Orthogonality in a Banach space

岩手大学　本田　卓
Takashi Honda
Faculity of Education, Iwate University, Japan
E-mail address: thonda7@iwate-u.ac.jp

概　要　滑らかで, 厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間において、故高橋渉東工大名誉教授と筆者が導入した直交補空間分解が成立する。ここでは具体的な空間 l_2^p, $1 < p < \infty$ において、その直交補空間分解を試し、距離射影が線形写像になる条件を導く。

1　はじめに

本論文では, 基本的に実 Banach 空間を扱う. また, 特に断りがなければ, 滑らかで, 厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間とする. 筆者の研究より, Banach 空間の直交補空間分解を用いて示すことにする。以下では、E を実 Banach 空間とする。E を滑らかな Banach 空間、J を正規化双対写像 (normalized duality mapping) とすると、以下のような汎関数 $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ を定義できる。

$$\phi(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2.$$

正規化双対写像 J は

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

で定義される共役空間 E^* に値を持つ集合値写像で、どんな Bnach 空間 E でも一般にすべての要素 $x \in E$ で定義できる。さらに、E が滑らかな Banach 空間の場合は一価写像である。その他詳細は [14] を参照。C を E の閉凸部分集合とし、写像 $T : C \to C$ が不動点を持ち、不等式

$$\phi(Tx,y) \le \phi(x,y)$$

をすべての C の要素 x と T の不動点 $y \in F(T)$ とにおいて満たすとき、この写像を一般化非拡大 (generalized nonexpansive) 写像と呼ぶ。茨木-高橋 [10] を参照。もし E の、空でないある部分集合の上への冪等写像 R がこの性質を持つとき、R を一般化非拡大射影 (generalized nonexpansive retraction) と呼ぶ。さらに、すべての $x \in E$、$t \ge 0$ において等式 $R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$ が成り立つとき、R を sunny generalized nonexpansive retraction と呼ぶ。E の非空閉部分集合 C の上への冪等写像 R_C が sunny generalized nonexpansive retraction であることと、任意の $x \in E$, $y \in C$ において、不等式 $\langle x - R_C x, Jy - JR_C x\rangle \le 0$ が成り立つこととが同値である。逆に、E のある部分集合が E からその集合上への sunny generalized nonexpansive retraction を持つとき、その集合を E の sunny generalized nonexpansive retract と呼ぶ。E が滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間のとき、E の非空部分集合 C が E の sunny generalized nonexpansive retract になるための必要十分条件は、高阪-高橋 [11] により、C の正規双対写像 J による像 JC が E の共役空間 E^*

での閉凸集合であることが知られている。またこれは E の一般化非拡大レトラクト (generalized nonexpansive retract) である必要十分条件でもあり、このとき、E の C の上への sunny generalized nonexpansive retraction R_C は、$R_C = J^{-1}\Pi_{JC}J$ と表現できる。ここで、Π_{JC} は E^* の JC の上への一般化射影である。

そこで、滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間 E の非空部分集合 C において、$JC = Y^*$ が E^* での閉部分空間である場合を考える。このとき、任意の $x \in E$ は、

$$x = P_{Y^*_\perp}x + R_{J^{-1}Y^*}x$$

と表現できる。ここで、$Y^*_\perp = \{x \in E : \text{任意の } y^* \in Y^* \text{ において } \langle x, y^* \rangle = 0\}$、$P_{Y^*_\perp}$ は E の $Y^*_\perp$ の上への距離射影を表す。また逆に、Y を E の閉部分空間とすると、任意の $x \in E$ は、

$$x = P_Y x + R_{J^{-1}Y^\perp}x$$

と表現できる。ここで、$Y^\perp = \{x^* \in E^* : \text{任意の } y \in Y \text{ において } \langle y, x^* \rangle = 0\}$ とし、$Y^\perp$ は E^* の閉部分空間なので、E の $J^{-1}Y^\perp$ の上への sunny generalized nonexpansive retraction $R_{J^{-1}Y^\perp}$ が存在する。さらに、これらのとき、関係

$$R_{J^{-1}Y^*}x \perp P_{Y^*_\perp}x$$
$$R_{J^{-1}Y^\perp}x \perp P_Y x$$

が成り立つ。ここで、$\perp$ は BJ-orthogonality を表し、任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ において、

