区間ベクトル空間における内積
Inner products on interval vector spaces

島根大学大学院自然科学研究科 森智也 (Tomoya Mori)
Graduate School of Natural Science and Technology, Shimane University
島根大学総合理工学部 黒岩大史 (Daishi Kuroiwa)*
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University

概要

先行研究として、[3] では凸集合の族をノルム空間に埋め込む手法が提案されており、[4] では区間の族の次元と基底が示されている。しかしながら、凸集合や区間の族を内積空間に埋め込む研究は過去されていない。本論文では [2] において示した区間の族をベクトル空間に埋め込み、その上に内積を定義する手法を紹介する。また、これまでの区間解析と同様に、内積で表現される値の取りうる範囲について考察する。

1 $\mathbb{R}^n$ 上の区間

任意の $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T, b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\mathbb{R}^n$ 上の二項関係を次のように定義する。

$$a \leqq b \overset{\text{def}}{\iff} a_i \leqq b_i, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

また、区間 $[a, b]$ を次のように定義する。

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leqq x \leqq b\} = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$

そして、$\mathcal{M}$ を $\mathbb{R}^n$ 上のすべての区間の族とし, 次のように定義する。

$$\mathcal{M} = \{[a, b] \mid a \leqq b\}$$

$\mathcal{M}$ 上で和と非負スカラー積を次のように定義する。

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d], \quad t[a, b] = [ta, tb]\,(t \geqq 0)$$

2 $\mathbb{R}^n$ の区間が埋め込まれたヒルベルト空間

この節では、まず [3] で提案された手法を用いて、区間の族をベクトル空間に埋め込む手法を紹介する。さらに、$\mathbb{R}^{2n}$ という実数ベクトル空間上における内積の性質について詳細に検討を行い、その

* kuroiwa@riko.shimane-u.ac.jp

性質を活用して埋め込んだ集合上に新たな内積を定義する。

2.1　$\mathbb{R}^n$ の区間が埋め込まれたベクトル空間

$\mathcal{M}$ 上に $\sim$ で表記される同値関係を次のように定義する。

$$([a,b]\,,[c,d]) \sim ([a',b']\,,[c',d']) \iff \begin{cases} a-c=a'-c' \\ b-d=b'-d', \end{cases}$$

そして、$([a,b]\,,[c,d])$ が属する同値類を次のように定義する。

$$[a,b]\ominus[c,d] := \{([a',b']\,,[c',d'])\in\mathcal{M}^2 \mid ([a,b]\,,[c,d]) \sim ([a',b']\,,[c',d'])\}$$

この表記を用いて $\sim$ による $\mathcal{M}^2$ の商集合 $\mathcal{N}$ を次のように定義する。

$$\mathcal{N}=\mathcal{M}^2/\!\sim\,=\{[a,b]\ominus[c,d]\mid[a,b]\,,[c,d]\in M\}$$

$\mathcal{N}$ 上の和、スカラー積、次のように定義する。

$$[a,b]\ominus[c,d]+[a',b']\ominus[c',d'] := [a+a',b+b']\ominus[c+c',d+d']$$
$$\lambda([a,b]\ominus[c,d]) := \begin{cases} [\lambda a,\lambda b]\ominus[\lambda c,\lambda d] & \lambda\geqq 0, \\ [-\lambda c,-\lambda d]\ominus[-\lambda a,-\lambda b] & \lambda<0. \end{cases}$$

2.2　$\mathbb{R}^{2n}$ 上の内積

ここで $\mathbb{R}^{2n}$ 上の内積について観察する。

S,T,U,V を $n\times n$ 正方行列とし、$2n\times 2n$ 正則行列 P を $P=\begin{pmatrix} S & T \\ U & V\end{pmatrix}$ とする。

$a,b,a',b'\in\mathbb{R}^n$ に対して、$\langle\cdot,\cdot\rangle_P:\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ を次のように定義する。

$$\left\langle\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a' \\ b'\end{pmatrix}\right\rangle_P := \langle Sa+Tb,Sa'+Tb'\rangle+\langle Ua+Vb,Ua'+Vb'\rangle$$

ただし、右辺の $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^n$ 上の内積を表している。この $\mathbb{R}^{2n}$ 上の関数に関して以下の結果が得られた [2]。

命題 2.1. [2, Proposition 3.1] 関数 $\langle\cdot,\cdot\rangle_P$ は $\mathbb{R}^{2n}$ 上の内積である

命題 2.2. [2, Proposition 3.2] $\mathbb{R}^{2n}$ 上の任意の内積は $\mathbb{R}$ 上のある $2n\times 2n$ 正則行列 P の形で表現できる。

