極大単調作用素のリゾルベントに関する強収束定理とその応用
(STRONG CONVERGENCE THEOREMS FOR RESOLVENTS OF A MAXIMAL MONOTONE OPERATOR AND APPLICATIONS)

茨木貴徳 (TAKANORI IBARAKI)
横浜国立大学 教育学部
(COLLEGE OF EDUCATION, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

1. はじめに

H を実ヒルベルト空間とし, $A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする. このとき

$$0 \in Au$$

を満たす元 u を求める問題を零点問題 (zero point problem) という. また, このような元 u を A の零点 (zero point) といい, A の零点全体の集合を $A^{-1}0$ で表す. 零点問題は凸最小化問題, 均衡問題, ミニマックス問題等の多くの非線形問題を一般化した問題でもある. 零点問題を解く代表的な手法に近接点法 (proximal point algorithm) がある: 初期点を $x_1 \in H$ とし

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1.1}$$

で点列を構成する. ただし, $\{r_n\} \subset]0, \infty[$ であり, J_{r_n} は次にように定義される: 任意の $x \in H$ と $r > 0$ に対して,

$$x \in x_r + rAx_r \tag{1.2}$$

を満たす $x_r \in D(A)$ が一意に存在する. このような点 x_r を $J_r x$ で表し, J_r は A のリゾルベント (resolvent) と呼ばれ, $J_r = (I + rA)^{-1}$ である. ただし I は恒等写像 (identity mapping) である. この近接点法は 1970 年に Martinet [23] により導入され, 1976 年に Rockafellar [26] により, ヒルベルト空間において $\inf_{n\to\infty} r_n > 0$ かつ $A^{-1}0 \neq \emptyset$ を仮定すれば (1.1) で定義された点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元へ弱収束することが示された. この研究以降, 近接点法の研究はヒルベルト空間やバナッハ空間でさまざまな形で進められてきた ([16, 17, 19, 22, 29] 等を参照). 近接点法において, 点列を構成する際に各ステップでリゾルベントを利用するが, リゾルベントは逆像を用いて定義されてるため一般的にその値を求めることは容易ではなく, 近接点法の部分問題として知られている. ([16, 17] 等を参照).

一方, 式 (1.2) を解くことは単調作用素の理論において重要な課題である ([4, 5, 7, 13, 30] 等を参照). 1973 年に Bruck [4] はヒルベルト空間において単調作用素の式 (1.2) の解への近似法を提案し, 強収束定理を得た.

定理 1.1 ([4]). *H をヒルベルト空間として, $A \subset H \times H$ を, 定義域 $D(A)$ が開集合である単調作用素とする. $z \in R(I + A)$ とする. このとき, $z_1 = (I + A)^{-1}z$ の近傍 $N \subset D(A)$ と正の実数 $\sigma_1 > 0$ が存在し, 任意の $\sigma \geq \sigma_1$ と任意の $x_1 \in N$, 任意の A のシングル・セレクション (single-selection) に対して, 点列 $\{x_n\}$ が*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{n + \sigma}(x_n + A_0 x_n - z) \quad (n \in \mathbb{N})$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 47H05, 47J25.
Key words and phrases. 極大単調作用素, (Q) 型リゾルベント, (R) 型リゾルベント, バナッハ空間.

で構成することができる．さらに, 点列 $\{x_n\}$ は z_1 へ強収束する．なお, z_1 は $r=1$ とした式 (1.2) の解である．すなわち, $z \in z_1 + Az_1$.

式 (1.2) の解への近似法の研究はバナッハ空間でも研究されてきた．単調作用素の概念をバナッハ空間で考える際に, 単調作用素 (monotone operator) と増大作用素 (accretive operator) の 2 つの概念に拡張されることが知られている．E をバナッハ空間とする．$T \subset E \times E$ が増大作用素であるとは, 任意の $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in T$ に対して, ある $j \in J(x_1 - x_2)$ が存在して

$$\langle y_1 - y_2, j \rangle \geq 0$$

を満たすことである．ただし, J は E の正規化双対写像 (第 2 節を参照) である．1990 年に Chidume [7] はバナッハ空間において一価の増大作用素に対する式 (1.2) の解への近似法を提案し, 強収束定理を得た.

