Borsukの対心定理の様々な応用
Applications of Borsuk's antipodal theorem

川崎英文，九州大学大学院数理学研究院 *

HIDEFUMI KAWASAKI †

FACULTY OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY

Abstract

トポロジーがタンパク質の構造解析やデータ解析に応用されるようになって久しい．最適化理論やゲーム理論の分野でも不動点定理は重要な道具であるが，トポロジーを十分に活用しているとまでは言えない．筆者はこの 2 年間 Borsuk の対心定理の最適化理論への応用を図ってきた．本稿ではこの研究の経緯を解説する．

1　序

Borsuk の対心定理 [1] は n 次元球面 S^n から n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ への連続写像 φ には $\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(-\boldsymbol{u})$ を満たす点 $\boldsymbol{u} \in S^n$ が存在することを主張する．Borsuk の対心定理には，それと同値な定理がいくつかある．組合せ版の Tucker の補題や，集合被覆版の LSB 定理などである．また，応用としてはハムサンドウィッチ定理，離散的なハムサンドウィッチ定理にモーメント曲線を絡めたネックレス分割定理，Lovász による Kneser 予想の解決等がよく知られている（Matoušek [10]）．本稿ではそれらとは別に，筆者が現在研究している Borsuk の対心定理の応用を紹介する．

2　ハムサンドウィッチ定理

最初にハムサンドウィッチ定理の手法を説明する．μ を $\mathbb{R}^n$ のルベーグ測度とし，A_i $(i = 1, \ldots, n)$ を測度が正の $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．ハムサンドウィッチ定理は A_i $(i = 1, \ldots, n)$ の測度を同時に２等分する超平面が存在することを主張する．

S^n の元 $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ に対し，最初の n 次元ベクトルを $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ で表すと，$\boldsymbol{u} = (u, u_{n+1})$ となる．$\langle u, x\rangle$ を $\mathbb{R}^n$ の内積 $u_1x_1 + \cdots + u_nx_n$ として，各 $\boldsymbol{u} \in S^n$ に対して，超平面 $H_{\boldsymbol{u}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x\rangle = u_{n+1}\}$ と２つの閉半空間を

$$H^+_{\boldsymbol{u}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x\rangle \geq u_{n+1}\}, \quad H^-_{\boldsymbol{u}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x\rangle \leq u_{n+1}\} \tag{2.1}$$

で定義する．$\varphi_i(\boldsymbol{u}) := \mu(A_i \cap H^+_{\boldsymbol{u}})$, $\varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ で S^n から $\mathbb{R}^n$ への連続写像を定義すると，Borsuk の対心定理により，$\exists \boldsymbol{u} \in S^n$ s.t. $\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(-\boldsymbol{u})$. $H^+_{-\boldsymbol{u}} = H^-_{\boldsymbol{u}}$ なので，

$$\mu(A_i \cap H^+_{\boldsymbol{u}}) = \mu(A_i \cap H^-_{\boldsymbol{u}}) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

となる．これがハムサンドウィッチ定理の主張と証明である．

---

*kawasaki.hidefumi.245@m.kyushu-u.ac.jp

†本研究は科研費 JSPS KAKENHI Grant Number 20K03751 の助成を受けている．

3　パラメトリック最適化問題に対する対心定理

筆者の最初の研究結果は，パラメータ $\boldsymbol{u} \in S^n$ の非線形最適化問題に対する対心定理である．そこでは，ハムサンドウィッチ定理を参考に，閉半空間 $H_{\boldsymbol{u}}^+$ を用いた．詳細は川崎 [3, 5].

本節では A_i を $\mathbb{R}^n$ の空でないコンパクト凸集合，$f_i : \mathbb{R}^n \times S^n \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．このとき，次の最適値関数

$$F_i(\boldsymbol{u}) := \max_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+} f_i(x, \boldsymbol{u}).$$

は $A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+$ が非空な領域では連続であるが，非空から空に変わるときに不連続（図 1）になるので，Borsuk の対心定理が適用できない．

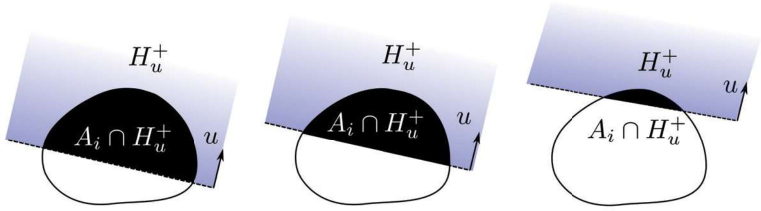

図 1: 最適値関数 $F_i(\boldsymbol{u})$ の不連続性.

