32]) と -16π ([4]) となる，Gauss 写像の除外値数が 3 の $\mathbf{R}^3$ 内の代数的極小曲面は存在しない．

そこで，多くの研究者は Osserman 問題（問題 3.7）の答えを次のように予想している．

予想 3.10. 平面でない代数的極小曲面の Gauss 写像の除外値数の上限は “2” である．

この予想が正しいとすると，完全分岐値数に対しても次の予想が考えられる．

予想 3.11. 平面でない代数的極小曲面の Gauss 写像の完全分岐値数の上限は “2” である．

しかし，予想 3.11 は正しくない．実際に次のような例が存在する．

命題 3.12 (Miyaoka-Sato [23], Kawakami [15])**.** $\Sigma = \mathbf{C}\backslash\{\pm i\}$ とし，その上での正則 1 次微分形式，有理型関数の対 (fdz, g) を

$$(fdz, g) = \left(\frac{(z^2+t^2)^2}{(z^2+1)^2}\,dz, \sigma\frac{z^2+1+a(t-1)}{z^2+t}\right),\ a, t \in \mathbf{R},\ (a-1)(t-1) \neq 0, \tag{3.4}$$

で定める．ここで，$\sigma^2 = (t+3)/a\{(t-1)a+4\}$ とする．このとき，$\sigma^2 < 0$ を満たす σ に対して，(3.4) を W-data とし，Gauss 写像 g の除外値が σ，σa となる Σ 上の代数的極小曲面が存在する．また，$g(0)$ が g の 2 位の完全分岐値となる．よって，g の完全分岐値数は

$$\nu_g = 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2.5$$

となる．

Gauss 写像の完全分岐値数が 2.5 の代数的極小曲面の例はこれまで命題 3.12 で挙げた例以外見つかっていなかったが，渡邉元嗣氏が次の新しい例を発見した．

命題 3.13 (Kawakami-Watanabe [20])**.** $\Sigma = \mathbf{C}\backslash\{0, \pm i\}$ とし，その上での正則 1 次微分形式，有理型関数の対 (fdz, g) を

$$(fdz, g) = \left(\frac{\{(b-a)z^4+4(b-1)z^2+4(b-1)\}^2}{z^2(z^2+1)^2}\,dz,\ \sigma\frac{(b-a)z^4+4a(b-1)z^2+4a(b-1)}{(b-a)z^4+4(b-1)z^2+4(b-1)}\right) \tag{3.5}$$

で定める．ここで，$a, b \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$，つまり，$a \neq b$ で $\sigma^2 = (5a+11b-16)/(16ab-11a-5b) < 0$ とする．このとき，(3.5) を W-data とし，Gauss 写像 g の除外値が σ，σa となる Σ 上の代数的極小曲面が存在する．また，$b = g(\pm\sqrt{2}i)$ が g の 2 位の完全分岐値となる．よって，g の完全分岐値数は

$$\nu_g = 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2.5$$

となる．

これらの例は，完全分岐値数も含めて定理 3.6 を精密化した次の結果の最良の例を与えている．

定理 3.14 (Kawakami-Miyaoka-Kobayashi [19])**.** Σ が種数 γ の閉 Riemann 面 $\overline{\Sigma}_\gamma$ から有限個（ここでは k 個とする）の点を除いた開 Riemann 面 $\overline{\Sigma}_\gamma\backslash\{p_1, \ldots, p_k\}$ と等角同値となる，平面でない代数的極小曲面 $X\colon \Sigma \to \mathbf{R}^3$ とする．d を Gauss 写像 $g\colon \Sigma \to \overline{\mathbf{C}}$ を $\overline{\Sigma}_\gamma$ 上に有理型に拡張したときの次数とする．g の除外値数 D_g および完全分岐値数 ν_g に対して，

$$D_g \leq \nu_g \leq 2 + \frac{2}{R}, \quad \frac{1}{R} = \frac{\gamma - 1 + k/2}{d} < 1 \tag{3.6}$$

