私には興味深いが解決できていないいくつかの疑問について と プレゼンテーションの一形式

ON SOME INTERESTING QUESTIONS THAT I HAVE NOT BEEN ABLE TO RESOLVE, AND A FORM OF PRESENTATION

竹内 幸雄 (高橋非線形解析研究所)
YUKIO TAKEUCHI (TAKAHASHI INSTITUTE FOR NONLINEAR ANALYSIS)

プレゼンテーションの一形式

数学者の多くは, 英語での発表を苦にしないように思われます. しかし, 私の様なアマチュアまで含めれば, 国際会議の英語の発表などでは, 考えていることを十分には伝えられない層が 一定数は存在すると思われます. また, 日本語であっても, 何らかの事情で, 聴衆の前での発表が困難な人も存在するでしょう. この様な状況を鑑みて, 私は, 2023 年度から, 読み上げソフトを使った動画での講演を試みています. 本節では, この形式でのプレゼンテーションの概要を紹介し, 問題点にも簡単に触れます.

PC のスペック. 参考のために, 私の PC の仕様を紹介します：
CPU ライゼン 5600u, メモリー 16G, ストレージ SSD 516G, 外部ストレージ SSD 1T.

読み上げソフトについて. 読み上げソフトは, 動画の作成に必須ではありませんが, 例えば, 研究室紹介やオープンキャンパスの資料の作成にも役立つ, 有用なアプリです. 日本語の読み上げソフトには, 商業利用まで可能で無償の優秀なソフトが存在します. ここでは, 私が使用している "VOICEVOX" を紹介します. 例えば, 次の 20 分弱の YouTube 動画を見れば "VOICEVOX" について必要なことは総てわかります:

https://www.youtube.com/watch?v=jPWmr58ltWI

さほど違和感のない日本語の音声が出力されます. 簡単なアクセントの調整だけで, 少しおかしく感じる部分があっても, ほぼ違和感のない音声に修正できます. 話者の数は多く, 好みの音声を選べます; 私は四国めたんさんの声を使っています.

Windows で使用する場合, 出力する音声ファイルの形式は, Windows 標準の WAV です. WAV の方が, 可聴域外の音を無視して圧縮する MP3 より, 音質が良いといわれています. 人は耳だけで音を聴いているのではないということでしょうか. しかし, 汎用的な MP3 だけに対応し, 他の形式は受け付けない動画編集ソフトもあります.

英語の読み上げソフトにも優秀なものはたくさんありますが, 読み上げた音声をMP3で出力するソフトはほとんどありません; あっても, 有償であったり何らかの制限があります. この様な中で, “読上げちゃん” という無償のソフトは, Windowsなどの読み上げ機能をそのまま利用し, 読み上げた音声をMP3で出力します. このため, DeepLなどの優れた翻訳ソフトと併用すれば, 原理的には, 多様な言語での講演を準備できます. 強いて欠点を挙げれば, 話者の数が少なく, 英語の女性話者はZiraさんだけです.
“読上げちゃん” について必要なことは, 次の12分弱の動画を見れば総てわかります:

https://www.youtube.com/watch?v=oD5ZL19svuw

動画の備考欄からダウンロードサイトへ飛べますが一応:

https://heijoutomate.info/windows/yomiagechan/731/

Windowsの読み上げ機能が数式をどの様に読むかを確認するには, ある程度の試行錯誤が必要です. そして, 癖を押さえた上で, 必要な個所に適切な英文を補う作業が必要になります. 例えば, $[0,1)$, $(0,1)$ は単にゼロワンまたはゼロカンマワンと読みます; $[0,1)$, $(0,1)$ の前にclosed open intervalやopen intervalなどを補う必要があります.

読み上げる話速・音の高低などの基本設定は, “VOICEVOX” や “読上げちゃん” などの読み上げソフトで行います. 出力した音声ファイルを調整する方法はいくつかありますが, 話速・高低・ノイズの消去などの微調整は, 直接, 動画編集ソフトに読み込んでから編集するのが良いと思います. 私は, 画面上のプレゼンターとして, “14なつ” さんのイラスト (柏木由紀さんが創造したゆきりんダルマというキャラクター) をオマージュしたものを作成し使用しています. プレゼンターの口の動きを音声と同期させることも可能ですが, 労力を考えると, 拘る必要はないと思います:

１４ natsu　`https://twitter.com/natumo_14`

動画編集と動画編集ソフトについて. 動画編集をする場合, 十分な容量の外部ストレージを準備し, 予め, 使用するソフトごとに, コンテンツや種々の出力を収納するファイルを作成した方がよいでしょう. 動画編集関係の素材その他は, ソフトを起動するためのショートカットを除き, 普段使用するPCのストレージには置かない方が無難です.