そこで，次の写像 $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) : S^n \to \mathbb{R}^n$ を導入した（[5]）．$A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+$ が非空から空に変わるときに ψ_i の値が 0 になることが期待できるからである．

$$\psi_i(\boldsymbol{u}) := \begin{cases} \displaystyle\max_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+} f_i(x, \boldsymbol{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+} f_i(x, \boldsymbol{u}) & (A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+ \neq \emptyset), \\ 0 & (A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+ = \emptyset). \end{cases} \tag{3.1}$$

実際，A_i の境界が面や線分を含まないならば（A_i の狭義凸性とよぶ），ψ は S^n 全体で連続になる．しかし，Borsuk の対心定理を ψ に適用すると，$\boldsymbol{u} \in S^n$ が自明な解になる可能性があり，それを排除するために，最適値関数を次のように改良した．

$$\varphi_i(\boldsymbol{u}) := \begin{cases} \displaystyle\max_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+} f_i(x, \boldsymbol{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+} f_i(x, \boldsymbol{u}) & (A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+ \neq \emptyset), \\ \delta^*(u \mid A_i) - u_{n+1} & (A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+ = \emptyset), \end{cases} \tag{3.2}$$

ここで，δ^* は支持関数 $\delta^*(u \mid A_i) := \max\{\langle u, x \rangle \mid x \in A_i\}$ である．定義式 (3.2) の場合分けは前者が本質的で，後者は自明な解を排除するための仕掛けである．また，後者は $A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+ = \emptyset$ と $\delta^*(u \mid A_i) - u_{n+1} < 0$ が同値であることから導出した．このとき，φ は連続であり，Borusk の対心定理から次の結果が得られる．

定理 1　（パラメトリック最適化問題の対心定理１）A_i の狭義凸性と，関数 $f_i(x, \boldsymbol{u})$ が $\boldsymbol{u}$ に関して対心的であることを仮定する．すなわち，$f_i(x, -\boldsymbol{u}) = -f_i(x, \boldsymbol{u})$ が任意の $(x, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^n \times S^n$ で成立するとする．このとき，ある $\boldsymbol{u} \in S^n$ が存在して，$A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+$ と $A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-$ は非空であり，すべての $i = 1, \ldots, n$ に対して次の等式が成立する．

$$\max_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+} f_i(x, \boldsymbol{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+} f_i(x, \boldsymbol{u}) = \max_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-} f_i(x, \boldsymbol{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-} f_i(x, \boldsymbol{u}). \tag{3.3}$$

特に，$f_i(x,\boldsymbol{u}) = \langle u, x\rangle$ をとると，A_i の狭義凸性を必要とせずに，次の定理が得られる．

定理 2 $A_i \subset \mathbb{R}^n$ $(i=1,\dots,n)$ を内部が非空なコンパクト凸集合とすると，ある $\boldsymbol{u} \in S^n$ が存在して，$A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+$ と $A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-$ は非空であり

$$\delta^*(u \mid A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+) - \delta_*(u \mid A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+) = \delta^*(u \mid A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-) - \delta_*(u \mid A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-) \tag{3.4}$$

がすべての $i=1,\dots,n$ で成立する．ただし，$\delta_*(u \mid X) := \min_{x\in X}\langle u, x\rangle$.

4 非線形最適化問題に対する別のアプローチ

前節の方法は集合値写像 $\boldsymbol{u} \mapsto A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+$ の連続性を必要とし，それを保証するために狭義凸性などを仮定した．加えて証明も面倒である．本節では別のアプローチを考える．詳細は川崎 [6].