定理 1.2 ([7])**.** *E を E^* が一様凸である実バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸部分集合とする. $T : C \to C$ を連続で一価の増大作用素とし, $z \in C$ とする. $\{\lambda_n\}$ を $]0, 1[$ の数列で*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \beta(\lambda_n) < \infty$$

を満たすとする. ただし, 関数 β は第 2 節の補助定理 2.1 で導かれる関数である. C の点列 $\{x_n\}$ を次にように定義する: $x_0 \in C$ として, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$x_{n+1} = (1 - \lambda_n)x_n + \lambda_n(z - Tx_n)$$

とする. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $r = 1$ とした式 (1.2) の解 z_1 へ強収束する. すなわち, $z = z_1 + Tz_1$ である.

バナッハ空間における式 (1.2) の研究において, 増大作用素に関する研究 (例えば, [6, 8–12, 20, 31] 等を参照) は多くあるが, 単調作用素に関する研究は少ない．バナッハ空間において零点問題の応用を考えた際, 凸最小化問題, 均衡問題, 変分不等式問題等などは, 増大作用素ではなく単調作用素である必要があり, 単調作用素に関する式 (1.2) の研究は重要な研究課題である.

本論文では, バナッハ空間における単調作用素に関する式 (1.2) の解への近似法を考察する．バナッハ空間において極大単調作用素のリゾルベントは複数の定義があるが, (Q) 型と (R) 型のリゾルベントを扱う．そしてそれぞれのリゾルベントの値を求める強収束定理を紹介する．さらに, その応用として均衡問題の解への近似法に用いられる 2 変数関数に関するリゾルベントの値への強収束定理を得る.

2. 準備

E を実バナッハ空間とし, E^* を E の共役空間 (dual space) とする．以降, 本論文ではバナッハ空間やヒルベルト空間はすべて実空間とする．E の元 x に対し, E^* の部分集合

$$Jx = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる写像 J を正規化双対写像 (normalized duality mapping) と呼ぶ．なお, ヒルベルト空間においては J は恒等写像となる.

E を滑らかなバナッハ空間とし, J を E の双対写像とする．このとき, E の元 x, y に対して,

$$V(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$$

で $E \times E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を定義する．この関数 V に関しては次のような性質が知られている ([1, 15, 18] を参照).

(1) E の元 x, y に対して, $(\|x\| - \|y\|)^2 \leq V(x, y) \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ である;
(2) E の元 x, y に対して, $V(x, y) + V(y, x) = 2\langle x - y, Jx - Jy \rangle$ である;
(3) E の元 x, y, z に対して, $V(x, y) = V(x, z) + V(z, y) + 2\langle x - z, Jz - Jy \rangle$ である;

(4) E が狭義凸ならば, E の元 x, y に対して $V(x,y)=0$ であるための必要十分条件は $x=y$ である.

E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C を E の閉凸部分集合とする. このとき, 任意の E の元 x に対し

$$V(x_0,x)=\min_{y\in C}V(y,x)$$

となる C の元 x_0 が一意に存在する. このような C の元 x_0 を $\Pi_C x$ で表し, Π_C を E から C の上への準距離射影 (generalized projection) と呼ぶ ([1] を参照). また, D を, JD が E^* の閉凸部分集合となる E の空でない部分集合とし, Π_{JD}^* を E^* から JD の上への準距離射影とする. E から D への写像 R_D を

$$R_D := J^{-1}\Pi_{JD}^* J$$

で定義するとき R_D をサニー準非拡大射影と呼ぶ ([15,19] を参照). 準距離射影とサニー準非拡大射影はヒルベルト空間で定義された距離射影のバナッハ空間での拡張概念である ([1,15,18] を参照). すなわち, これらの射影はヒルベルト空間では一致する.