・スマホなどによる動画の作成については触れません.
・画像を作成するためのソフトについても触れません.
・Canva等を併用すればこじゃれたことが簡単にできますが触れません.
・音声ファイルを使用する場合, AudacityとVLCメディアプレーヤーを,
　あらかじめダウンロードしておくと何かと便利ですが, ここでは触れません.
・動画ファイルや音声ファイルは汎用性の高いMP4とMP3で準備するのが無難です.
Windowsに標準のClipchampなど, 安定した電力, 安定したインターネット環境を必要とし, 携帯先などの不安定な環境では十分には動かない動画編集ソフトがあります. また, Clipchampは, 何故かWindows標準の音声ファイルWAVを読み込めません.

動画を編集するとき, 読み上げに自分の声を使うのであれば, 動画編集ソフトが 1 つあれば十分です. 動画編集ソフトは, 動画・画像・音声・テキストなどの素材のファイルをトラックに配置して編集します. このとき, 動画・画像は下のトラックにおいたものが前面に表示されます. この基本構造はどのソフトでもあまり変わりません. 言い換えると動画の編集は, これらの準備した素材を, どのトラックのどの位置に配置するかということに尽きます. PC のスペックを十分に生かせる環境でも, 30 分の動画の出力に, 最初は 30 分強かかります. また, 少し長めの動画を作ると, 音声に対してプレビューの画像がやや遅れます; プレビューを完全には信頼できません. 小刻みにプレビューを再生すれば画像の遅れを回避できます. この様なことから, 5 分程度の動画を作り, これを出力し繋げて, 長い動画にするのが現実的です. 私たちの講演では, 通常, Tex から PDF を出力し表示します. しかし, 動画編集ソフトは画像しか扱えませんので, PDF は画像に変換する必要があります. i love PDF など便利な変換ソフトも存在しますが, Windows なら PrintScreen キーで起動する Snipping Tool を使うのが最も簡単です.

さて, どのような無料の動画編集ソフトを選べば良いのかということになります. 性能面に限るならば, DαVinci Resolve というソフトが抜けています. しかし, PC に相当のスペックが必要であり, ガイドは約 4000 ページあります. 私たちの講演の準備程度ならば, 当然, それほどの機能は必要ありません. 本格的に動画編集をやるのでなければ, もっとコンパクトなものが良いでしょう. この様な観点から, 制約の少なさと性能を考慮すると, ShotCut と Videoproc Vlogger の 2 択ではないかと私は思います.

ShotCut の解説動画は YouTube にいくらでも転がっていますから, 操作を覚えるのに, さほど苦労はしないでしょう. 私自身は Videoproc Vlogger を使用しています. Videoproc Vlogger Official のチュートリアルの豊富さと丁寧さには驚きます:

https://www.youtube.com/@videoprocvloggerofficial5220

これに対して, 日本語の公式は, Videoproc Vlogger Official よりずっと劣りますが, たどたどしくて, 逆に, 最初の使い方を覚えるには良いもしれません:

`https://www.youtube.com/watch?v=2LqYWDbN7dI&list=PLecJ7k_snnYomyoa9-D9Mzp08hQ25_iF4`

`https://www.youtube.com/watch?v=bqzlPw2YAEM&list=PLecJ7k_snnYqNNqqlrWig9WPkWQNwdAGJ`

上が 7 本下が 22 本だったかと思います。6 分とか 10 分というものも数本ありますが, 多くは 2〜3 分の動画です. これらを見ればダウンロードの方法から基本操作までわかります. あとは, 実際に動画を作りながら, 必要に応じて Videoproc Vlogger Official の動画を確認すれば良いと思います. 英語が苦手でも, YouTube 画面の字幕をクリックし設定の自動翻訳を日本語にすれば, 理解するには十分な日本語字幕が現れます.

ダウンロードサイトへは, Videoproc Vlogger Official, 日本語の公式のどちらからでもジャンプできます. 唯一の欠点は, 登録すれば済むことですが, 起動するごとにライセンスの登録を要求してくることです. 単に×を押せば消えます.