本節を通して以下の仮定を設ける（前節より弱い仮定）．$A_i \subset \mathbb{R}^n$ を非空なコンパクト集合とする（凸性は不要）．$f_i : \mathbb{R}^n \times D^n \to \mathbb{R}$ を $u \in D^n$ に関して対心的な連続関数とする（よって $f_i(x,\mathbf{0}) = 0$）．ここで，D^n は n 次元閉球である．γ_i を任意の実定数とする．

このとき，$\boldsymbol{u} = (u, u_{n+1}) \in S^n$ として，最適値関数 κ_i を (4.1) で定義すると，κ_i は連続になる．

$$\kappa_i(\boldsymbol{u}) := \max_{x\in A_i} f_i(x,u) - \gamma_i u_{n+1}. \tag{4.1}$$

Borsuk の対心定理を $\kappa = (\kappa_1,\dots,\kappa_n)$ に適用すると，次の定理が得られる．

定理 3 （パラメトリック最適化問題の対心定理 2）

(1) 任意の $\gamma_1,\dots,\gamma_n \in \mathbb{R}$ に対し，ある $\boldsymbol{u} = (u, u_{n+1}) \in S^n$ が存在して，$u \neq \mathbf{0}$ かつ

$$\max_{x\in A_i} f_i(x,u) + \min_{x\in A_i} f_i(x,u) = 2\gamma_i u_{n+1} \quad (i=1,\dots,n). \tag{4.2}$$

(2) $\max_{x\in A_i} f_i(x,u) + \min_{x\in A_i} f_i(x,u)$ が i に依存しないような非零な $u \in D^n$ が存在する．

(3) (4.3) を満たす非零ベクトル $v \in D^n$ が存在しなければ

$$\max_{x\in A_i} f_i(x,v) + \min_{x\in A_i} f_i(x,v) = 0,\ (i=1,\dots,n), \tag{4.3}$$

任意の $\gamma_1,\dots,\gamma_n \in \mathbb{R}$ に対し，$\max_{x\in A_i} f_i(x,u) + \min_{x\in A_i} f_i(x,u)$ $(i=1,\dots,n)$ の比が $\gamma_1 : \gamma_2 : \cdots : \gamma_n$ になるような D^n の内点 u が存在する．

定理 3 で $f_i(x,u) = \langle u, x\rangle$ をとると

$$\max_{x\in A_i} f(x,u) =: \delta^*(u \mid A_i), \quad \min_{x\in A_i} f(x,u) =: \delta_*(u \mid A_i)$$

となる．その幾何学的意味を把握するために

$$c_i(u) := \frac{\delta^*(u \mid A_i) + \delta_*(u \mid A_i)}{2}$$

とおくと，次の集合評価定理（定理 4）としてまとめることができる．定理 4 をこうよぶ理由は次節で説明する．

定理 4 （集合評価定理）

(1) 任意の $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ に対し，ある $\boldsymbol{u} = (u, u_{n+1}) \in S^n$ が存在して，$u \neq \mathbf{0}$ かつ

$$c_i(u) = \gamma_i u_{n+1} \ (i = 1, \dots, n). \tag{4.4}$$

(2) $c_i(u)$ が i に依存しない非零な $u \in D^n$ が存在する．

(3) $c_i(u) = 0$ $(\forall i)$ を満たす非零な $v \in D^n$ が存在しなければ，任意の $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ に対し，

$$c_1(u) : \cdots : c_n(u) = \gamma_1 : \cdots : \gamma_n \tag{4.5}$$

を満たす D^n の内点 u が存在する．

次節に進む前に 3 節と 4 節の 2 つの対心定理 の関係を説明しよう．実は，定理 2 の (3.4) と定理 4 の (4.4) は本質的に同じものである．正確には，A_i がコンパクト凸集合で $A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^+$ と $A_i \cap H_{\boldsymbol{u}}^-$ が非空のとき，(3.4) と (4.4) で $\gamma_i = 1$ としたものは同じ等式になる．詳細は川崎 [6]．他方，定理 4 (3) は定理 2 にはない主張であり，集合（グループ）を評価する定理と解釈できる．

