Kirchhoff 境界条件を持つ星グラフ上の Schrödinger 作用素について

香川大学・教育学部　宮﨑 隼人 *
Hayato MIYAZAKI
Faculty of Education,
Kagawa University

1　導入

n 本の星グラフ $\mathcal{G}$ とは, 1 つの頂点 O (vertex) と, n 本の無限に伸びる辺 $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ (edge) の組であり, すべての辺は頂点に接続されている. また各辺 e_j は $\mathbb{R}_+ \coloneqq (0,\infty)$ とみなす (星グラフの正確な定義は [8, 12] 等を参照).

図 1　3 辺の星グラフと 5 辺の星グラフ

各辺 e_j 上の複素数値関数 $u_j(x_j)$ $(x_j \in e_j)$ に対して, すべての x_j を同一視すると

$$ {}^t\Big(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)\Big) \quad (x_j \in e_j) \quad \sim \quad {}^t\Big(u_1(x), \ldots, u_n(x)\Big) \quad (x \in \mathbb{R}_+) $$

と表せるので, $\mathcal{G}$ 上の関数は $\mathbb{R}_+$ 上の n 次元複素ベクトル値関数 $u(x)$ とみなすことができる. ${}^tA$ は A の転置である. なお, $u_j(0)$ を頂点 O での値とする.

ここで, 次の関数空間を導入する:

* 〒 760-8522 香川県高松市幸町 1-1　E-mail: miyazaki.hayato@kagawa-u.ac.jp

定義 1.1. $m = 1, 2,\ 1 \leqslant r \leqslant \infty$ とする.

$$L^r = L^r(\mathcal{G}) \coloneqq \bigoplus_{j=1}^{n} L^r(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{L^r(\mathcal{G})} \coloneqq \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^r(\mathbb{R}_+)}^r\right)^{\frac{1}{r}} & (1 \leqslant r < \infty), \\ \displaystyle\sup_{1 \leqslant j \leqslant n} \|f_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} & (r = \infty), \end{cases}$$

$$H^m = H^m(\mathcal{G}) \coloneqq \bigoplus_{j=1}^{n} H^m(\mathbb{R}_+), \quad \|f\|_{H^m(\mathcal{G})} \coloneqq \left(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{H^m(\mathbb{R}_+)}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

これらはすべて Banach 空間であり, 特に $L^2(\mathcal{G})$, $H^m(\mathcal{G})$ は Hilbert 空間である.

1.1 星グラフ $\mathcal{G}$ 上のラプラシアン $\Delta(A, B)$

$\mathcal{G}$ 上の関数 f に対して, ラプラシアン $\Delta(A, B)$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \Delta(A, B)f &\coloneqq {}^t(f_1'', f_2'', \dots, f_n''), \quad f_j''(x) = \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \\ \mathscr{D}(\Delta(A, B)) &\coloneqq \left\{ f \in H^2(\mathcal{G}) \;\middle|\; Af(0) - Bf'(+0) = O \right\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで, A, B は $\mathbb{C}^{n \times n}$ の正方行列であり, 次の条件を満たす:

(A1) AB^* はエルミート行列 (自己共役) である. すなわち $AB^* = BA^*$.

(A2) $A^*A + B^*B > 0$.

ここで, A^* は A の随伴行列であり, $A^* = {}^t\overline{A}$ である.

注意 1.1. Kostrykin, Schrader [11, 12] により, $\Delta(A, B)$ は $L^2(\mathcal{G})$ 上の自己共役作用素になることが知られている. また, Aktosun, Klaus, Weder [2] により, 複数の自己共役になるための必要十分条件が与えられており, 上の条件はそのうちの一つである.

例 1.1 (A, B の例). $\alpha \in \mathbb{R}$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$Af(0)+Bf'(+0)=O \iff f_j(0)=f_k(0)\ \ (j,k=1,2,\ldots,n),\quad \sum_{j=1}^{n} f_j'(+0)=\alpha f(0)$$

と表される. $\alpha=0$ のときは Kirchhoff 境界条件, $\alpha\neq 0$ のときは Dirac の δ 境界条件と呼ばれる. $\alpha=0$ のときの $\Delta(A,B)$ を Δ_K とかくことにする.

注意 1.2. 関数空間の定義を見ると, 各辺の関数 f_j ごとにノルムをとり足し合わせるので, すべての x_j を区別して考えても, 同一視して考えても同じ定式化となる. ラプラシアン $\Delta(A,B)$ についても同様で

$$\Delta(A,B)f \coloneqq {}^t\Big(f_1''(x_1), f_2''(x_2), \ldots, f_n''(x_n)\Big),\quad f_j''(x_j)=\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_j^2},\quad (x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}_+^n$$

と定義しても, 全く同じ定式化である. したがって, 星グラフ上の関数を考える際には, x_j を同一視して, $\mathbb{R}_+$ 上の n 次元ベクトル値関数として扱えばよい.

