Self-shrinker のモース指数評価と今後の課題

徳島大学大学院社会産業理工学研究部 * 國川 慶太 †

Keita Kunikawa

Graduate School of Technology, Industrial and Social Sciences

Tokushima University

1 序

リーマン多様体 M^m 内の部分多様体 Σ^n を考える．部分多様体の体積を最も早く減少させる変形，すなわち，体積汎関数の負の勾配流のことを平均曲率流という．$F_t : \Sigma \to M$ を時間依存するはめ込みの族とするとき，平均曲率流は

$$\frac{dF}{dt} = H \quad (\text{平均曲率ベクトル})$$

という式で与えられる．つまり，部分多様体の平均曲率ベクトル方向への変形が平均曲率流である．例えば，適当な半径の標準球面 $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^m$ は平均曲率流のもとで自己相似的に縮小していき，有限時間で 1 点に潰れる．1 点に潰れる部分では第 2 基本形式のノルムが発散するが，そのような点を特異点と呼ぶ．一般に，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ 内の閉部分多様体 Σ^n を初期値とする平均曲率流では，必ず有限時間で特異点が生じる．どのような特異点が生じうるのかを調べることはこの分野の重要な課題であるが，まだまだわかっていないことは多い．ここで，特異点を調べるというのは，特異点周辺の放物型リスケール極限を調べるという意味である．このリスケール極限のことを平均曲率流の特異点モデルという．例えば，Huisken [4] は強凸な閉超曲面 $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を初期値とする平均曲率流の特異点モデルが標準球面であることを示している．さらに，Huisken は [5] で，平均曲率流の単調性公式を導出し，それを用いることで特異点モデルが self-shrinker（自己縮小解）であることを示した．したがって，平均曲率流の特異点を分類するには，self-shrinker を分類すればよいということになるが，実際にはそれは不可能といえる．なぜなら，self-shrinker はユークリッド空間内の重み付き極小部分多様体として捉えることができるが，それをすべて分類するということは，すべての極小部分多様体を（何の条件もなしに）分類せよと言っているようなものだからである．通常の極小部分多様体の理論と同様に，何らかの安定性条件のもと self-shrinker を分類しようとするのは自然な発想であり，それを実際に行ったのが Colding-Minicozzi [3] であ

* 〒770-0813 徳島県徳島市南常三島町 2-1

† E-mail: kunikawa@tokushima-u.ac.jp

る．彼らは超曲面 $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に対して $\mathcal{F}$-汎関数というものを定義し，self-shrinker がその臨界点であること，そしてコンパクトかつ $\mathcal{F}$-安定な self-shrinker が球面に限ることを示した．ここで，$\mathcal{F}$-汎関数とは，大雑把に言うと，ガウシアンで重み付けられた部分多様体の体積汎関数のことである（厳密には違うし，その違いが本当は重要だがここでは説明を省く）．また，$\mathcal{F}$-安定というのは，$\mathcal{F}$-汎関数に関する安定性，すなわち第 2 変分が非負という意味である（これも厳密には違う）．大事なのは，$\mathcal{F}$-安定な self-shrinker が generic な特異点モデルを捉えているという点である．Colding-Minicozzi の理論は一般の余次元でも適用可能である．Andrews-Li-Wei [2] は，一般の余次元で，コンパクトかつ $\mathcal{F}$-安定な spherical self-shrinker は球面に限ることを示している．ここで，spherical self-shrinker とは，適当な次元の球面に含まれているような self-shrinker のことである．余次元が高い場合，一般にはこのような技術的条件なしではほとんど何もわかっていないと言ってよい．

ここまでは self-shrinker の安定性に関することを述べてきたが，本稿の主題は不安定性である．不安定性を測る尺度として（重み付きの）モース指数 $\mathrm{index}_f(\Sigma)$ を考え，それと self-shrinker のトポロジーの関係を紹介する．櫻井陽平氏（埼玉大）との共同研究により得られた主定理の主張は大体次のとおりである：コンパクトな self-shrinker $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^m$ が重み付きリッチ曲率に関するある条件を満たしているとき

$$\mathrm{index}_f(\Sigma) \geq Cb_1(\Sigma)$$

が成り立つ．ただし，C は次元 n, m にのみ依存する定数，$b_1(\Sigma)$ は Σ の第 1 ベッチ数である．この定理は，self-shrinker がトポロジカルに複雑であればあるほど，不安定さが増すこと，すなわち，平均曲率流の特異点モデルとして現れにくいということを示唆するものになっている．この主結果において，余次元を 1 に制限すると，重み付きリッチ曲率に関する条件は不要となるが，その結果は [6] により得られている．我々の主結果は彼らの結果を一般の余次元に拡張したものと言えるが，現状では技術的仮定である（かどうかもわからない）重み付きリッチ曲率に関する条件の検討が残されている．