なお, ヒルベルト空間における距離射影の定義は次の通りである. C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸部分とする. このとき, 任意の H の元 x に対し

$$\|x-x_0\|=\min_{y\in C}\|x-y\|$$

となる C の元 x_0 が一意に存在する. このような C の元 x_0 を $P_C x$ で表し, P_C を E から C の上への距離射影 (metric projection) と呼ぶ. 回帰的な狭義凸バナッハ空間でも距離射影はヒルベルト空間と同様に定義できる ([27] 等を参照.)

E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とする. 多価写像 $A\subset E\times E^*$ に対して, A の定義域 (domain) と A の値域 (range) は

$$D(A)=\{x\in E : Ax\neq\emptyset\},\ R(A)=\cup\{Ax : x\in D(A)\}$$

で定義される. 多価写像 $A\subset E\times E^*$ が単調作用素 (monotone operator) であるとは, 任意の $(x,x^*),(y,y^*)\in A$ に対して

$$\langle x-y, x^*-y^*\rangle\geq 0$$

がつねに成り立つことと定義する. 単調作用素 A が極大 (maximal) であるとは, A を真に含む単調作用素 $A_0\subset E\times E^*$ が存在しないときいう. すなわち, $A_0\subset E\times E^*$ が単調作用素で, かつ $A\subset A_0$ であるならば, $A=A_0$ となるときをいう.

$A\subset E\times E^*$, $B\subset E^*\times E$ を極大単調作用素とする. このとき, 任意の $r>0$ に対して

$$R(J+rA)=E^*,\quad R(I+rBJ)=E$$

となることが知られている ([5,15,25] を参照). また, $D(A)$ と $D(B)$ の閉包 $\overline{D(A)}$ と $\overline{D(B)}$ は凸集合となることも知られている ([24] を参照).

E の任意の元 x に対して集合

$$Q_r x=\{z\in E : Jx\in Jz+rAz\}$$

を考えると, $Q_r x$ は 1 点集合となる. すなわち, Q_r は E から $D(A)$ への一価写像となり, $Q_r=(J+rA)^{-1}J$ と表せる. この Q_r は (Q) 型リゾルベント (the resolvent of type (Q)) と呼ばれる. 同様にして, E の任意の元 x に対して集合

$$R_r x=\{z\in E : x\in z+rBJz\}$$

を考えると, $R_r x$ は 1 点集合となり, R_r は E から $D(BJ)$ への一価写像で, $R_r x=(I+rBJ)^{-1}$ と表せる ([15] を参照). この R_r は (R) 型リゾルベント (the resolvent of type (R)) と呼ばれる.

本節の最後に, 定理 1.2 に用いられていていた関数 β を紹介する. 一様凸バナッハ空間では次の補助定理が知られている ([21] を参照).

補助定理 2.1 ([21]). E を一様凸バナッハ空間とする. このとき, 連続な非減少関数 $\beta : [0,\infty[\to [0,\infty[$ が存在し, $\beta(0) = 0$, 任意の $c \geq 1$ に対して $\beta(ct) \leq c\beta(t)$, 任意の E の元 x, y に対して

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, Jx\rangle + \max\{\|x\|, 1\}\|y\|\beta(\|y\|)$$

を満たす.

3. 極大単調作用素のリゾルベントに関する近似法

本節では (Q) 型および (R) 型のリゾルベントに関する近似法を議論する. 2024 年に茨木 [14] は次の 2 つの強収束定理を得た.

定理 3.1 ([14]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $A \subset E \times E^*$ を $D(A)$ が閉で, $R(A)$ が有界な極大単調作用素とする. $\{\alpha_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ と $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ を満たす $[0,1]$ の数列とし, r を正の実数とする. $D(A)$ の点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: $z \in E$, $x_1 \in D(A)$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&y_n^* \in Ax_n,\\
&x_{n+1} = \Pi_{D(A)} J^{-1}\big((1-\alpha_n)Jx_n + \alpha_n(Jz - ry_n^*)\big)
\end{aligned}$$

とする. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $Q_r z$ に強収束する.