本稿では, 星グラフ上の Schrödinger 作用素 $e^{it\Delta(A,B)}$ の表示公式を与える. $e^{it\Delta(A,B)}$ の表示公式は, $-\Delta(A,B)$ のレゾルベントを用いて [1,8] 等により与えられているが, 一般化 Fourier 変換を用いて $e^{it\Delta(A,B)}$ の表示公式を与えることが, 本稿の目的である.

直線 $\mathbb{R}$ の場合, Schrödinger 作用素 $e^{it\Delta}$ は次の表示公式を持つ:

$$e^{it\Delta}\varphi=\frac{1}{\sqrt{4\pi i t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i(x-y)^2}{4t}}\varphi(y)\,dy=\mathcal{M}(t)\mathcal{D}(t)\mathcal{F}\mathcal{M}(t)\varphi.$$

ここで, $\mathcal{M}(t)=e^{\frac{ix^2}{4t}}$, $\mathcal{D}(t)f(x)=(2it)^{-\frac{1}{2}}f\left(x/t\right)$, $\mathcal{F}f(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}f(x)\,dx$ である. 特に, 最右辺の式は $e^{it\Delta}$ の Dollard 分解と呼ばれ,

$$|\mathcal{M}(t)-1|=\left|e^{\frac{ix^2}{8t}}-e^{-\frac{ix^2}{8t}}\right|=2\left|\sin\left(\frac{x^2}{8t}\right)\right|\lesssim |x|^{2\theta}t^{-\theta}\quad (\theta\in[0,1])$$

に注意すると,

$$\left\|e^{it\Delta}\varphi-\mathcal{M}(t)\mathcal{D}(t)\mathcal{F}\varphi\right\|_{L^2}=\|\mathcal{M}(t)\mathcal{D}(t)\mathcal{F}(\mathcal{M}(t)-1)\varphi\|_{L^2}\lesssim t^{-\theta}\left\||x|^{2\theta}\varphi\right\|_{L^2}$$

となるので, φ が性質のよい関数であれば, $t\to\infty$ で $e^{it\Delta}\varphi\sim\mathcal{M}(t)\mathcal{D}(t)\mathcal{F}\varphi$ となることがわかる. Dollard 分解があれば, 非線形 Schrödinger 方程式の解の長時間挙動を考察することができ, 数多くの蓄積がある (e.g., [9,14]). 本稿では, $e^{it\Delta(A,B)}$ に対しても対応する Dollard 型の分解を導出できることや, 非線形問題への応用の一端を紹介する.

2　半直線上の Schrödinger 方程式

星グラフ上の Schrödinger 方程式の前に, まずは次の半直線上の Schrödinger 方程式を考える:

$$i\partial_t u + \Delta(\alpha,\beta)u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^2. \tag{2.1}$$

ここで, $u = u(t,x) \in \mathbb{C}$ であり, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ は $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, $\alpha\overline{\beta} = \beta\overline{\alpha}$ を満たす定数で, $\Delta(\alpha,\beta)$ は

$$\Delta(\alpha,\beta)f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$
$$\mathscr{D}(\Delta(\alpha,\beta)) = \left\{ f \in H^2(\mathbb{R}_+) \,\middle|\, \alpha f(0) - \beta f'(+0) = O \right\}$$

と定義される. $\Delta(\alpha,\beta)$ は $L^2(\mathbb{R}_+)$ 上の自己共役作用素であることが知られており, 特に $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ のときは Dirichlet 境界条件, $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ のときは Neumann 境界条件に対応する. 文献としては, Reed, Simon [15] の X 章や, Isozaki [10] の I 章を参照されたい. (2.1) の解作用素 $e^{it\Delta(\alpha,\beta)}$ の具体的な表示を求めることが本節の目標である.

注意 2.1. $-\Delta(\alpha,\beta)$ のスペクトル集合を $\sigma(-\Delta(\alpha,\beta))$ とおくと, $\sigma(-\Delta(\alpha,\beta)) = [0,\infty)$ である. つまり, $\sigma(-\Delta(\alpha,\beta))$ は離散スペクトル (固有値) を持たず, 連続スペクトルのみを持つ作用素である. またより一般に, 自己共役作用素のスペクトル集合は実軸上に存在することが知られている. スペクトル解析の一般論に関する和書としては, 新井朝雄 [23], 新井仁之 [21], 中村 [20], 黒田 [22] 等を挙げる. また Schrödinger 方程式に関する網羅的な書籍として, 谷島 [18], [19] がある.