が成り立つ．特に，$\mathbf{R}^3$ 内の平面でない有限全曲率完備極小曲面の Gauss 写像の除外値数は高々 3 である．

実際，$(\gamma, k, d) = (0, 3, 2)$ とすると，(3.6) の ν_g の上限は $2 + (2/R) = 2.5$ となり，命題 3.12 の例

が等号を満たす例となる．また, $(\gamma, k, d) = (0, 4, 4)$ とすると, (3.6) の ν_g の上限は $2+(2/R) = 2.5$ となり，命題 3.13 の例が等号を満たす例となる．よって，幾つかの位相型においては，定理 3.14 の評価は最良であることがわかるが，すべての位相型において定理 3.14 が最良であるかどうかはわかっていない.

種数 0 の代数的極小曲面の Gauss 写像の除外値数と完全分岐値数について，次の結果が成り立つ.

定理 3.15 (Osserman, Kawakami-Watanabe [20, 26])**.** 平面でない種数 0 の代数的極小曲面 $X\colon \Sigma \to \mathbf{R}^3$ の Gauss 写像 g に対して,

$$D_g \leq \nu_g < 3$$

が成り立つ．特に，Gauss 写像の除外値数は高々 2 である.

よって，種数 0 の代数的極小曲面において，Gauss 写像の完全分岐値数が 3 以上の例が存在しないことがわかった.

4 完備極小曲面の Gauss 写像の値分布論の未解決問題

最後に，$\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面の Gauss 写像の値分布論の興味深い問題を 1 つ紹介する．ここで取り上げるのは,「4 点予想（four point conjecture)」と呼ばれる次のことを主張するものである.

予想 4.1 (4 点予想，[20])**.** $\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面において，Gauss 写像が 4 つの除外値を持つとき，Gauss 曲率は曲面上至る所負の値を取る.

予想 4.1 の主張は,「$\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面が少なくとも 1 つ平坦点（Gauss 曲率が 0 となる点のこと）を持てば，その曲面の Gauss 写像の除外値数は高々 3 になる」と言い換えることができる．この予想は，代数的極小曲面や Scherk の極小曲面を含む「擬代数的極小曲面（pseudo-algebraic minimal surface)」と呼ばれる完備極小曲面のクラスにおいては正しいことがわかる．実際，定理 3.14 の設定で擬代数的極小曲面を考えたとき，l を g の分岐値（g の分岐点の値のこと）の数とすると,

$$D_g \leq 2 + \frac{2}{R} - \frac{l}{d}, \quad \frac{1}{R} = \frac{\gamma - 1 + k/2}{d} \leq 1 \tag{4.1}$$

が成り立ち，少なくとも 1 つでも平坦点をもつと $l \geq 1$ となるので，$D_g < 4$，つまり，$D_g \leq 3$ となる.

参考文献

[1] A. Alarcón, F. Forstnerič, F. J. López, Minimal surfaces from a complex analytic viewpoint, Springer Monogr. Math., Springer, Cham, 2021.

[2] W. Bergweiler, Bloch's principle, Comput. Methods Funct. Theory **6** (2006), 77–108.

[3] S.-S. Chern, Complex analytic mappings of Riemann surfaces. I, Amer. J. Math., **82** (1960), 323–337.

[4] Y. Fang, On the Gauss map of complete minimal surfaces with finite total curvature, Indiana Univ. Math. J., **42** (1993), 1389–1411.

[5] 藤本坦孝，複素解析，岩波書店，2006 年.

[6] H. Fujimoto, On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces, J. Math. Soc. Japan **40** (1988), 235–247.

[7] H. Fujimoto, On the Gauss curvature of minimal surfaces, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 427–439.

[8] H. Fujimoto, Value Distribution Theory of the Gauss Map of Minimal Surfaces in $\mathbf{R}^m$, Aspects of Mathematics, E21. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1993.