2　重み付き極小部分多様体とその安定性

Self-shrinker はユークリッド空間内の重み付き極小部分多様体とみなすことができる．ここでは最も一般的な状況で重み付き極小部分多様体に関する安定性やモース指数を説明する．

$M_f = (M^m, g, e^{-f}dv_M)$ を滑らかな測度距離空間とする．すなわち，(M^m, g) は m 次元リーマン多様体で，dv_M はそのリーマン測度，f は M 上の滑らかな関数である．Σ^n を M_f の n 次元閉部分多様体とし，$e^{-f}dv_M$ を Σ に制限することで得られる Σ の重み付き体積汎関数を

$$\mathrm{Vol}_f(\Sigma) = \int_\Sigma e^{-f} dv$$

と書く．Σ_t を Σ の変分とし，その変分ベクトル場を V とするとき，第 1 変分公式は

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Vol}_f(\Sigma_t) = -\int \langle H_f, V\rangle e^{-f} dv$$

となる．ここで，H_f は Σ の重み付き平均曲率ベクトル場であり

$$H_f = -\nabla^{\perp} f$$

で定義される．ただし，$\nabla^{\perp} f$ は $f \in C^{\infty}(M)$ の勾配ベクトル $\nabla^M f$ を Σ の法方向に制限したものである．任意の変分ベクトル場 V に対し，第 1 変分公式が 0，すなわち重み付き平均曲率ベクトル場が $H_f \equiv 0$ となるような部分多様体 $\Sigma \subset M_f$ を f-極小部分多様体，もしくは重み付き極小部分多様体という．このことは変分ベクトル場 V を法方向に制限しても同じなので，以後，$V \in \Gamma(N\Sigma)$ と考える（$N\Sigma$ は Σ の法束）．

続いて，第 2 変分公式を紹介する．Σ を f-極小部分多様体，$V \in \Gamma(N\Sigma)$ をその変分ベクトル場とするとき

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \mathrm{Vol}_f(\Sigma_t)\\ &= -\int_{\Sigma} \Big(\big\langle \Delta_f^{\perp} V, V\big\rangle + \sum_{\xi=1}^{n} \big\langle R^M(V, e_\xi)e_\xi, V\big\rangle + \mathrm{Hess}_f^M(V,V) + \sum_{\xi,\mu=1}^{n} \langle A(e_\xi, e_\mu), V\rangle^2 \Big) e^{-f} dv\end{aligned}$$

が成り立つ．それぞれ記号は以下のとおりとする．

- $\Delta_f^{\perp} V = \Delta^{\perp} V - \nabla^{\perp}_{\nabla f} V$ で，$\Delta^{\perp}$ は法接続 $\nabla^{\perp}$ から定まる法束 $N\Sigma$ に作用するラプラシアン
- R^M：M_f の曲率テンソル
- Hess_f^M：$f \in C^{\infty}(M)$ の M 上のヘッシアン
- A：$\Sigma \subset M_f$ の第 2 基本形式
- e_ξ, e_μ: Σ 上の局所正規直交枠

第 2 変分公式は $\Gamma(N\Sigma)$ 上の 2 次形式と考え

$$Q_f(V,V) = -\int_{\Sigma} \langle L_f V, V\rangle e^{-f} dv$$

と表す．ただし，L_f はヤコビ作用素で

$$L_f V = \Delta_f^{\perp} V + \sum_{\xi=1}^{n} (R^M(V, e_\xi)e_\xi)^{\perp} + (\nabla_V^M \nabla^M f)^{\perp} + \sum_{\xi,\mu=1}^{n} \langle A(e_\xi, e_\mu), V\rangle A(e_\xi, e_\mu)$$

で与えられる．任意の $V \in \Gamma(N\Sigma)$ に対し，$Q_f(V,V) \geq 0$ であるとき，f-極小部分多様体は f-安定であるといい，そうでないときは，f-不安定であるという．さらに，2 次形式 Q_f の指数のことをモース指数とよび，$\mathrm{index}_f(\Sigma)$ と表す．モース指数とはつまり，Q_f が負になるような $\Gamma(N\Sigma)$ の部分空間の最大次元のことであり，また，ヤコビ作用素 L_f の負の固有値の数ということもできる（$L_f V + \lambda V = 0$）．もちろん，f-安定であることは，$\mathrm{index}_f(\Sigma) = 0$ であることと同値である．