定理 3.2 ([14]). E を一様に滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, $B \subset E^* \times E$ を $D(B)$ が閉で, $R(B)$ が有界な極大単調作用素とする. $\{\alpha_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ と $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ を満たす $[0,1]$ の数列とし, r を正の実数とする. $D(BJ)$ の点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: $z \in E$, $x_1 \in D(BJ)$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&y_n \in BJx_n,\\
&x_{n+1} = R_{D(BJ)}\big((1-\alpha_n)x_n + \alpha(z - ry_n)\big)
\end{aligned}$$

とする. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $R_r z$ に弱収束する. さらに, E^* のノルムがフレッシェ微分可能であると仮定すると, 点列 $\{x_n\}$ は $R_r z$ に強収束する.

定理 3.1 と定理 3.2 において, 極大単作用素の定義域をそれぞれ $D(A) = E$, $D(B) = E^*$ とすれば次のような点列構成に非線形射影を用いない形の定理を得ることができる.

定理 3.3 ([14]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, $A \subset E \times E^*$ を $D(A) = E$ を満たし $R(A)$ が有界な極大単調作用素とする. $\{\alpha_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ と $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ を満たす $[0,1]$ の数列とし, r を正の実数とする. $D(A)$ の点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: $z \in E$, $x_1 \in D(A)$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&y_n^* \in Ax_n,\\
&x_{n+1} = J^{-1}\big((1-\alpha_n)Jx_n + \alpha_n(Jz - ry_n^*)\big)
\end{aligned}$$

とする. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $Q_r z$ に強収束する.

定理 3.4 ([14]). E を一様に滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, $B \subset E^* \times E$ を $D(B) = E^*$ を満たし $R(B)$ が有界な極大単調作用素とする. $\{\alpha_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ と $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ を満たす $[0,1]$ の数列とし, r を正の実数とする. $D(BJ)$ の点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: $z \in E$, $x_1 \in D(BJ)$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&y_n \in BJx_n,\\
&x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha(z - ry_n)
\end{aligned}$$

とする. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $R_r z$ に弱収束する. さらに, E^* のノルムがフレッシェ微分可能であると仮定すると, 点列 $\{x_n\}$ は $R_r z$ に強収束する.

さらに, 定理 3.1, 定理 3.2, 定理 3.3, 定理 3.4 をヒルベルト空間で考えると準距離射影とサニー準非拡大射影は距離射影となるため, これらの直接的な結果として次のような定理を得ることができる.

定理 3.5. H をヒルベルト空間とし, $A \subset H \times H$ を $D(A)$ が閉で, $R(A)$ が有界な極大単調作用素とする. $\{\alpha_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ と $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ を満たす $[0,1]$ の数列とし, r を正の実数とする. $D(A)$ の点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: $z \in E$, $x_1 \in D(A)$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} &y_n \in Ax_n, \\ &x_{n+1} = P_{D(A)}\big((1-\alpha_n)x_n + \alpha_n(z - ry_n)\big) \end{aligned}$$

とする. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $J_r z$ に強収束する.

定理 3.6. H をヒルベルト空間とし, $A \subset H \times H$ を $D(A) = H$ を満たし $R(A)$ が有界な極大単調作用素とする. $\{\alpha_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ と $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ を満たす $[0,1]$ の数列とし, r を正の実数とする. $D(A)$ の点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: $z \in E$, $x_1 \in D(A)$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} &y_n \in Ax_n, \\ &x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n(z - ry_n) \end{aligned}$$

とする. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $J_r z$ に強収束する.

4. 均衡問題におけるリゾルベントに対する近似法

本節では零点問題と深い関わりをもつ均衡問題に関して議論する. バナッハ空間で均衡問題を扱う場合には, 2 つの設定が知られており, それぞれに対して考察する.

E を滑らかなバナッハ空間とし, E^* をその共役空間とする. C を E の空でない閉部分集合とし, f を $C \times C$ 上で定義された実数値関数とする. このとき, 任意の C の元 y に対して

$$f(x_0, y) \geq 0$$

を満たす元 x_0 を求める問題を, f に関する均衡問題 (equilibrium problem) という. このとき, x_0 を均衡問題の解といい, 解の集合を $EP(f)$ で表す. ([2,3] を参照).