実際の動画編集. まず, 1T または 512G の外付け SSD を準備します. 動画に関連するものは, ショートカットを除いて, この外付け SSD で完了するようにしましょう. 必要なアプリや出力したファイルもこの外付け SSD の中に保存します.

上に述べた解説動画を見ながら, 読上げちゃん・VOICEVOX・Videoproc Vlogger をダウンロードし, 解説に従って, 出力した素材を保存するファイルを適切な名前で作成するなど, 必要な設定を行います. 必要に応じて, PDF を画像に変換したものや自分で作成した画像などを保存するファイルを作成します. これで準備は完了です.

私たちの講演を準備する程度ならば, 動画編集に使用する技術その他は, 基本的なもの以外は必要ありません. Videoproc Vlogger を起動し, 動画の名前や画面の規格などを設定します. 準備した説明・数式などの画像や音声をソフトにドロップダウンし, 適切なトラックに配置し, カットしたり伸縮して適切なものにします. 下のトラックの画像が上のトラックの画像の前面に表示されます. 画像をクロップでトリミングし, 適切な大きさに調整して画面の適切な位置に置きます. あとは, これらの画像をどんなタイミングでどの様に出現させ消去するかを調整するだけです. ソフトには, どの様に出現させ消去するかを補助するアニメーションなどが整備されています. 実際にやってみれば, 想像以上に簡単なので, これ以上の説明は割愛します. 多少の試行錯誤は必要ですが, PC の初心者でもなければ, 一通り習得するのに時間はそれほどかかりません.

実際のプレゼンテーション. 私は, 2023 年度には日本語で, 2024 年度は英語で, 紹介している形式での講演を試みました. 結論として, 2023 年度の講演は概ね成功であり, 2024 年度の講演は失敗でした. この形式の講演には, 次の利点があります:

・事前に, 聴き手として, 内容・時間配分・話速・間などを繰り返し調整できる.

したがって, 英語が苦手であっても, DeepL などを併用すれば, 発音も含めて日本語と遜色のない英語の講演が可能です. 当然, この形式では, 聴衆の反応をみながらの当意即妙の講演はできませんから, 通常の形式での優れた講演には及びません. しかし, 言い忘れや時間配分の失敗などの心配はないので, 最低ラインの底上げが可能でしょう.

今回の講演が失敗だった理由を考えました. 講演の動画に自分が伝えたいことを盛り込むことと, 伝えたいことが聴き手に理解されることは別のことです. 今回, 相互に関連する, 2 つの大きな欠点があったと考えています:

・内容を詰め込みすぎたこと. この 2/3 程度の内容が適切だったと考えています.

・英語の話速が速すぎたことと間の取り方が適切ではなかったこと.

読み上げソフトの話速を, 標準の話速より 2 段階遅く設定したのですが, 間が少なかったこともあって, 数学の講演として適切な話速より, まだ速く感じたようです. 日本語の講演では, 何も考えなくても, 聴きやすい話速・間というものが沁みついていて, 無意識にこれらを調整していたのでしょう. 英語の講演では, 単純な学力とは別に, この様な感覚がないため, 話速・間を注意深く調整する必要があると思われます. また, 聴

き手との乖離が生じたことも失敗の一因と思われます; 自分の発表ですから内容は当然理解していますし, 作成途中で何度も再生しているので耳が慣れてしまったようです.

通常の講演では, プレゼンターの所作から, なんとなく聴き手に, 画面の切り替わるタイミングが分かるようです. これに対して, 紹介している形式では, 現在の画面がいつまで表示されるのか, 聴き手が判断するのは難しいようです. これが問題点の 1 つであり, 工夫が必要なところです. 講演の動画に BGM は必須ではありませんが, 式の変形を見せるときなど, BGM がないと間が抜けます. 数学の BGM には, 私的には, ある種のクラシックと映画音楽が合うように思います. 私は, 高校時代よく弾いたアルハンブラの想い出・アラビア風奇想曲や, 好きなショパンのノクターン No.21 を多用しています. Rims の講演の性質から著作権法は相当に緩和されますが, 著作権フリーの音楽サイトを利用するのが無難です. BGM は, 微かに聞こえるより少しだけ大きな音が適切に思えますが, 使用するメディアプレーヤーや会場に設置した機器によって, 話者の音量とのバランスは変化してしまいます. BGM の音量調整はもう 1 つの問題点です.

次に機会があれば, 反省を生かした講演にしたいと思います. 最後に, 紹介したアプリその他の Web コンテンツを整備・提供して頂いている皆様に感謝いたします.