3 指数評価の方法

Self-shrinker は，特別な f-極小部分多様体と考えることができる．すなわち，$M=\mathbb{R}^m$, g はユークリッド内積，$f=|x|^2/4$ という滑らかな測度距離空間内の f-極小部分多様体が self-shrinker である．実は，f-安定な self-shrinker は存在しない．平均曲率ベクトル場 $H\in\Gamma(N\Sigma)$ と $\mathbb{R}^m$ の平行ベクトル場 P を法方向に制限した $P^\perp\in\Gamma(N\Sigma)$ がいずれも L_f の負の固有値をもつからである．これらのと重み付き L^2 内積の意味で直交する変分ベクトル場 $V\in\Gamma(N\Sigma)$ は admissible な変分ベクトル場とよばれる．Lee-Lue [8] は，コンパクトな self-shrinker について，admissible な V に対し第 2 変分が非負であることと，Colding-Minicozzi の導入した $\mathcal{F}$-安定性が同値であることを示した．モース指数に関しても admissible な変分ベクトル場に制限して考えるのが自然であるが，結局は平均曲率ベクトル場 H と平行ベクトル場 $P^\perp$ の分しか差はないので，前の章で定義した $\mathrm{index}_f(\Sigma)$ を考えれば十分である．

Self-shrinker の指数評価には，Ambrozio-Carlotto-Sharp [1] が開発した平均化法を用いる．ここで紹介するのは，[1] の手法を使いやすい形に整理し補題としてまとめたものである．

補題 1 (梶ヶ谷-國川 [7])**.** 有限次元内積空間 $\mathcal{G}$ と双線型写像 $\Phi:\Gamma(T^*\Sigma)\times\mathcal{G}\to\Gamma(N\Sigma)$ が与えられているとする．各 $\omega\in\Gamma(T^*\Sigma)$ に対し，$\mathcal{G}$ 上の 2 次形式を $q_\omega(u,v)=Q_f(\Phi_{\omega,u},\Phi_{\omega,v})$ により定める．このとき，もし有限次元部分空間 $S\subset\Gamma(T^*\Sigma)$ が存在し，任意の $\omega\in S$ に対し $\mathrm{Tr}_{\mathcal{G}}\, q_\omega<0$ であれば，

$$\mathrm{index}_f(\Sigma)\geq\frac{\dim S}{\dim\mathcal{G}}$$

が成り立つ．

今回の self-shrinker $\Sigma^n\subset\mathbb{R}^m$ の場合，$\mathcal{G}=\mathbb{R}^m\wedge\mathbb{R}^m$ ($\mathbb{R}^m$ から誘導される標準的な内積を考える)，$S=\mathcal{H}^1_f(\Sigma)$ とする．$\mathcal{H}^1_f(\Sigma)$ は Σ 上の重み付き調和 1-形式全体のなす空間であり，Σ がコンパクトの場合には $\dim\mathcal{H}^1_f(\Sigma)=b_1(\Sigma)$ となることが知られている．また，Φ は $\{\theta_i\wedge\theta_j\}_{1\leq i<j\leq m}$ を $\mathcal{G}=\mathbb{R}^m\wedge\mathbb{R}^m$ の正規直交基底とするとき

$$\Phi_{ij}=\Phi_{\omega,\theta_i\wedge\theta_j}=\langle\theta_j,\omega^\sharp\rangle\theta_i^\perp-\langle\theta_i,\omega^\sharp\rangle\theta_j^\perp \tag{1}$$

で定める．以上の設定で重み付き調和 1 形式 ω に対し $\mathrm{Tr}_{\mathcal{G}}\, q_\omega<0$ を示すことができれば，指数評価

$$\mathrm{index}_f(\Sigma)\geq\frac{2b_1(\Sigma)}{m(m-1)}$$

がしたがう．

4 Self-shrinker のトレース公式と主結果，今後の課題

補題 3 を利用するため，$\mathrm{Tr}_{\mathcal{G}}\, q_\omega$ の計算結果を以下で紹介する．

補題 2. $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^m$ をコンパクトな self-shrinker，$\omega \in \mathcal{H}_f^1(\Sigma)$ とし，テスト変分ベクトル場 Φ_{ij} を式 (1) で定める．このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{\mathcal{G}}\, q_\omega &= \sum_{i<j} Q_f(\Phi_{ij}, \Phi_{ij}) \\ &= \int_\Sigma \{-2(m-n-1)\,\mathrm{Ric}_f^\Sigma(\omega^\sharp, \omega^\sharp) - |\omega|^2\} e^{-f} dv. \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，$\mathrm{Ric}_f^\Sigma = \mathrm{Ric}^\Sigma + \mathrm{Hess}_f^\Sigma$ は self-shrinker Σ の重み付きリッチテンソルである．