2.1　一般化 Fourier 変換

次の固有値問題を考える:

$$-\psi''(x) = k^2\psi(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{2.2}$$

(2.2) の基本解は e^{ikx}, e^{-ikx} であり, $\psi_\pm(k;x) = e^{\pm ikx}$ とおく. 直線上の場合, $\psi_-(k;x)$ を用いて通常の Fourier 変換

$$\mathcal{F}[f](k) = \widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_-(k;x) f(x)\, dx$$

が適当な意味で定義でき, 反転公式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_-(k;x)} \widehat{f}(k)\, dk = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x)$$

が成り立つ. また, $\mathcal{F}(-\Delta) = k^2\mathcal{F}$ が成立するので, $\mathcal{F}$ は $-\Delta$ に付随する Fourier 変換であるといえる. よく知られているように, この性質を用いて

$$i\partial_t u + \Delta u = 0, \quad u(0,x) = \varphi(x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \tag{2.3}$$

の解表示を得ることができる. 実際, 両辺を Fourier 変換すると

$$\partial_t \widehat{u}(t,k) + ik^2\widehat{u}(t,k) = 0, \quad \widehat{u}(0,k) = \widehat{\varphi}(k)$$

となるので, これを解くと $\widehat{u}(t,k) = e^{-ik^2t}\widehat{\varphi}(k)$ を得る. 逆 Fourier 変換すると

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}[e^{-ik^2t}\widehat{\varphi}(k)] = \mathcal{F}^{-1}[e^{-ik^2t}] * u(t)$$

であるので, $\mathcal{F}^{-1}[e^{-ik^2t}]$ を求めれば解表示が得る. そこで, Cauchy の積分定理と Gauss 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\pi/a}$ $(a > 0)$ を用いて

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[e^{-ik^2t}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik^2t}e^{ikx}\, dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\left(k-\frac{x}{2t}\right)^2 + \frac{ix^2}{4t}}\, dk \\
&= \frac{e^{\frac{ix^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(\sqrt{i}k)^2}\, dk = \frac{e^{\frac{ix^2}{4t}}}{\sqrt{2i\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tk^2}\, dk = \frac{e^{\frac{ix^2}{4t}}}{\sqrt{2it}}.
\end{aligned}$$

ここで $\sqrt{i}$ は主値を $[-\pi,\pi)$ ととった. したがって, (2.3) の解表示は

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi it}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i(x-y)^2}{4t}} \varphi(y)\, dy$$

となる.

それでは, 半直線上の Schrödinger 方程式 (2.2) の解表示を一般化 Fourier 変換を用いて導こう. まず, 一般化 Fourier 変換を導入する. 重要なのは, 境界条件を考慮した $\psi_-(k;x)$ がどうなるかである. そこで $k > 0$ とし, e^{-ikx} が境界である原点に向けて入射し, e^{ikx} が境界で反射すると考え, $\psi_-(k;x)$ を

$$\psi_-(k;x) = e^{-ikx} + S(k)e^{ikx} \tag{2.4}$$

のように定める．$S(k)$ は反射係数である．この $\psi_-(k;x)$ は physical solution と呼ばれる (cf. [2,16])．$S(k)$ を求めよう．そのために，まず

$$\psi(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$$

を考え，ψ が境界条件 $\alpha\psi(0) - \beta\psi'(+0) = 0$ を満たすとする．$\alpha\overline{\beta} - \beta\overline{\alpha} = 0$ に注意すると

$$\psi(0) = C_1 + C_2 = \overline{\beta}, \quad \psi'(+0) = ik(C_1 - C_2) = \overline{\alpha}$$

を満たせばよいので，

$$C_1 = \frac{\overline{\alpha} + ik\overline{\beta}}{2ik}, \quad C_2 = -\frac{\overline{\alpha} - ik\overline{\beta}}{2ik}$$

となる．よって ψ に C_2^{-1} をかけて

$$\psi_-(k;x) = C_2^{-1}\psi(x) = e^{-ikx} - (\overline{\alpha} + ik\overline{\beta})(\overline{\alpha} - ik\overline{\beta})^{-1} e^{ikx}$$

となり，$S(k) = -(\overline{\alpha} + ik\overline{\beta})(\overline{\alpha} - ik\overline{\beta})^{-1}$ が得られる．ここで，再度 $\alpha\overline{\beta} - \beta\overline{\alpha} = 0$ に注意すると

$$(\alpha - ik\beta)S(k)(\overline{\alpha} - ik\overline{\beta}) = -(\alpha - ik\beta)(\overline{\alpha} + ik\overline{\beta}) = -(\alpha + ik\beta)(\overline{\alpha} - ik\overline{\beta})$$

より $S(k) = -(\alpha - ik\beta)^{-1}(\alpha + ik\beta)$ とかける．この $\psi_-(k;x)$ を用いて，$\Delta(\alpha,\beta)$ に付随する一般化 Fourier 変換を

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}[f](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \psi_-(k;x) f(x)\, dx$$

と定義する．この一般化 Fourier 変換を用いて，(2.2) の解表示を特別な場合に導こう．

2.2 半直線上の Schrödinger 作用素の表示公式

半直線上の Schrödinger 方程式の初期値問題

$$i\partial_t u + \Delta(\alpha,\beta)u = 0, \quad u(0,x) = \varphi(x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$$