私には興味深いが解決できていない疑問

前節で紙数を費やしたので, 今回の講演の説明はごく簡潔にします. N は正の整数, R は実数の集合とし, Banach 空間や写像の基本的な概念・事項の説明は割愛します.

準備. C を Banach 空間 E の有界な集合とし, S, T を C 上の自己写像とします. このとき, T の不動点集合 $F(T)$ と吸引点集合 $A(T)$ は次の様になります:

$$F(T) = \{x \in C : x = Tx\}, \quad A(T) = \{x \in E : \|Ty - x\| \le \|x - y\| \text{ for all } y \in C\}.$$

$p_1 = b_1 \in C$ を初期点とする Baillon 点列 $\{b_n\}$ を生成できます:

$$\text{(B)} \quad p_{n+1} = Tp_n, \quad b_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i p_i \quad \text{for each } n \in N.$$

C が凸ならば, 次の様な 2 つの点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ を生成できます:

$$\text{(at)} \quad x_1 \in C, \quad x_{n+1} = \frac{a_n}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S^i T^j x_n + (1 - a_n)x_n \quad \text{for each } \ n \in N.$$

$$\text{(t)} \quad y_1 \in C, \quad y_{n+1} = \frac{a_n}{2n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{i+1} S^i T^j y_n + (1 - a_n)y_n \quad \text{for each } \ n \in N.$$

(at) は, S^iT^j が式の中に存在すれば S^jT^i も存在します. この意味で, S と T は対称です. この対称性は, Baillon から発展した共通不動点近似で, 重要な役割を担います. (t) は, (at) より y_{n+1} を導出する計算量が少なく, 代償に, この対称性を持ちません.

議論の流れを簡潔にするため, 以降 S, T を C 上の非拡大自己写像に限定します; ただし, 以下に提示する定理には, より広い写像族に対して証明されたものもあります.

1975 年, Baillon [2] は次の良く知られた平均収束定理を証明しました.

Theorem B. E を Hilbert 空間 H とし, C を H の有界閉凸集合とする. このとき, (B) で生成される点列 $\{b_n\}$ はある $u \in F(T)$ に弱収束する.

物理的に考えると, b_n は質点系 $\{p_1, \ldots, p_n\}$ の質量中心です. $\{b_n\}$ は, C が閉や凸であることとは無関係に, 質点系 $\{p_n\}$ の質量中心に近づくと予想されます. ただし, C が凸でなければ, $\{b_n\}$ は C の点列とは限りません. そして, $\{p_n\}$ が図形 C を一様に廻るならば, $\{p_n\}$ の質量中心は図形 C の幾何学的重心と一致するでしょう. Takahashi-Takeuchi [10] は, $\{p_n\}$ の質量中心の存在する位置を考察し, 次の主張を証明しました.

Theorem TT. E を Hilbert 空間 H とし, C を H の有界な集合とする. このとき, (B) で生成される点列 $\{b_n\}$ はある $u \in A(T)$ に弱収束する.

1. 高橋先生の教科書には, "Theorem B の条件の下で, 強収束しない Baillon 点列 $\{b_n\}$ を生成できる" と記述されています. しかし, この例の記載はなく, 参照すべき論文等も示されていません. 私は, この例を未だに見たことがありません. "この様な例が既に作られたということは事実か" ということが私の 1 つ目の疑問です; マンデラ効果の 1 つではないかと疑念を持っています. 主張 "..." の真偽とは少し別の問題です.

2. Baillon 以降, Theorem B の拡張が考察されました: (1) 写像族の拡張, (2) 複数写像の共通不動点近似への拡張, (3) Banach 空間への拡張. (1),(2) に関しては, Kohsaka [6] や Ibaraki-Takeuchi [3] の結果があります. (3) については, 1979 年に Reich [7] が証明した次の定理だけが, 本質的に価値のある肯定的な結果の様に思われます.

Theorem R. E を Fréchet 微分可能なノルムを持つ一様凸 Banach 空間, C を E の有界閉凸集合とすれば, (B) で生成される点列 $\{b_n\}$ はある $u \in F(T)$ に弱収束する.

そして, Suzuki-Takahashi [9] はもう 1 つの重要と思われる結果を提示しました.

Assertion ST. E を一般の Banach 空間, C を E の compact な凸集合とする. このとき, (B) で生成される点列 $\{b_n\}$ で強収束しない例が存在する.