例 2.3. $S=V=I$, $T=U=O$ のとき, $\left\langle\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a' \\ b'\end{pmatrix}\right\rangle_P=\langle a,a'\rangle+\langle b,b'\rangle$ は $\mathbb{R}^{2n}$ 上の標準内積である。

また $S=V=I$, $U=-I$, $T=O$ のとき, $\left\langle\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix},\begin{pmatrix} a' \\ b'\end{pmatrix}\right\rangle_P=\langle a,a'\rangle+\langle b-a,b'-a'\rangle$ は $\mathbb{R}^{2n}$ 上の標準内積とは別の内積である。

2.3　$\mathcal{N}$ 上の内積と次元

先ほど観察した $\mathbb{R}^{2n}$ 上の内積を用いて $\mathcal{N}$ 上の内積を定義する。

$\left\langle \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \right\rangle$ を $\mathbb{R}^{2n}$ 上の内積とする。$[a,b] \ominus [c,d]\,, [a',b'] \ominus [c',d'] \in \mathcal{N}$ に対して、$\mathcal{N}^2$ から $\mathbb{R}$ への関数を

$$\langle [a,b] \ominus [c,d]\,, [a',b'] \ominus [c',d'] \rangle := \left\langle \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a'-c' \\ b'-d' \end{pmatrix} \right\rangle,$$

と定義する。以下の定理が論文 [2] で得られた主結果である。

定理 2.4. [2, Theorem 3.5] 上で定義した関数は well-defined であり、$\mathcal{N}$ 上の内積となる

定理 2.5. [2, Theorem 3.6] $\mathcal{N}$ の次元は $2n$ であり、$\mathcal{N}$ はヒルベルト空間である

3　応用例

今回の手法を区間線形計画問題に応用する。次の区間線形計画問題を考える。

$$(\mathrm{P}_0) \begin{cases} \text{Maximize} & \langle c, x \rangle \\ \text{subject to} & \langle a_i, x \rangle \leqq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ & x = [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathcal{M}, \end{cases}$$

ただし $c = [\underline{c}, \overline{c}] \in \mathcal{M}$, $a_i = [\underline{a}_i, \overline{a}_i] \in \mathcal{M}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $b \in \mathbb{R}^m$ である。数理計画問題の係数に誤差が含まれるのは自然なことであり、区間はその誤差の動く範囲を表すことができる。ここで, 上記の関数 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}^2 \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^{2n}$ 上の任意の内積 $\left\langle \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \right\rangle$ によって次のように与える。

$$\langle c, x \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \underline{c} \\ \overline{c} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \overline{x} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

問題 (P_0) の代わりにヒルベルト空間 $\mathcal{N}$ 上の線形計画問題

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \text{Maximize} & \langle c \ominus 0, x \ominus x' \rangle \\ \text{subject to} & \langle a_i \ominus 0, x \ominus x' \rangle \leqq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ & x \ominus x' \in \mathcal{N}, \end{cases}$$

を解くことを考える。$\langle c \ominus 0, x \ominus x' \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \underline{c} \\ \overline{c} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{x} - \underline{x}' \\ \overline{x} - \overline{x}' \end{pmatrix} \right\rangle$ であることと $x' = [0, 0]$ のとき $\langle c, x \rangle$ と等しくなることから問題 (P) は問題 (P_0) の一種の緩和問題となっている。したがって問題 (P_0) の最適値 $\mathrm{val}(\mathrm{P}_0)$ は問題 (P) の最適値 val(P) 以下となる。また, $x \ominus x'$ が問題 (P) の解であり $\underline{x} - \underline{x}' \leqq \overline{x} - \overline{x}'$ であるとき $[\underline{x} - \underline{x}', \overline{x} - \overline{x}']$ は問題 (P_0) の解である。

次に問題 (P) を双対性によって特徴づける。問題 (P) の制約は、有限個のアフィン関数の不等式で表現されるため、Farkas Minkowski という制約想定をみたす（詳しくは [1] を参照されたい)。した