の解表示を特別な場合に導こう．

2.2.1 Dirichlet 境界条件 ($\alpha \neq 0$, $\beta = 0$) の場合

$\psi_-(k;x) = -2i\sin kx$ となるので, 一般化 Fourier 変換は

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\alpha,0}[f](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty (-2i\sin kx)f(x)\,dx \\ &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin(kx)f(x)\,dx =: \mathcal{F}_s[f](k) = \widehat{f}_s(k)\end{aligned}$$

であり, Fourier 正弦変換となる. $\Delta_D = \Delta(1,0)$ とおくと, $\mathcal{F}_s(-\Delta_D) = k^2\mathcal{F}_s$ が従う. 実際, $-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ を無視して計算すると, 部分積分より

$$\begin{aligned}k^2\mathcal{F}_s[f](k) &= k\int_0^\infty (-\cos kx)' f(x)\,dx \\ &= k\left\{[-\cos(kx)f(x)]_0^\infty + \int_0^\infty \cos(kx)f'(x)\,dx\right\} \\ &= kf(0) + [\sin(kx)f'(x)]_0^\infty + \int_0^\infty \sin(kx)\left\{-f''(x)\right\}dx = \mathcal{F}_s\left[(-\Delta_D)f\right](k)\end{aligned}$$

となる. したがって, $\mathcal{F}_s$ は $-\Delta_D$ に付随する Fourier 変換である. この性質を用いて

$$i\partial_t u + \Delta_D u = 0, \quad u(0,x) = \varphi(x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \tag{2.5}$$

の解表示を得ることができる. 両辺を Fourier 正弦変換すると

$$\partial_t \widehat{u}_s(t,k) + ik^2\widehat{u}_s(t,k) = 0, \quad \widehat{u}_s(0,k) = \widehat{\varphi}_s(k)$$

となり, $\widehat{u}(t,k) = e^{-ik^2t}\widehat{\varphi}_s(k)$ を得る. 逆 Fourier 正弦変換は

$$\mathcal{F}_s^{-1}[g](x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin(kx)g(k)\,dk, \quad x \in \mathbb{R}$$

であり, $\widehat{f}_s(-k) = -\widehat{f}_s(k)$ となるので

$$\mathcal{F}_s^{-1}\widehat{u}_s = \mathcal{F}^{-1}\widehat{u}_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}[e^{-ik^2t}] * \mathcal{F}^{-1}\widehat{\varphi}_s.$$

ここで

$$\mathcal{F}^{-1}\widehat{f}_s(x) = f_{\mathrm{odd}}(x) := \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

であることに注意すると, 変数変換をして

$$u_{\mathrm{odd}}(t,x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi it}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{i(x-y)^2}{4t}}\varphi_{\mathrm{odd}}(y)\,dy=\frac{1}{\sqrt{4\pi it}}\int_0^{\infty}\left(e^{\frac{i(x-y)^2}{4t}}-e^{\frac{i(x+y)^2}{4t}}\right)\varphi(y)\,dy$$

となる. したがって, $x>0$ に制限すれば (2.5) の解表示として

$$u(t,x)=\left(\mathcal{U}_t^- - \mathcal{U}_t^+\right)\varphi =: e^{it\Delta_D}\varphi$$

を得る. ただし, $\mathcal{U}_t^{\pm}$ は

$$\mathcal{U}_t^{\pm}\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi it}}\int_0^{\infty}e^{\frac{i(x\pm y)^2}{4t}}\varphi(y)\,dy \tag{2.6}$$

である.

2.2.2 Neumann 境界条件 ($\alpha=0$, $\beta\neq 0$) の場合

$\psi_-(k;x)=2\cos kx$ となるので, 一般化 Fourier 変換は

$$\mathcal{F}_{0,\beta}[f](k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}2\cos(kx)f(x)\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\cos(kx)f(x)\,dx=:\mathcal{F}_c[f](k)=\widehat{f}_c(k)$$

であり, Fourier 余弦変換となる. $\Delta_N=\Delta(0,1)$ とおくと, $\mathcal{F}_c(-\Delta_N)=k^2\mathcal{F}_c$ が従う. 実際, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ を無視して計算すると, 部分積分より

$$\begin{aligned}
k^2\mathcal{F}_c[f](k)&=k\int_0^{\infty}(\sin kx)'f(x)\,dx\\
&=k\left\{[\sin(kx)f(x)]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\sin(kx)f'(x)\,dx\right\}\\
&=\int_0^{\infty}(\cos(kx))'f'(x)\,dx\\
&=[\cos(kx)f'(x)]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\cos(kx)\left\{-f''(x)\right\}dx=\mathcal{F}_c\left[(-\Delta_N)f\right](k)
\end{aligned}$$

となる. したがって, $\mathcal{F}_c$ は $-\Delta_N$ に付随する Fourier 変換である. この性質を用いて

$$i\partial_t u+\Delta_N u=0,\quad u(0,x)=\varphi(x),\quad (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ \tag{2.7}$$

の解表示を得ることができる. 両辺を Fourier 余弦変換すると

$$\partial_t\widehat{u}_c(t,k)+ik^2\widehat{u}_c(t,k)=0,\quad \widehat{u}_c(0,k)=\widehat{\varphi}_c(k)$$