この結果から, 一般の Banach 空間の不動点近似には, $\{b_n\}$ とは異なる点列が必要です. Suzuki [8] は, Atsusiba-Takahashi [1] の (at) を使って, 次の定理を示しました.

Theorem S. E を一般の Banach 空間, C を E の compact な凸集合とし $ST = TS$ を仮定する. このとき, (at) で生成される点列 $\{x_n\}$ はある $u \in F(T) \cap F(S)$ に強収束する.

Suzuki [8] に刺激され, Takeuchi [11] は次の共通不動点定理を証明しました. 更に, Kajiba-Ibaraki-Takeuchi [4] は, これを Hilbert 空間に引き戻しました. (t) が上述した S と T の対称性を持たないことを誤魔化す方法が, 2 つの論文の議論の焦点です.

Theorem T. E を一般の Banach 空間, C を E の compact な凸集合とし $ST = TS$ を仮定する. このとき, (t) で生成される点列 $\{y_n\}$ はある $u \in F(T) \cap F(S)$ に強収束する.

Theorem IKT. E を Hilbert 空間 H とし, C を H の有界閉凸集合とし $ST = TS$ を仮定する. このとき, (t) で生成される点列 $\{y_n\}$ はある $u \in F(T) \cap F(S)$ に弱収束する.

さて, Baillon の定理から一般の Banach 空間を経由して Hilbert 空間に戻ってきました. 私の 2 つ目の疑問は, 当然ですが, 次の主張が成立するかということです.

Claim. E を Hilbert 空間 H, C を H の有界閉凸集合とし $ST = TS$ を仮定する. 点列 $\{x_n\}$ を次の様に生成する: $x_1 \in C, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{i+1} S^i T^j x_1 \quad$ for each $n \in N$. このとき, $\{x_n\}$ はある $u \in F(T) \cap F(S)$ に弱収束する.
初見の印象とは異なり, 基礎から考え直さなければ無理なようです.

3. CAT(κ) 空間でも, 写像の吸引点集合は容易に定義できます. この空間でも, Theorem TT に相当する定理が成立するかという疑問が頭をよぎりますが, Theorem B に相当する定理でさへ簡単ではないことが容易に想像されます. トーンダウンして "写像の吸引点集合は CAT(κ) 空間でも有用な概念なのか" というのが, 最後の疑問です.

須藤先生の修士論文を茨木先生と勉強して, 次の Kimura-Sudo [5] の定理を目にしました. "CAT(κ) 空間では, 本来は面倒な諸々をパスして, 不等式 (ks) だけを灯に議論すれば良い" と, この定理は主張します. 明らかに, CAT(κ) 空間への容易な入り口が提示されています. 更に, 典型的な CAT(κ) 空間では (ks) が等号で成立します.

Theorem KS. Let M be a uniquely D_κ-geodesic space for $\kappa \in R$.
Then, the following propositions are equivalent:

- M is a CAT(κ) space.
- For every $x, y, z \in M$ with $\underline{d(y,z) + d(z,x) + l < 2D_\kappa}$ and $t \in [0,1]$,

(ks) $\phi_\kappa(tx \oplus (1-t)y, z) \le (t)_l^\kappa \phi_\kappa(x,z) + (1-t)_l^\kappa \phi_\kappa(y,z)$
$$- (t)_l^\kappa \phi_\kappa(x, tx \oplus (1-t)y) - (1-t)_l^\kappa \phi_\kappa(y, tx \oplus (1-t)y),$$
where $l = d(x,y)$.

定理の素材を簡単に説明します. まず, M は距離 d を持つ距離空間です. $x, y \in M$ を結ぶ測地線と呼ばれるものが唯 1 つ存在し, 長さは $d(x,y)$ です. 3 点 $x, y, z \in M$ をとれば, 測地線を辺とする 3 角形が 1 つ決まります. 任意の $t \in [0,1]$ について, x, y を結ぶ測地線上の点 $w_x^y(t) = tx \oplus (1-t)y$ が唯 1 つ存在します. $w_x^y(t)$ を使って M の凸集合を考えられます. 関数形には触れませんが, $(\cdot)_l^\kappa$ は adjuster と呼ばれ, $(0)_l^\kappa = 0$ を満たす $[0,1]$ 上の狭義単調増加で連続な自己写像です. c は $c(0) = 0$ を満たす $[0, D_\kappa)$ から $[0, \infty)$ への狭義単調増加で連続な写像, ϕ_κ は d と c の合成関数 $\phi_\kappa = c \circ d$ です.