$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$$

が成り立つとき、$x \perp y$ と表す。滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間であれば、$\langle y, Jx \rangle = 0$ が成り立つことに等しい。

これらを、Banach 空間における直交補空間分解と呼び、Hilbert 空間では通常の直交補空間分解になっている。詳細は [2, 3, 8, 9] を参照。

さらに以下の定理より、ノルムが 1 の線形射影は sunny generalized nonexpansive retraction であることが言える。

Theorem 1.1 ([8]). *Y^* を共役空間 E^* の閉部分空間とする。もし、E の $J^{-1}Y^*$ の上への sunny generalized nonexpansive retraction が quasi-nonexpansive ならば、それは線形射影である。逆に、すべての縮小（ノルムが 1）線形射影は sunny generalized nonexpansive かつ quasi-nonexpansive である射影である。*

従って、E 上の任意のノルムが 1 の線形射影 T において、$I - T$ は $Y^*_\perp$ の上への距離射影である。ここで、Y^* は線形射影 T による E の像 Y において、

$$Y^* = JY$$

をみたす E^* の部分集合（部分空間）である。

2 有限次元 l^p 空間での直交補空間分解

$1 < p < \infty$ とすると、数列空間 l^p は滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間となる。ここでは 2 次元の l_2^p 空間を考える。このとき、正規化双対写像 J は、$x = (x_1, x_2) \in l_2^p$ において、

$$J(x) = \frac{1}{\|x\|^{p-2}} \begin{pmatrix} |x_1|^{p-1} \cdot \mathrm{sign} x_1 \\ |x_2|^{p-1} \cdot \mathrm{sign} x_2 \end{pmatrix}$$

と表現される。実際、

$$\begin{aligned}
\|J(x)\| &= \frac{1}{\|x\|^{p-2}} \left(|x_1|^{q(p-1)} + |x_2|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{\|x\|^{p-2}} \left(|x_1|^p + |x_2|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \frac{\|x\|^{p-1}}{\|x\|^{p-2}} = \|x\| \\
\langle x, J(x) \rangle &= \frac{1}{\|x\|^{p-2}} \left(|x_1|^p + |x_2|^p \right) \\
&= \frac{\|x\|^p}{\|x\|^{p-2}} = \|x\|^2 = \|J(x)\|^2
\end{aligned}$$

より正しいことが分かる。（ここで、$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$）

$a \neq 0$ を定数とし、l_2^p の閉部分空間 Y を

$$Y = \{(x_1, x_2) \in l_2^p : x_2 = a x_1\}$$

と定義する。このとき、

$$JY = \{(x_1, x_2) \in l_2^q : x_2 = |a|^{p-1} \mathrm{sign} a \cdot x_1\}$$

が得られる。ここで、定理 [4]

Theorem 2.1 (Calvert (1975))**.** E を滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的実 *Banach* 空間とすると、E の閉部分空間 M がノルムが 1 の線形射影の E の像であるための必要十分条件は、JM が E^* の閉部分空間であることである。

より、Y の上へのノルムが 1 の線形射影 T が存在する。ここで、Theorem 1.1 より、T は sunny generalized nonexpansive retraction で、直交補空間分解

$$x = P_{(JY)_\perp} x + T x$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned}
(JY)_\perp &= \{x \in l_2^p : \langle x, x^* \rangle = 0, \text{ for any } x^* \in JY\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in l_2^p : x_2 = -|a|^{1-p} \mathrm{sign} a \cdot x_1\}
\end{aligned}$$

つまり、閉部分空間 $(JY)_\perp$ の上への距離射影は線形写像である。

逆に、任意の $b \neq 0$ において、$a \in \mathbb{R}$ を

$$b = -|a|^{1-p}\mathrm{sign}a$$

をみたす実数と定義する。このとき、閉部分空間 Y を

$$Y = \{(x_1, x_2) \in l_2^p : x_2 = ax_1\}$$

と定義すると、

$$\begin{aligned}(JY)_\perp &= \{(x_1, x_2) \in l_2^p : x_2 = -|a|^{1-p}\mathrm{sign}a \cdot x_1\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in l_2^p : x_2 = bx_1\}\end{aligned}$$