となり, $\widehat{u}(t,k)=e^{-ik^2t}\widehat{\varphi}_c(k)$ を得る．逆 Fourier 余弦変換は

$$\mathcal{F}_c^{-1}[g](x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(kx)g(k)\,dk,\quad x\in\mathbb{R}$$

であり, $\widehat{f}_c(-k)=\widehat{f}_c(k)$ となるので

$$\mathcal{F}_c^{-1}\widehat{u}_c=\mathcal{F}^{-1}\widehat{u}_c=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}[e^{-ik^2t}]*\mathcal{F}^{-1}\widehat{\varphi}_c.$$

ここで

$$\mathcal{F}^{-1}\widehat{f}_c(x)=f_{\mathrm{even}}(x):=\begin{cases}f(x), & x>0,\\ f(-x), & x<0\end{cases}$$

であることに注意すると, 変数変換をして

$$u_{\mathrm{even}}(t,x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi it}}\int_{-\infty}^\infty e^{\frac{i(x-y)^2}{4t}}\varphi_{\mathrm{even}}(y)\,dy=\frac{1}{\sqrt{4\pi it}}\int_0^\infty\left(e^{\frac{i(x-y)^2}{4t}}+e^{\frac{i(x+y)^2}{4t}}\right)\varphi(y)\,dy$$

となる．したがって, $x>0$ に制限すれば (2.7) の解表示として

$$u(t,x)=\left(\mathcal{U}_t^++\mathcal{U}_t^-\right)\varphi=:e^{it\Delta_N}\varphi \tag{2.8}$$

を得る．ただし, $\mathcal{U}_t^\pm$ は (2.6) で定義される．

注意 2.2.

$$\mathcal{F}^{-1}\widehat{f}_s(x)=f_{\mathrm{odd}}(x),\quad \mathcal{F}^{-1}\widehat{f}_c(x)=f_{\mathrm{even}}(x)$$

という性質は, $\sigma(-\Delta(\alpha,\beta))$ が離散スペクトルを持たないために成り立つ性質である．

3 星グラフ上の Schrödinger 方程式

星グラフ $\mathcal{G}$ 上の Schrödinger 方程式の初期値問題

$$i\partial_t u+\Delta(A,B)u=0,\quad u(0,x)=\varphi(x),\quad (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ \tag{3.1}$$

を考える．ここで, $\Delta(A,B)$ は (1.1) で定義され, $\mathbb{C}^{n\times n}$ 行列 A, B は (A1), (A2) を満たすとする．このとき, $\Delta(A,B)$ は $L^2(\mathcal{G})$ 上の自己共役作用素である．本節では簡単のため, $n=3$ の場合に限定して述べる．一般の n についても同様の議論が可能である．こ

のような星グラフ上の Schrödinger 作用素は, Adami, Cacciapuoti, Finco, Noja [1] により Kirchhoff 境界条件といった代表的な境界条件の場合に初めて考察され, Grecu, Ignat [8] により, 一般の境界条件の場合が扱われている.

注意 3.1. $-\Delta(A,B)$ は離散スペクトルを持ち得る. 実際, 例 1.1 で $\alpha<0$ の場合には, 負の固有値を 1 つ持つことが知られている. 具体的には, 固有値は $\{-\frac{\alpha^2}{3^2}\}$, 固有関数は ${}^t(e^{\frac{\alpha}{3}x})_{j=1}^3$ で与えられる ([4, Remark 3.2]).

本稿では, Kirchhoff 境界条件 ($\alpha=0$) を持つ星グラフ $\mathcal{G}$ 上の Schrödinger 作用素の表示公式を, $\mathcal{G}$ 上の一般化 Fourier 変換を用いて与える. この場合, $-\Delta_K$ は離散スペクトルを持たず, 連続スペクトルのみからなり, $\sigma(-\Delta_K)=[0,\infty)$ であることが知られている ([12]). その他の境界条件を含む一般の境界条件の場合は, Naumkin, Weder [13] を参照されたい.

まず, $\Delta(A,B)$ に付随する一般化 Fourier 変換を定義しよう. $\Delta(A,B)$ の固有値問題

$$-\psi''(x)=k^2\psi(x),\quad x\in\mathbb{R}_+,\quad k\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \tag{3.2}$$

を考える. (3.2) の基本解は $e^{ikx}I$, $e^{-ikx}I$ であり, ここで I は 3×3 単位行列である. 星グラフの場合, Fourier 変換の核となる physical solution を各辺ごとに考える必要がある. $\mathcal{G}$ の各辺に対して, $\psi_-^{l,j}(k;x)$ を

$$\psi_-^{l,j}(k;x)=\begin{cases}S_{jl}(k)e^{ikx}, & j\neq l,\\ e^{-ikx}+S_{ll}(k)e^{ikx}, & j=l\end{cases}$$