均衡問題の解への近似法を議論するために, f に次のような条件を仮定する ([2,3] を参照): E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とする.

(A1) 任意の C の元 x に対して, $f(x,x) = 0$ が成り立つ;
(A2) 任意の C の元 x, y に対し $f(x,y) + f(y,x) \leq 0$ が成り立つ;
(A3) 任意の C の元 x, y, z に対して,

$$\limsup_{t \downarrow 0} f(tz + (1-t)x, y) \leq f(x,y)$$

(A4) 任意の C の元 x に対して, $f(x, \cdot)$ は下半連続な凸関数である.

このとき, E の任意の元 x に対して

$$F_r x := \left\{ z \in C : f(z,y) + \frac{1}{r}\langle z - x, Jy - Jz \rangle \geq 0 \ (\forall y \in C) \right\}$$

および

$$A_f x := \begin{cases} \{x^* \in E^* : f(x,y) \geq \langle y - x, x^* \rangle, \ \forall y \in C\} & x \in C, \\ \emptyset & x \notin C, \end{cases}$$

を考える. f に (A1) から (A4) を仮定すると次が成り立つことが知られている ([2,3] を参照).

(1) $F_r x$ は 1 点集合である;
(2) $EP(f) = A_f^{-1} 0$ である;

(3) $A_f \subset E \times E^*$ は極大単調作用素となる;
(4) 任意の $r > 0$ に対して, $F_r = (J + rA_f)^{-1}J$ となる.

これらより f に関する均衡問題は, A_f の零点問題に帰着することができる. したがって, 定理 3.1 と定理 3.3 の直接的な結果をして, F_r の値を求める次の収束定理を得ることができる.

定理 4.1. *E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸部分集合とする. f を $(A1)$ から $(A4)$ を満たす $C \times C$ 上で定義された実数値関数とし, $D(A_f)$ が閉で, $R(A_f)$ が有界であるとする. $\{\alpha_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ と $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ を満たす $[0,1]$ の数列とし, r を正の実数とする. $D(A_f)$ の点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: $z \in E$, $x_1 \in D(A_f)$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して*

$$\begin{aligned} &y_n^* \in A_f x_n, \\ &x_{n+1} = \Pi_{D(A_f)} J^{-1}\big((1-\alpha_n)Jx_n + \alpha_n(Jz - ry_n^*)\big) \end{aligned}$$

とする. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $F_r z$ に強収束する.

定理 4.2. *E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸部分集合とする. f を $(A1)$ から $(A4)$ を満たす $C \times C$ 上で定義された実数値関数とし, $D(A_f) = E$ を満たし, $R(A_f)$ が有界であるとする. $\{\alpha_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ と $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ を満たす $[0,1]$ の数列とし, r を正の実数とする. $D(A_f)$ の点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: $z \in E$, $x_1 \in D(A_f)$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して*

$$\begin{aligned} &y_n^* \in A_f x_n, \\ &x_{n+1} = J^{-1}\big((1-\alpha_n)Jx_n + \alpha_n(Jz - ry_n^*)\big) \end{aligned}$$

とする. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $F_r z$ に強収束する.

次にバナッハ空間におけるもう一つの均衡問題を議論する: E を滑らかなバナッハ空間とし, E^* をその共役空間とする. C を JC が閉凸集合となるような空でない E の閉部分集合とし, f^* を $JC \times JC$ 上で定義された実数値関数とする. このとき, 任意の C の元 y に対して

$$f^*(Jx_0, Jy) \geq 0$$

を満たす元 x_0 を求める問題を, f^* に関する均衡問題 (equilibrium problem) という. このとき, x_0 をこの問題の解といい, 解の集合を $EP(f^*)$ で表す (詳細は [3,28] を参照).

均衡問題の解への近似法を議論するために, f^* に次のような条件を仮定する ([3,28] を参照): E を回帰的な滑らかな狭義凸バナッハ空間とする.