がって、問題 (P) の最適値は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{val(P)} &= \sup\{\langle c \ominus 0, x \ominus x' \rangle \mid \langle a_i \ominus 0, x \ominus x' \rangle \leqq b_i,\ x \ominus x' \in \mathcal{N}\} \\
&= -\inf\{\langle -c \ominus 0, x \ominus x' \rangle \mid \langle a_i \ominus 0, x \ominus x' \rangle \leqq b_i,\ x \ominus x' \in \mathcal{N}\} \\
&= -\max_{y_i \geqq 0} \inf_{x \ominus x' \in \mathcal{N}} \left\{ \langle -c \ominus 0, x \ominus x' \rangle + \sum_{i=1}^{m} y_i (\langle a_i \ominus 0, x \ominus x' \rangle - b_i) \right\} \\
&= -\max_{y_i \geqq 0} \inf_{x \ominus x' \in \mathcal{N}} \left\{ \left\langle \left(-c + \sum_{i=1}^{m} y_i a_i \right) \ominus 0, x \ominus x' \right\rangle - \sum_{i=1}^{m} y_i b_i \right\}.
\end{aligned}$$

任意の $y_i \geqq 0$ に対して $-c + \sum_{i=1}^{m} y_i a_i \neq 0$ のとき、$\mathrm{val(P)} = +\infty$ となる。そうでなければ、

$$\mathrm{val(P)} = -\max_{\substack{y_i \geqq 0 \\ \sum_{i=1}^{m} y_i a_i = c}} -\sum_{i=1}^{m} y_i b_i = \min_{\substack{y_i \geqq 0 \\ \sum_{i=1}^{m} y_i a_i = c}} \sum_{i=1}^{m} y_i b_i = \mathrm{val(D)}.$$

ただし val(D) は次の線形計画問題の最適値である。

$$(\mathrm{D}) \begin{cases} \text{Minimize} & \langle b, y \rangle \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^{m} y_i a_i = c \\ & y_i \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

例 3.1. 次の区間線形計画問題 (P_0) を考える。

$$(\mathrm{P}_0) \begin{cases} \text{Maximize} & \langle [100, 160], [\underline{x}, \overline{x}] \rangle \\ \text{subject to} & \langle [20, 25], [\underline{x}, \overline{x}] \rangle \leqq 75, \\ & \langle [3, 8], [\underline{x}, \overline{x}] \rangle \leqq 19, \\ & [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathcal{M}, \end{cases}$$

ただし, 今回の問題では例 2.3 で述べた $\mathbb{R}^{2n}$ 上の標準内積を用いている。この問題の解は $[\underline{x}, \overline{x}] = [\frac{25}{17}, \frac{31}{17}]$ のとき、$\mathrm{val}(\mathrm{P}_0) = \frac{7460}{17}$ をとる。この問題 (P_0) に対して以下の緩和問題 (P) を考える。

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \text{Maximize} & \langle [100, 160] \ominus [0, 0], [\underline{x}, \overline{x}] \ominus [\underline{x}', \overline{x}'] \rangle \\ \text{subject to} & \langle [20, 25] \ominus [0, 0], [\underline{x}, \overline{x}] \ominus [\underline{x}', \overline{x}'] \rangle \leqq 75 \\ & \langle [3, 8] \ominus [0, 0], [\underline{x}, \overline{x}] \ominus [\underline{x}', \overline{x}'] \rangle \leqq 19 \\ & [\underline{x}, \overline{x}] \ominus [\underline{x}', \overline{x}'] \in \mathcal{N}, \end{cases}$$

この問題の解は $[\underline{x} - \underline{x}', \overline{x} - \overline{x}'] = [\frac{25}{17}, \frac{31}{17}]$ であり $\underline{x} - \underline{x}' \leqq \overline{x} - \overline{x}'$ をみたすため、問題 (P_0) の解である。また問題 (P) の双対問題 (D) は次のようになる。

$$(\mathrm{D}) \begin{cases} \text{Minimize} & \left\langle \begin{pmatrix} 75 \\ 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \text{subject to} & y_1 [20, 25] + y_2 [3, 8] = [100, 160] \\ & y_i \geqq 0, \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

この問題の解は $(y_1, y_2) = (\frac{64}{17}, \frac{140}{17})$ であり、最適値 val(D) は val(P) と等しいことが確かめられる。

4　従来の区間解析との関連

最後に、今回定義した区間上の内積と従来の区間解析と関連性について考察する。

例 4.1. 関数 $f(x) = x^2 - 2x$ の値域を区間 $[0.9, 1.1]$ で評価する問題を考える。従来の区間演算の定義に従って計算すると、

$$[0.9, 1.1]^2 - 2 \times [0.9, 1.1] = [0.81, 1.21] - [1.8, 2.2] = [-1.39, -0.59]$$