[9] H. Fujimoto, Nevanlinna theory and minimal surfaces, Geometry V, 95–151, 267–272, Encyclopaedia Math. Sci., **90**, Springer, Berlin, 1997.

[10] A. Huber, On subharmonic functions and differential geometry in the large, Comment. Math. Helv., **32** (1957), 13–72.

[11] D. A. Hoffman, R. Osserman, The geometry of the generalized Gauss map, Mem. Amer. Math. Soc. **28** (1980), no. 236.

[12] D. A. Hoffman, R. Osserman, R. Schoen, On the Gauss map of complete surfaces of constant mean curvature in $\mathbf{R}^3$ and $\mathbf{R}^4$, Comment. Math. Helv. **57** (1982), 519–531.

[13] S. Kasao and Y. Kawakami, Bloch-Ros principle and its application to surface theory, arXiv: 2402.12909.

[14] 笠尾俊輔，様々な曲面のクラスへの Bloch-Ros principle の応用，2023 年度金沢大学大学院自然科学研究科数理科学専攻 修士論文，複素解析学ホームページ 修士・博士論文アーカイブにて公開.

[15] Y. Kawakami, On the totally ramified value number of the Gauss map of minimal surfaces, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **82** (2006), 1–3.

[16] Y. Kawakami, On the maximal number of exceptional values of Gauss maps for various classes of surfaces, Math. Z. **274** (2013), 1249–1260.

[17] K. Kenmotsu, Surfaces with constant mean curvature, Translated from the 2000 Japanese original by Katsuhiro Moriya and revised by the author, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 221, Am. Math. Soc., Providence (2003).

[18] 川上裕，藤森祥一，極小曲面論入門 - その幾何学的性質を探る -，SGC ライブラリ **147**，サイエンス社，2019 年.

[19] Y. Kawakami, R. Kobayashi, R. Miyaoka, The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces, Forum Math. **20** (2008), 1055–1069.

[20] Y. Kawakami and M. Watanabe, The Gauss images of complete minimal surfaces of genus zero of finite total curvature, J. Geom. Anal. **34** (2024), no. 9, Paper No. 270, 22 pp.

[21] 小林昭七，曲線と曲面の微分幾何（改訂版），裳華房，1995 年.

[22] 宮岡礼子，極小曲面（共立叢書 現代数学の潮流），共立出版，2022 年.

[23] R. Miyaoka, K. Sato, On complete minimal surfaces whose Gauss map misses two directions, Arch. Math., **63** (1994), 565–576.

[24] R. Nevanlinna, Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der Meromorphen Funktionen, Acta Math., **48** (1926), 367–391.

[25] J. Noguchi, J. Winkelmann, Nevanlinna theory in several complex variables and Diophantine approximation, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), **350** Springer, Tokyo, 2014.

[26] R. Osserman, Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n, Ann. of Math., **80** (1964), 340–364.

[27] R. Osserman, A Survey of Minimal Surfaces, second edition, Dover Publication Inc., New York, 1986.

[28] M. Ru, Minimal surfaces through Nevanlinna theory, De Gruyter Stud. Math., **92**, De Gruyter, Berlin, 2023.

[29] R. M. Robinson, A generalization of Picard's and related theorems, Duke Math. J. **5** (1939), 118—132.

[30] A. Ros, The Gauss map of minimal surfaces, Differential Geometry, Valencia 2001, Proceedings of the conference in honour of Antonio M. Naveira, edited by O. Gil-Medrano and V. Miquel, World Scientific, (2002) 235-252.

[31] E. A. Ruh, J. Vilms, The tension field of the Gauss map. Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 569—573.

[32] A. Weitsman, F. Xavier, Some function theoretic properties of the Gauss map for hyperbolic complete minimal surfaces, Mich. Math. J., **34** (1987), 275–283.

[33] L. Zalcman, A heuristic principle in complex function theory, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 813–817.

[34] L. Zalcman, Normal families: new perspectives, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **35** (1998), 215–230.