(B1) 任意の JC の元 x^* に対して, $f^*(x^*, x^*) = 0$ が成り立つ;
(B2) 任意の JC の元 x^*, y^* に対し $f^*(x^*, y^*) + f(y^*, x^*) \leq 0$ が成り立つ;
(B3) 任意の JC の元 x^*, y^*, z^* に対して,

$$\limsup_{t \downarrow 0} f^*(tz^* + (1-t)x^*, y^*) \leq f^*(x^*, y^*);$$

(B4) 任意の JC の元 x^* に対して, $f(x^*, \cdot)$ は下半連続な凸関数である.

このとき, E の任意の元 x に対して

$$F_f^* x := \left\{ z \in C : f^*(Jz, Jy) + \frac{1}{r}\langle z - x, Jy - Jz \rangle \geq 0 \ (\forall y \in C) \right\}$$

および, E^* の任意の元 x^* に対して

$$B_{f^*} x^* := \begin{cases} \{x \in E : f^*(x^*, y^*) \geq \langle x, y^* - x^* \rangle, \ \forall y^* \in JC\} & x^* \in JC, \\ \emptyset & x^* \notin JC, \end{cases}$$

を考える. f に (B1) から (B4) を仮定すると次が成り立つことが知られている ([3,28] を参照).

(1) $F_r^* x$ は 1 点集合である;
(2) $EP(f^*) = (B_{f^*} J)^{-1} 0$ である;
(3) $B_{f^*} \subset E^* \times E$ は極大単調作用素となる;
(4) 任意の $r > 0$ に対して, $F_r^* = (I + rB_{f^*} J)^{-1}$ となる.

これらより f^* に関する均衡問題は, B_{f^*} の零点問題に帰着することができる. したがって, 定理 3.2 と定理 3.4 の直接的な結果をして, F_r^* の値を求める次の収束定理を得ることができる.

定理 4.3. *E を一様に滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C を, JC が閉凸集合となるような E の空でない部分集合とする. f^* を $(B1)$ から $(B4)$ を満たす $JC \times JC$ 上で定義された実数値関数とし, $D(B_{f^*})$ が閉で,$R(B_{f^*})$ が有界であるとする. $\{\alpha_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ と $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ を満たす $[0,1]$ の数列とし, r を正の実数とする. $D(B_{f^*} J)$ の点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: $z \in E$, $x_1 \in D(B_{f^*} J)$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して*

$$y_n \in B_f^* J x_n,$$
$$x_{n+1} = R_{D(B_f^* J)}\big((1-\alpha_n)x_n + \alpha_n(z - ry_n)\big)$$

とする. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $F_r^* z$ に弱収束する. さらに, E^* のノルムがフレッシェ微分可能であると仮定すると, 点列 $\{x_n\}$ は $F_r^* z$ に強収束する.

定理 4.4. *E を一様に滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C を, JC が閉凸集合となるような E の空でない部分集合とする. f^* を $(B1)$ から $(B4)$ を満たす $JC \times JC$ 上で定義された実数値関数とし, $D(B_{f^*}) = E^*$ を満たし, $R(B_{f^*})$ が有界であるとする. $\{\alpha_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ と $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ を満たす $[0,1]$ の数列とし, r を正の実数とする. $D(B_{f^*} J)$ の点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する: $z \in E$, $x_1 \in D(B_{f^*} J)$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して*

$$y_n \in B_f^* J x_n,$$
$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n(z - ry_n)$$

とする. このとき, 点列 $\{x_n\}$ は $F_r^* z$ に弱収束する. さらに, E^* のノルムがフレッシェ微分可能であると仮定すると, 点列 $\{x_n\}$ は $F_r^* z$ に強収束する.