のようになるが、真の像は、

$$\{f(x) \mid x \in [0.9, 1.1]\} = [-1, -0.99]$$

であり計算された区間は真の幅を含むものの区間幅が極端に広くなっている。ここでの区間演算の方法については [5] などを参照されたい。上の関数は $x^2 - 2x = x(x-2)$ と変形して評価すれば $[-1.21, -0.81]$ といくらか改善され、 $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ とすれば真の像が得られる。この例のように区間演算においては数学的に同値な式でも計算の順序で大きく結果が異なる場合があり、注意が必要である。

同様の問題を今回定義した演算方法で計算を行う。今回定義した内積を用いると $x^2 - 2x = (x-2)(x-0)$ であることと、$2 = [2, 2], 0 = [0, 0]$ であることから、$x^2 - 2x$ は $\langle x \ominus [2, 2], x \ominus [0, 0] \rangle$ と表現することができる。この式を用いて $x = [0.9, 1.1]$ のときの値域を評価する。

$$\langle [0.9, 1.1] \ominus [2, 2]\,, [0.9, 1.1] \ominus [0, 0] \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0.9 - 2 \\ 1.1 - 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1.1 \\ -0.9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ここで、命題 2.1 で観察した $\mathbb{R}^{2n}$ 上の内積

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \right\rangle := \langle Sa + Tb, Sa' + Tb' \rangle + \langle Ua + Vb, Ua' + Vb' \rangle \tag{$*$}$$

について考える。今回は $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.1 \\ -0.9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.1 \end{pmatrix}$ として内積の値を考えるため、$a = -b', b = -a'$ として $(*)$ を変形する。また、$a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ のため、$n \times n$ 正方行列 S, T, U, V は実数となる。そのため、$s, t, u, v \in \mathbb{R}$ を用いて $S = s, T = t, U = u, V = v$ と表記する。このとき、

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix} \right\rangle &= \langle sa + tb, -sb - ta \rangle + \langle ua + vb, -ub - va \rangle \\
&= ab(-s^2 - u^2 - t^2 - v^2) + (st + uv)(-a^2 - b^2) \\
&= ab\{(s+t)^2 + (u+v)^2 - 2st - 2uv\} + (st + uv)(-a^2 - b^2) \qquad (**)
\end{aligned}$$

となる。この値の動く範囲を考察したいのだが、s, t, u, v は、$[a, b]$, $[a', b']$ という区間が一元の場合、すなわち、$a = b, a' = b'$ のときに制限する必要がある。このとき、

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ a' \end{pmatrix} \right\rangle &= \langle sa + ta, sa' + ta' \rangle + \langle ua + va, ua' + va' \rangle \\
&= aa'(s^2 + u^2 + t^2 + v^2 + 2st + 2uv) \\
&= aa'\{(s+t)^2 + (u+v)^2\}
\end{aligned}$$

従って、$(s+t)^2+(u+v)^2=1$ のときに、一元からなる区間の内積は、$\mathbb{R}$ 上の標準内積と一致する。よってこれ以降 $(s+t)^2+(u+v)^2=1$ を仮定し、$(**)$ に代入すると、

$$-ab+(st+uv)(2ab-a^2-b^2)=-ab-(st+uv)(a-b)^2$$

となる。ここでは $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1.1 \\ -0.9 \end{pmatrix}$ であるため、$ab=0.99, (a-b)^2=0.04$ である。また、$st+uv$ の範囲について、以下が得られる。

$$\{st+uv \mid sv-tu\neq 0, (s+t)^2+(u+v)^2=1\}\in(-\infty,\frac{1}{4})$$

実際、$(s+t)^2+(u+v)^2=1$ より $s+t=\cos\theta, u+v=\sin\theta(0\leqq\theta<2\pi)$ と置くことができ、

$$\begin{aligned} st+uv &= s(\cos\theta-s)+u(\sin\theta-u) \\ &= -(s-\frac{\cos\theta}{2})^2-(u-\frac{\sin\theta}{2})^2+\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{4} \\ &\leqq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

が導かれる。しかし、$st+uv=\frac{1}{4}$ を満たす s,t,u,v は存在しない。もし存在するならば、$s=\frac{\cos\theta}{2}$ かつ $u=\frac{\sin\theta}{2}$ であるため、$s=t$ かつ $u=v$ が示されるが、これは $sv-tu\neq 0$ を満たさない。

ここで、行列 $\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$ のフロベニウスノルムが 1 以下、すなわち $s^2+t^2+u^2+v^2\leqq 1$ という比較的自然な仮定を加えることで、$(s+t)^2+(u+v)^2=1$ より $st+uv\geqq 0$ が得られる。また、この不等式において等号が必要であることは $s=v=\frac{1}{\sqrt{2}}, t=u=0$ のとき、$s^2+t^2+u^2+v^2=1$ かつ $st+uv=0$ を満たすことから判る。以上のことから

$$\{st+uv \mid sv-tu\neq 0, (s+t)^2+(u+v)^2=1, s^2+t^2+u^2+v^2\leqq 1\}\in[0,\frac{1}{4})$$