と定義する. ここで, $S_{jl}(k)$ は反射係数であり, l は入射する辺, j が透過する辺を意味している. S_{jk} を用いて, 散乱行列

$$S(k)=\begin{pmatrix}S_{11}(k) & S_{12}(k) & S_{13}(k)\\ S_{21}(k) & S_{22}(k) & S_{23}(k)\\ S_{31}(k) & S_{32}(k) & S_{33}(k)\end{pmatrix}$$

を定義する. この $S(k)$ を求めよう. $f(k;x)=e^{ikx}I$, $\psi(x)=f(k;x)C_1+f(-k;x)C_2$ とおく. ここで, C_j は $\mathbb{C}^{3\times3}$ 行列である. ψ が境界条件 $A\psi(0)-B\psi'(+0)=0$ を満たすとする. $AB^*-BA^*=0$ に注意すると

$$\psi(0)=C_1+C_2=B,\quad \psi'(+0)=ik(C_1-C_2)=A$$

を満たせばよいので,

$$C_1 = \frac{1}{2ik}(A^* + ikB^*), \quad C_2 = -\frac{1}{2ik}(A^* - ikB^*)$$

となる．$AB^* = BA^*$ から $A^* + ikB^*$, $A^* - ikB^*$ は逆行列を持つので ([11, Lemma 2.3]), ψ に C_2^{-1} を右からかけて

$$\psi(x)C_2^{-1} = f(-k;x) + f(k;x)\left\{-(A^* + ikB^*)(A^* - ikB^*)^{-1}\right\}$$

となり, $S_{jk}(k) = -(A^* + ikB^*)(A^* - ikB^*)^{-1}$ が得られる．やはり同様に $AB^* = BA^*$ を用いると

$$(A - ikB)S(k)(A^* - ikB^*) = -(A - ikB)(A^* + ikB^*) = -(A + ikB)(A^* - ikB^*)$$

より $S(k) = -(A - ikB)^{-1}(A + ikB)$ とかける．よって, physical solution $\Psi_-(k;x)$ は

$$\Psi_-(k;x) := \begin{pmatrix} \psi_-^{1,1} & \psi_-^{1,2} & \psi_-^{1,3} \\ \psi_-^{2,1} & \psi_-^{2,2} & \psi_-^{2,3} \\ \psi_-^{3,1} & \psi_-^{3,2} & \psi_-^{3,3} \end{pmatrix} = e^{-ikx}I + e^{ikx}S(k)$$

となる．ゆえに, $\Delta(A,B)$ に付随する一般化 Fourier 変換を

$$\mathscr{F}[f](k) = F_{A,B}[f](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \Psi_-(k;x)f(x)\,dx$$

と定義する．星グラフ上の一般化 Fourier 変換は Weder [16, Section 6] により与えられた．星グラフを含む, 行列に値をとる Schrödinger 方程式に関する結果を網羅的に纏めた書籍として, Aktosun, Weder [3] がある．

3.1 Kirchhoff 境界条件における Schrödinger 作用素の表示公式

$\Delta(A,B)$ に付随する一般化 Fourier 変換を用いて, (3.1) の Kirchhoff 境界条件の場合に対応する, 以下の初期値問題

$$i\partial_t u + \Delta_K u = 0, \quad u(0,x) = \varphi(x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \tag{3.3}$$

の解表示を導こう．この場合,

$$S(k) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

と計算できるので, $\Psi_-(k;x) = (e^{-ikx} - e^{ikx})I + \frac{2}{3}e^{ikx}J$ となる．ここで, J は 3×3 の全ての成分が 1 である行列である．ゆえに, $-\Delta_K$ に付随する一般化 Fourier 変換は

$$\mathscr{F}[f](k) = \widehat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \Psi(k;x)f(x)\,dx = \left(\mathcal{F}^- - \mathcal{F}^+\right)I + \frac{2}{3}\mathcal{F}^+J$$

となる．ここで, $\mathcal{F}^\pm$ は

$$\mathcal{F}^\pm[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{\pm ikx}f(x)\,dx$$

である．このとき, $\mathscr{F}(-\Delta_K) = k^2\mathscr{F}$ が成立する．また, $-\Delta_K$ に付随する逆 Fourier 変換を

$$\mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F}^* = \left(\mathcal{F}^+ - \mathcal{F}^-\right)I + \frac{2}{3}\mathcal{F}^-J$$

と定める．

命題 3.1. $\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1} + \mathscr{F}^{-1}\mathscr{F} = I$ が成立する．