5　個の比較と集合の比較

まず，図 2 から $c_i(u)$ が A_i の u 方向の中央値を表すことがわかる．

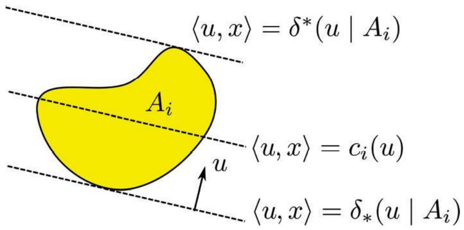

図 2: 超平面 $\langle u, x \rangle = c_i(u)$ は集合 A_i の u 方向の幅を 2 等分する．

これを基に,「評価」の意味を説明する．例えば，筆記試験，面接試験の点数が $(60, 60)$, $(40, 80)$ の 2 名の受験生を評価しようとするとき，総合評価は重み $u = (u_1, u_2)$ 次第で変わる（図 3）．

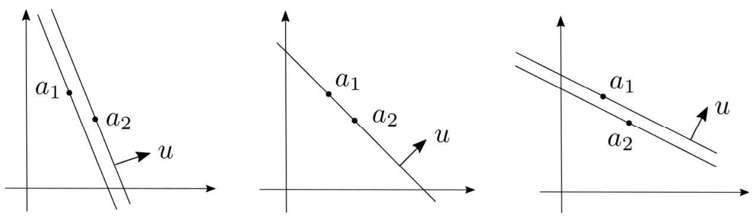

図 3: 左：$a_1 < a_2$．中：$a_1 = a_2$．右：$a_1 > a_2$．

しかし，$(60, 60)$, $(80, 80)$ に対しては，重みが正であれば結果は変わらない．定理 4 (3) は $\mathbb{R}^n$ の n 個の集合（グループ）についても，同様の議論を展開できることを示している．

例 1 定理 4 (3) を図を使って説明しよう．図 4 と図 5 の A_1, A_2 は同じ配置にある．原点を通る直線でそれらの幅を同時に 2 等分することはできないので，(3) により，任意の γ_1, γ_2 に対し，$c_1(u):c_2(u)=\gamma_1:\gamma_2$ となるように重み $u\in\mathbb{R}^2$ をとることができる．図 4 は $\gamma_1:\gamma_2=1:2$, 図 5 は $\gamma_1:\gamma_2=1:-2$ である．

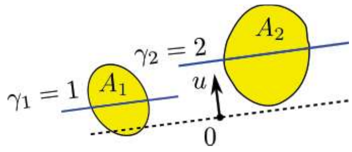

図 4: $\gamma_1=1,\ \gamma_2=2$

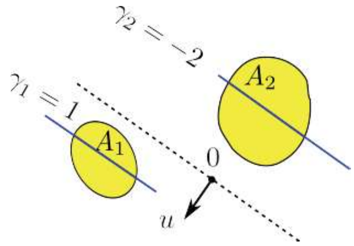

図 5: $\gamma_1=1,\ \gamma_2=-2$

集合 A_i が点対称な場合は，定理 4 の重み $\boldsymbol{u}$ を連立 1 次方程式を解いて求めることができる．

命題 1 A_i が非空なコンパクト集合で，点 p_i に関して対称ならば，$c_i(u)=\langle p_i,u\rangle$ である．また，$c_i(u)=0$ $(i=1,\ldots,n)$ を満たす非零ベクトル $u\in\mathbb{R}^n$ が存在しないことと，$p_1,\ldots,p_n$ が 1 次独立であることは同値である．さらに，$P=(p_1\ \ldots\ p_n)$ とおくと，(4.4) は次の連立 1 次方程式に帰着される．

$$P^Tu=u_{n+1}\gamma.$$

集合 A_i が点対称でない場合は，中心 p_i の代替として，geometrical center や center point（Edelsbrunner [2]）などを用いることが考えられる．これは今後の研究課題である．

6 ハムサンドウィッチ定理の弱い拡張

本節では 4 節の手法をハムサンドウィッチ定理に適用する．詳細は川崎 [7, 8].