となり、閉部分空間 $\{(x_1, x_2) \in l_2^p : x_2 = bx_1\}$ の上への距離射影は線形写像である。

$c \in \mathbb{R}$ を定数としたとき、閉部分空間 $\{(x, c) \in l_2^p : x \in \mathbb{R}\}$, $\{(c, y) \in l_2^p : y \in \mathbb{R}\}$ においても同様の議論ができる。また、l_2^p の 0 次元部分空間、2 次元部分空間位おいては自明である。よって、以下の定理が成り立つ。

Theorem 2.2. $1 < p < \infty$ とすると、2 次元の実 *Banach* 空間 l_2^p において、任意の閉部分空間の上への距離射影は線形写像である。

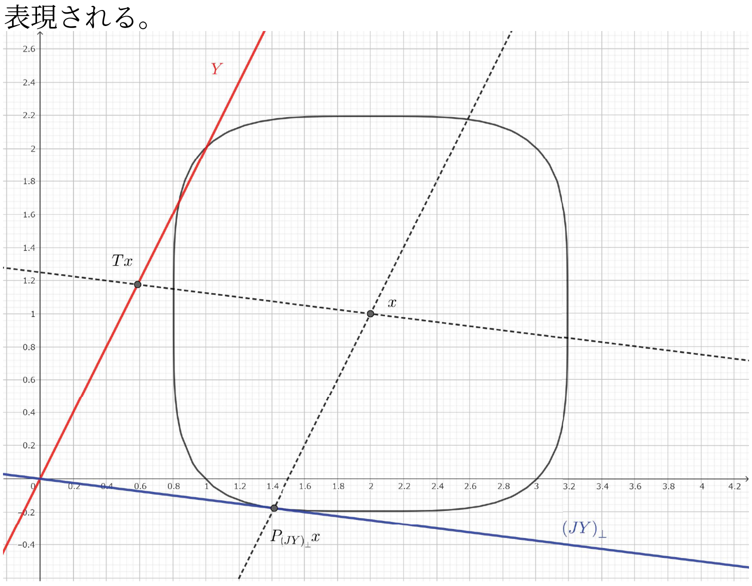
Example 2.1. l_2^4 において、閉部分空間 $Y = \{(x, 2x) \in l_2^4 : x \in \mathbb{R}\}$ を考えると、$(JY)_\perp = \{(x, -\frac{1}{8}x) \in l_2^4 : x \in \mathbb{R}\}$ となり、Y の上へのノルムが 1 の線形射影 T は、行列を用いて

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{8}{17} \\ \frac{2}{17} & \frac{16}{17} \end{pmatrix}$$

と表現され、$(JY)_\perp$ の上への距離射影は、行列を用いて

$$P_{(JY)_\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{8}{17} \\ \frac{2}{17} & \frac{16}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{17} & -\frac{8}{17} \\ -\frac{2}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix}$$

と表現される。



図は *Geogebra* により作成。

Acknowledgment

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参考文献

[1] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.

[2] Ya. I. Alber, *Generalized Projections, Decompositions, and the Pythagorean-Type Theorem in Banach Spaces*, Appl. Math. Lett. **11** (1998), 115–121.

[3] Ya. I. Alber, *James orthogonality and orthogonal decompositions of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **312** (2005), 330–342.

[4] B. Calvert, *Convergence sets in reflexive Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **47**(1975), 423–428.

[5] I. Cioranescu *Geometry of Banach spaces, duality mappings, and nonlinear problems*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.

[6] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. M. Santalucía, J. Pelant, V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2001.

[7] T. Honda, *Convergence theorems of conditional expectations by using contractive projections on Banach spaces*, Linear Nonlinear Anal. **9** (2023), no. 2, 115 – 125.

[8] T. Honda and W. Takahashi, *Norm One Projections and Generalized Conditional Expectations*, Sci. Math. Jpn. **69** (2009), 303–313.

[9] T. Honda and W. Takahashi, *Nonlinear projections and generalized conditional expectations in Banach spaces*, Taiwanese J. Math., **15** (2011), 2169–2193.

[10] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.

[11] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 197–209.

[12] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1998.

[13] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis – Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.

[14] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points* (in Japanese), Yokohama Publishers, 2000.