(証明) $J^2 = 3J$ に注意して計算すると

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1} &= \left\{\left(\mathcal{F}^- - \mathcal{F}^+\right)I + \frac{2}{3}\mathcal{F}^+J\right\}\left\{\left(\mathcal{F}^+ - \mathcal{F}^-\right)I + \frac{2}{3}\mathcal{F}^-J\right\} \\
&= \left(\mathcal{F}^- - \mathcal{F}^+\right)\left(\mathcal{F}^+ - \mathcal{F}^-\right)I + \frac{2}{3}\mathcal{F}^+\left(\mathcal{F}^+ - \mathcal{F}^-\right)J \\
&\quad + \frac{2}{3}\left(\mathcal{F}^- - \mathcal{F}^+\right)\mathcal{F}^-J + \frac{4}{9}\mathcal{F}^+\mathcal{F}^-J^2 \\
&= \mathcal{F}_s\mathcal{F}_s^{-1}I + \frac{2}{3}\left(\left(\mathcal{F}^+\right)^2 + \left(\mathcal{F}^-\right)^2\right)J \\
&= I + \frac{2}{3}\left(\left(\mathcal{F}^+\right)^2 + \left(\mathcal{F}^-\right)^2\right)J
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\mathcal{F}^+ = \frac{\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_s}{2}, \quad \mathcal{F}^- = \frac{\mathcal{F}_c + \mathcal{F}_s}{2}$$

に注意すると

$$\left(\mathcal{F}^+\right)^2 + \left(\mathcal{F}^-\right)^2 = \frac{1}{4}\left\{(\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_s)^2 + (\mathcal{F}_c + \mathcal{F}_s)^2\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}_c^{-1}\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_s^{-1}\mathcal{F}_s\right) = 0$$

となり $\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1} = I$ が得られる．同様にして $\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F} = I$ も示される． $\square$

(3.3) の解表示を求めよう．両辺を Fourier 変換すると

$$\partial_t\widehat{u}(t,k) + k^2\widehat{u}(t,k) = 0, \quad \widehat{u}(0,k) = \widehat{\varphi}(k)$$

となるので, これを解くと

$$\widehat{u}(t,k) = e^{-itk^2}\widehat{\varphi}(k)$$

が従う. 逆 Fourier 変換すると

$$\begin{aligned}
u(t) &= \mathscr{F}^{-1}[e^{-itk^2}\widehat{\varphi}(k)] \\
&= \left\{\left(\mathcal{F}^+ - \mathcal{F}^-\right) + \frac{2}{3}\mathcal{F}^- J\right\} e^{-itk^2} \left\{\left(\mathcal{F}^- - \mathcal{F}^+\right) + \frac{2}{3}\mathcal{F}^+ J\right\}\varphi \\
&= \left(\mathcal{F}^+ - \mathcal{F}^-\right) e^{-itk^2} \left(\mathcal{F}^- - \mathcal{F}^+\right) + \frac{2}{3}\left(\mathcal{F}^+ - \mathcal{F}^-\right) e^{-itk^2}\mathcal{F}^+ J\varphi \\
&\quad + \frac{2}{3}\mathcal{F}^+ e^{-itk^2}\left(\mathcal{F}^- - \mathcal{F}^+\right) J\varphi + \frac{4}{9}\mathcal{F}^- e^{-itk^2}\mathcal{F}^+ J^2\varphi \\
&= \left(\mathcal{U}_t^- - \mathcal{U}^+\right) I\varphi + \frac{2}{3}\left(\mathcal{F}^+ e^{-itk^2}\mathcal{F}^+ + \mathcal{F}^- e^{-itk^2}\mathcal{F}^-\right) J\varphi.
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}^+ e^{-itk^2}\mathcal{F}^+ + \mathcal{F}^- e^{-itk^2}\mathcal{F}^- \\
&= \frac{1}{4}\left\{(\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_s)e^{-tik^2}(\mathcal{F}_c + \mathcal{F}_s) + (\mathcal{F}_c + \mathcal{F}_s)e^{-tik^2}(\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_s)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}_c^{-1}e^{-itk^2}\mathcal{F}_c - \mathcal{F}_s^{-1}e^{-itk^2}\mathcal{F}_s\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{(U_t^- + U_t^+) - (U_t^- - U_t^+)\right\} = U_t^+
\end{aligned}$$

となるので,

$$u(t) = \left\{\left(\mathcal{U}_t^- - \mathcal{U}^+\right) I + \frac{2}{3}U_t^+ J\right\}\varphi$$

を得る. ゆえに, Kirchhoff 境界条件の下での星グラフ上の Schrödinger 作用素は

$$e^{it\Delta_K} = \left(\mathcal{U}_t^- - \mathcal{U}^+\right) I + \frac{2}{3}U_t^+ J$$

と表されることがわかった. $e^{it\Delta_K}$ の Dollard 分解を求めよう. 次が成立する:

命題 3.2 ([5])**.**

$$e^{it\Delta_K} = \mathscr{M}(t)\mathscr{D}(t)\mathscr{F}\mathscr{M}(t).$$

ここで, $\mathscr{M}(t) = \mathcal{M}(t)I$, $\mathscr{D}(t) = \mathcal{D}(t)I$ である.