補題 3 と補題 2 を合わせて，次の主結果を得る．

定理 3 (國川-櫻井)**.** $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^m$ をコンパクトな self-shrinker で，

$$\mathrm{Ric}_f^\Sigma > -\frac{1}{2(m-n-1)} \tag{3}$$

を満たすものとする．このとき，指数評価

$$\mathrm{index}_f(\Sigma) \geq \frac{2b_1(\Sigma)}{m(m-1)} \tag{4}$$

が成り立つ．

定理 3 において，余次元 $m-n=1$ の場合には，重み付きリッチ曲率に関する条件 (3) は，$\mathrm{Ric}_f^\Sigma > -\infty$ と考えることができ，これは常に満たされる．したがって，Σ が超曲面の場合には重み付きリッチ曲率に関する条件なしでモース指数評価を行うことができる．超曲面の場合の結果は Impera-Rimoldi-Savo [6] により，さらに強い形で示されている：

$$\mathrm{index}_f(\Sigma) \geq \frac{2b_1(\Sigma)}{m(m-1)} + m$$

注意 4. Self-shrinker に限らず，Σ をより一般の滑らかな測度距離空間 M_f 内の f-極小部分多様体とした場合でも，(2) と類似の，しかし遥かに複雑な公式を導出できる．

最後に，定理 3 を適用できる例を調べてみる．$x : \Sigma^n \to \mathbb{R}^m$ を spherical self-shrinker とするとき, その位置ベクトルは $x^\perp = x$ を満たす．このことから, $\mathrm{Hess}_f^\Sigma = 0$ がわかり, 特に $\mathrm{Ric}_f^\Sigma = \mathrm{Ric}^\Sigma$ がわかる．

例 5. $x : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^4$ を

$$x(\theta, \phi) = \sqrt{2}(\cos\theta, \sin\theta, \cos\phi, \sin\phi) \in \mathbb{S}(\sqrt{2}) \times \mathbb{S}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{S}^3(2) \subset \mathbb{R}^4$$

で定義されるクリフォードトーラスとする．これは余次元 2 の spherical self-shrinker の代表例である．$\mathrm{Ric}^\Sigma = 0$ なので，$\mathrm{Ric}_f^\Sigma = 0$ であり，定理 3 を適用するための条件 (3) を満たしている．実際に適用し，(4) を調べてみると

$$\mathrm{index}_f(\Sigma) \geq \frac{2b_1(\mathbb{T}^2)}{4 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

を得る．ところが，そもそもすべての self-shrinker にとって $\mathrm{index}_f(\Sigma) \geq 1$ は自明であり，これでは意味のある評価にはなっていない．

今後の課題をいくつか挙げておく．

1. 現状では技術的な仮定である (3) を取り除くことはできるか．もしくは，(3) が本質的な仮定であることを示す例を見つけられるか．
2. (3) を満たす例を豊富に見つけることはできるか．
3. Urbano [9] により，$\mathbb{S}^3$ 内の全測地的でない極小曲面のモース指数は 5 以上であり，ちょうど 5 となるものはクリフォードトーラスに限るということが知られている．クリフォードトーラスは $\mathbb{R}^4$ の余次元 2 の self-shrinker とみなすこともできるが，self-shrinker としてのモース指数 $\mathrm{index}_f(\Sigma)$ を具体的に求めることはできるだろうか．少なくとも，本稿の手法ではうまくいかないようである．

5 謝辞

研究集会「部分多様体と離散化の幾何学」での講演の機会，そして本稿執筆の機会を与えてくださった広島工業大学の直川耕祐先生にこの場を借りて感謝申し上げます．また，本研究は JSPS 科研費 23K03105 の助成を受けたものです。

参考文献

[1] L. Ambrozio, A. Carlotto and B. Sharp, *Comparing the Morse index and the first Betti number of minimal hypersurfaces*, J. Differ. Geom. **108** (2018), no. 3, 379–410.

[2] B. Andrews, H. Li and Y. Wei, *F-stability for self-shrinking solutions to mean curvature flow*, Asian J. Math. **18** (2014), no. 5, 757–778.

[3] T.H. Colding and W.P. Minicozzi II, *Generic mean curvature flow. I: Generic singularities*, Ann. Math. (2) **175** (2012), no. 2, 755–833.

[4] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Differ. Geom. **20** (1984), 237–266.

[5] G. Huisken, *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow*, J. Differ. Geom. **31** (1990), no. 31, 285–299.

[6] D. Impera, M. Rimoldi and A. Savo, *Index and first Betti number of f-minimal hypersurfaces and self-shrinkers*, Rev. Mat. Iberoam. **36** (2020), no. 3, 817–840.

[7] T. Kajigaya and K. Kunikawa, *Index estimate by first Betti number of minimal hypersurfaces in compact symmetric spaces*, preprint, arXiv:2410.11585, 26 pages.

[8] Y.-I. Lee and Y.-K. Lue, *The stability of self-shrinkers of mean curvature flow in*

higher co-dimension, Trans. Am. Math. Soc. **367** (2015), no. 4, 2411–2435.

[9] F. Urbano *Minimal surfaces with law index in the three-dimensional sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), no. 4, 989–992.