$A_1,\ldots,A_n\subset\mathbb{R}^n$ を正のルベーグ測度をもつ集合，$f_i(x,u)$ を $(x,u)\in\mathbb{R}^n\times D^n$ 上の実数値連続関数で，$f_i(x,-u)=f_i(x,u)$ を満たすと仮定する．この設定で話を進めることもできるが，ここでは定数関数 $f_i(x,u)=1/\mu(A_i)$ で話をまとめることにする．

γ_i を任意の実定数として，$\boldsymbol{u}=(u,u_{n+1})\in S^n$ に対して，

$$\nu_i(\boldsymbol{u}):=\int_{A_i\cap H_{\boldsymbol{u}}^+}f_i(x,u)dx-\gamma_iu_{n+1}$$

で連続写像 $\nu:=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ を定義すると，Borsuk の対心定理から定理 5 が得られる．ただし，

$$\rho_i(\boldsymbol{u}):=\frac{\mu(A_i\cap H_{\boldsymbol{u}}^+)}{\mu(A_i)}.$$

定理 5 (2) はハムサンドイッチ定理のことであり，(1) と (3) はその拡張になる．

定理 5 (1) 任意の $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ に対し，次の等式を満たす $\boldsymbol{u} = (u, u_{n+1}) \in S^n$ が存在する．

$$\rho_i(\boldsymbol{u}) - \frac{1}{2} = \gamma_i u_{n+1}. \tag{6.1}$$

特に，どの γ_i も $-1/2$ と異なるときは，$-1 < u_{n+1} < 1$ が成立する．

(2) $A_1, \ldots, A_n$ の測度を同時に 2 等分する超平面が存在する．

(3) $A_1, \ldots, A_n$ の測度を同時に 2 等分する原点を通る超平面が存在しなければ，$-1/2$ と異なる任意の $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\rho_1(\boldsymbol{u}) - \frac{1}{2}\ : \cdots : \rho_n(\boldsymbol{u}) - \frac{1}{2} = \gamma_1\ : \cdots :\ \gamma_n \tag{6.2}$$

を満たす $\boldsymbol{u} \in S^n$ で，$0 < u_{n+1} < 1$ なるものが存在する．特に，$\gamma_1 = \cdots = \gamma_n = c$ $(0 < c \leq 1/2)$ をとると，

$$\frac{1}{2} < \rho_1(\boldsymbol{u}) = \cdots = \rho_n(\boldsymbol{u}) < \frac{1}{2} + c\ (\leq 1) \tag{6.3}$$

を満たす $\boldsymbol{u} \in S^n$ で，$0 < u_{n+1} < 1$ なるものが存在する．

注意 1 全ての γ_i を同じ値 $0 < c \leq 1/2$ としたとき，(6.1) から，

$$\rho_i(\boldsymbol{u}) = c\, u_{n+1} + \frac{1}{2}$$

となる．$0 < u_{n+1} < 1$ は存在のみが保証されていて，その値は不明なので，分割比 $\rho_i(\boldsymbol{u})$ の値も不明である．これが本節のタイトルを「弱い拡張」とした理由である．

参 考 文 献

[1] K. Borsuk, Drei Sätze üver die n-dimensionale euklidische Sphäre, *Fundamenta Mathematicae*, **20** (1933), 177–190.

[2] H. Edelsbrunner, *Algorithmis in Combinatorial Geometry*, Springer, Berlin, (1987)

[3] H. Kawasaki, An application of Borsuk-Ulam's theorem to parametric optimization, *Linear and Nonlinear Analysis*, **9**, No. 3 (2023) 245-252.

[4] 川崎英文，Borsuk-Ulam の定理の最適化への応用，数理解析研究所講究録 2274「非線形解析学と凸解析学の研究」，(2024) 1 月，146–152.

[5] H. Kawasaki, An application of Borsuk-Ulam's theorem to nonlinear programming, *J. of the Operations Research Society of Japan*, **68**, No. 1, (2025) 21-19. `https://doi.org/10.15807/jorsj.68.21`

[6] H. Kawasaki, An antipodal theorem for parametric optimization problems, *Bulletin of informatics and cybernetics*, **56**, No. 4 (2024) 1-8. `https://doi.org/10.5109/7178785`

[7] H. Kawasaki, Weak extension of the ham-sandwich theorem: some ratio not in half. submitted.

[8] 川崎英文，ハムサンドイッチ定理の拡張：等分割以外の可能性，数理解析研究所講究録 2304「不確実性環境下における数理的意思決定の進化」，(2025) 3 月, 22–25.

[9] L. Lovász, Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy, *Journal of Combinatorial Theorey, Ser. A*, **25** (1978), 319–324.

[10] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Springer, Berlin Heidelberg, (2008).