となる。これより、$\left\langle \begin{pmatrix} -1.1 \\ -0.9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.1 \end{pmatrix} \right\rangle \in(-1,-0.99]$ となり従来の区間解析の手法で求められる真の像に近い範囲が求められる。このことより、本論文で定義した区間上の内積と従来の区間解析の演算方法には深い関わりがあると考えられる。また、従来の区間演算においては数学的に同値な式でも計算の順序で大きく結果が異なる場合があったが、区間上の内積を用いるとどのような表現をした場合にも同じ値が出ると予想できる。実際、

$$\begin{aligned} \langle[\underline{x},\overline{x}]\ominus[2,2],[\underline{x},\overline{x}]\ominus[0,0]\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \underline{x}-2 \\ \overline{x}-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \overline{x} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \underline{x}-1 \\ \overline{x}-1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{x}-1 \\ \overline{x}-1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \underline{x}-1 \\ \overline{x}-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{x}-1 \\ \overline{x}-1 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle[\underline{x},\overline{x}]\ominus[1,1],[\underline{x},\overline{x}]\ominus[1,1]\rangle-1 \end{aligned}$$

である。最後の内積は元の関数の $(x-1)^2-1$ に対応している。

また一般に、関数 $f(x) = x^2 - bx\,(b > 0)$ の値域を区間 $[c-d, c+d]$ で評価する問題について考察する。$x^2 - bx$ を今回定義した内積を用いて表現すると $\langle x \ominus [b,b], x \ominus [0,0] \rangle$ となる。ここで、$sv - tu \neq 0, (s+t)^2 + (u+v)^2 = 1, s^2 + t^2 + u^2 + v^2 \leqq 1$ の条件の下、先ほどの内積を変形する。$(s+t)^2 + (u+v)^2 = 1$ より $s + t = \cos\theta, u + v = \sin\theta (0 \leqq \theta < 2\pi)$ であり、これを用いて $s^2 + t^2 + u^2 + v^2 \leqq 1$ を変形すると $(s - \frac{1}{2}\cos\theta)^2 + (u - \frac{1}{2}\sin\theta)^2 \leqq \frac{1}{4}$ を得る。そのため、$r \in [0,1]$, $\psi \in [0, 2\pi)$ を用いて $s - \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{r}{2}\cos\psi$, $u - \frac{1}{2}\sin\theta = \frac{r}{2}\sin\psi$ と表す。これらを用いて $f(x) = \langle x \ominus [b,b], x \ominus [0,0] \rangle$ を変形すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle x \ominus [b,b], x \ominus [0,0] \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \underline{x} - b \\ \overline{x} - b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \overline{x} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4}(\underline{x} + \overline{x})^2 - \frac{b}{2}(\underline{x} + \overline{x}) + \frac{r^2}{4}(\underline{x} - \overline{x})^2 + \frac{r}{2}(\underline{x} - \overline{x})(\underline{x} + \overline{x} - b)\cos(\theta - \psi) \end{aligned}$$

となる。先ほどの例は、$\underline{x} + \overline{x} - b = 0.9 + 1.1 - 2 = 0$ となる特殊な例である。$\underline{x} + \overline{x} - b \neq 0$ の場合は $\frac{r^2}{4}(\underline{x} - \overline{x})^2 + \frac{r}{2}(\underline{x} - \overline{x})(\underline{x} + \overline{x} - b)\cos(\theta - \psi)$ の最大・最小を考察することにより $\langle x \ominus [b,b], x \ominus [0,0] \rangle$ の範囲を評価することができる。

参考文献

[1] Goberna, M. A.; Jeyakumar, V.; López, M. A.; Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities. Nonlinear Anal. 68 (2008), no.5, 1184–1194.

[2] Kuroiwa, D.; Mori, T.; Inner products on intervals in $\mathbb{R}^n$. Thai Journal of Mathematics. Vol.22, no.3(2024), 509-518.

[3] Rådström, H.; An embedding theorem for spaces of convex sets. Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 165–169.

[4] Zhu, M.; Li, D.; Bases and dimension of interval vector space. Comput. Appl. Math. 40 (2021), no.1, Paper No. 6, 18 pp.

[5] 柏木雅英.; 区間解析. 知能と情報 (日本知能情報ファジィ学会誌)(2003). Vol.15, no.2, pp147-154