謝辞. 本研究は JSPS 科研費 23H00815, 23K25512, 24K06807 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.
[2] K. Aoyama, Y. Kimura and W. Takahashi, *Maximal monotone operators and maximal monotone functions for equilibrium problems*, J. Convex Anal., **15** (2008), 395–409.
[3] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student, **63** (1994), 123–145.
[4] R. E. Bruck, *The iterative solution of the equation $y \in x + Tx$ for a monotone operator T in Hilbert space*, Bull. Amer. Math. Soc., **79** (1973), 1258–1262.
[5] F. E. Browder, *Nonlinear maximal monotone operators in Banach space*, Math. Ann., **175** (1968), 89–113.
[6] C. E. Chidume, *The iterative solution of the equation $f \in x + Tx$ for a monotone operator T in L_p spaces*, J. Math. Anal. Appl., **116** (1986), 531–537.
[7] C. E. Chidume, *Iterative solution of nonlinear equations of the monotone type in Banach spaces*, Bull. Austral. Math. Soc., **42** (1990), 21–31.
[8] C. E. Chidume, *Iterative solutions of nonlinear equations in smooth Banach spaces*, Nonlinear Anal., **26** (1996), 1823–1834.
[9] C. E. Chidume and C. Moore, *The solution by iteration of nonlinear equations in uniformly smooth Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **215** (1997), 132–146.
[10] C. E. Chidume and M. O. Osilike, *Approximation methods for nonlinear operator equations of the m-accretive type*, J. Math. Anal. Appl., **189** (1995), 225–239.

[11] C. E. Chidume and M. O. Osilike, *Iterative solutions of nonlinear accretive operator equations in arbitrary Banach spaces*, Nonlinear Anal., **36** (1999), 863–872.
[12] X. P. Ding, *Iterative process with errors of nonlinear equations involving m-accretive operators*, J. Math. Anal. Appl., **209** (1997), 191–201.
[13] W. G. Dotson, *An iterative process for nonlinear monotonic nonexpansive operators in Hilbert space*, Math. Camp., **32** (1978), 223–225.
[14] T. Ibaraki, *Approximation of the value of the resolvent of a maximal monotone operator in a Banach space*, J. Convex Anal., **31** (2024), 131–138.
[15] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory, **149** (2007), 1–14.
[16] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory, **106** (2000), 226–240.
[17] S. Kamimura and W. Takahashi, *Iterative schemes for approximating solutions of accretive operators in Banach spaces*, Sci. Math., **3** (2000), 107–115.
[18] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim., **13** (2002), 938–945.
[19] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **8** (2007), 197–209.
[20] L. Liu, *Ishikawa-type and Mann-type iterative processes with errors for constructing solutions of nonlinear equations involving m-accretive operators in Banach spaces*, Nonlinear Anal., **34** (1998), 307–317.
[21] S. Reich, *An iterative procedure for constructing zeros of accretive sets in Banach spaces*, Nonlinear Anal., **2** (1978), 85–92.
[22] S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach space*, J. Math. Anal. Appl., **75** (1980), 287–292.
[23] B. Martinet, *Régularsation d'inéquations variationnells par approximations successives* (in French), Rev. Francaise Informat. Recherche Opérationnelles, **4** (1970), 154–158.
[24] R. T. Rockafellar, *On the virtual convexity of the domain and range of a nonlinear maximal monotone operator*, Math. Ann., **185** (1970), 81?90.
[25] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc., **149** (1970), 75–88.
[26] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and proximal point algorithm*, SIAM J. Control. Optim., **14** (1976), 877–898.
[27] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis - Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.
[28] W. Takahashi and K. Zembayashi, *A strong convergence theorem for the equilibrium problem with a bifunction defined on the dual space of a Banach space*, in Fixed Point theory and its Applications, Yokohama Publishers, 2008, 83–93.
[29] H. K. Xu, *Iterative algorithms for nonlinear operator*, J. London Math. Soc., **66** (2002), 240–256.
[30] E. H. Zarantonello, *Solving functional equations by contractive averaging*, Mathematical Research Center Technical Report No. 160, Madison, Wis., June 1960.
[31] S. Zhang, *Mann and Ishikawa iterative approximation of solutions for m-accretive operator equations*, Appl. Math. Mech., Engl. Ed., **20** (1999), 1310–1318.