定理の$\underline{d(y,z) + d(z,x) + l < 2D_\kappa}$と 3 角不等式より $\max\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\} < D_\kappa$ が導かれます. CAT(κ) 空間では, c が $[0, D_\kappa)$ 上で狭義単調増加で連続なことが重要です. この意味で, D_κ は空間を制限する非負拡張実数です. 修士論文の基礎部分では, ここだけに 3 角不等式が必要です; M を距離空間としなくても似た議論が可能と思われます.

Theorem KS から振り返れば, 即ち, c が $[0, D_\kappa)$ 上で狭義単調増加で連続なことを前提に, (ks) の成立を重要とする視点からは, $\max\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\} < D_\kappa$ ではなく, $\underline{d(y,z) + d(z,x) + l < 2D_\kappa}$を使用しているのは, CAT($\kappa$) 空間の定義に引きずられた結果だと思われます; Theorem KS を得た後では, 3 角形の比較に持ち込む CAT(κ) 空間の定

義は窮屈に思えます. そして, ϕ_κ が d と c の合成関数で書けるという条件も, 写像 ϕ_κ への過剰な制約に思えます. これらのことから, M と ϕ_κ をうまく再定義できれば, 不等式 (ks) で規定される空間の枠は拡がるかもしれません. Fréchet 微分可能なノルムを持つ一様凸 Banach 空間あたりも射程に入れると, ϕ_κ の対称性も問題でしょうか.

話を戻し, 不等式 (ks) で規定される空間で, (ks) が等号で成立するものを考えます. このとき, 写像の吸引点集合を定義し, これが閉凸集合であることを示すのは容易です. もし M と ϕ_κ が変更され, 空間の枠が拡がったと想定しても, おそらく同様でしょう. しかし, このことは, 吸引点集合という概念の有用性とは直ちには結びつきません. もう少し立ち入って議論したいのですが, 紙数が尽きましたので, ここで稿を閉じます.

****

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University. 東京女子大学 厚芝 幸子 先生, 東邦大学 木村 泰紀 先生 に, この論稿を発表する機会をいただいたことを感謝いたします.

References

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, *"Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces"*, Austral. Math. Soc. **57** (1998), 117–127.

[2] J.-B. Baillon. *"Un theoreme de type ergodique pour les contractions non lineaires dans un espace de Hilbert"*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B **280** (1975), 1511-1514.

[3] T. Ibaraki and Y. Takeuchi, *"A mean convergence theorem finding a common attractive point of two nonlinear mappings"*, Yokohama Math. J. **66** (2020), 61–77.

[4] T. Ibaraki, S. Kajiba and Y. Takeuchi, *"A weak convergence theorem for common fixed points of two nonlinear mappings in Hilbert spaces"*, Abstr. Appl. Anal. 2022 (2022), Article ID 9568060, 9 pages.

[5] Y. Kimura and S. Sudo, *"New type parallelogram laws in Banach spaces and geodesic spaces with curvature bounded above"*, Arabian Journal of Mathematics, **12(2)**, (2023), 389–412.

[6] F. Kohsaka, *"Existence and approximation of common fixed points of two hybrid mappings in Hilbert spaces"*, J. Nonlinear and Convex Anal. Vol 16, No. 3 (2015), 2193–2205.

[7] S. Reich, *"Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces"*, J. Math. Anal. Appl., **67** (1979), 274-276.

[8] T. Suzuki, *"Strong convergence theorem to common fixed points of two nonexpansive mappings in general Banach spaces"*, J. Nonlinear Convex Anal. **3** (2002), 381–391.

[9] T. Suzuki and W. Takahashi, *"Weak and strong convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces"*, Nonlinear Anal. **47** (2001), 2805-2815.

[10] W. Takahashi and Y. Takeuchi, *"Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space"*, J. Nonlinear Convex Anal. **12** (2011), 399–406.

[11] Y. Takeuchi, *"An iteration scheme finding a common fixed point of commuting two nonexpansive mappings in general Banach spaces"*, Linear and Nonlinear Anal. **2** (2016), 317–327.

(Yukio Takeuchi) Takahashi Institute for Nonlinear Analysis, 1-11-11 Nakazato, Minami, Yokohama 232-0063, Japan

Email address: aho314159@yahoo.co.jp