(証明) $\mathcal{U}_t^{\pm}\varphi$ について

$$\mathcal{U}_t^{\pm}\varphi = \frac{1}{\sqrt{4\pi it}}\int_0^\infty e^{\frac{i(x\pm y)^2}{4t}}\varphi(y)\,dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{\frac{ix^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi it}} \int_0^\infty e^{\pm\frac{ixy}{2t}+\frac{iy^2}{4t}} \varphi(y)\, dy \\
&= e^{\frac{ix^2}{4t}} \mathcal{D}(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{\pm ixy} \left(e^{\frac{iy^2}{4t}} \varphi(y) \right) dy \\
&= \mathcal{M}(t)\mathcal{D}(t)\mathcal{F}^{\pm}\mathcal{M}(t)
\end{aligned}
$$

と分解できる．したがって

$$
\begin{aligned}
e^{it\Delta_K} &= \left(\mathcal{U}_t^- - \mathcal{U}^+ \right) I + \frac{2}{3} U_t^+ J \\
&= \mathcal{M}(t)\mathcal{D}(t) \left(\mathcal{F}^- - \mathcal{F}^+ \right) \mathcal{M}(t) I + \frac{2}{3} \mathcal{M}(t)\mathcal{D}(t)\mathcal{F}^+\mathcal{M}(t) J \\
&= \mathscr{M}(t)\mathscr{D}(t) \left\{ \left(\mathcal{F}^- - \mathcal{F}^+ \right) I + \frac{2}{3}\mathcal{F}^+ J \right\} \mathscr{M}(t)
\end{aligned}
$$

となり目的の等式を得る． □

4　非線形問題への応用

本節では, 次の非線形 Schrödinger 方程式 (NLS) を考察する:

$$
i\partial_t u + \Delta_K u + \lambda |u|^p u = 0. \tag{4.1}
$$

ここで, $u = (u_j(t,x))_{j=1}^n \colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{C}^n$ は n 辺の星グラフ $\mathcal{G}$ 上の未知関数であり, $\lambda = \pm 1$, $p > 0$ とする．注意として, $\mathcal{G}$ 上の関数の計算は各成分ごとに行う．つまり, (4.1) の非線形部は $|u|^p u = (|u_j|^p u_j)_{j=1}^n$ と解釈する．星グラフ上の NLS の解挙動に関する研究は, 近年, 非線形光学等を背景として発展しており, 頂点での δ-相互作用を持つ星グラフ上の定在波の安定性や, 特別な星グラフ上でのソリトンの散乱に関する研究等が進んでいる．一方, 解の長時間挙動に関する研究はまだ発展途上である．(4.1) では $p > 2$ のとき, Δ_K の場合に Yoshinaga [17], 一般のラプラシアン $\Delta(A,B)$ の場合には Naumkin, Weder [13] によって, 時刻無限大で解が自由解に漸近することが示されている．さらに $p < 1$ のとき, Aoki, Inui, Mizutani [6] により, 解が時刻無限で自由解に漸近しないことが $\Delta(A,B)$ の場合に示されている．(4.1) に対応する $\mathbb{R}$ 上の NLS では, $p > 2$ のとき, 解は自由解に漸近し, $p \leqslant 2$ のとき, 解は自由解に漸近せず, $p = 2$ において, log 型の修正位相をもつ自由解に漸近することが知られている．本節では, $1 \leqslant p \leqslant 2$ のとき, $\mathbb{R}$ 上の NLS の先行研究における議論を, $\mathcal{G}$ 上の (4.1) で展開できることを紹介する．

結果を述べるため, 次の関数空間を導入する:

定義 4.1.

$$H^{0,1}(\mathcal{G}) := \left\{ f \in L^2(\mathcal{G}) \,\middle|\, (xf_j)_{j=1}^n \in L^2(\mathcal{G}) \right\}, \quad \Sigma(\mathcal{G}) := H^1(\mathcal{G}) \cap H^{0,1}(\mathcal{G}).$$

特に, 頂点での連続性 $f_j(0) = f_k(0)$ $(j, k \in [1, n])$ を仮定する場合, $H^1_c(\mathcal{G})$ 等とかく.

以下の結果が, [5] により与えられた.

定理 4.1 ([5])**.** $p = 2$ とする. ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathcal{G})} \leqslant \varepsilon_0$ を満たす任意の $\varphi \in H^1_c(\mathcal{G})$ に対して, $T > 0$ と (4.1) の一意解 $u \in C([T, \infty); L^2(\mathcal{G})) \cap L^4((T, \infty); L^\infty(\mathcal{G}))$ が存在し, 各 $j = 1, 2, \ldots, n$ と任意の $t \geqslant T$ に対して

$$\left\| u_j(t) - \frac{1}{(2it)^{\frac{1}{2}}} \varphi_j\left(\frac{x}{2t}\right) \exp\left(\frac{i|x|^2}{4t} + i\frac{\lambda}{2}\left|\varphi_j\left(\frac{x}{2t}\right)\right|^2 \log t \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \lesssim t^{-\alpha}$$

が成り立つ. ここで, $1/4 < \alpha < 1/2$ である.

定理 4.2 ([5])**.** $p = 2$ とする. ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $\|u_0\|_{\Sigma(\mathcal{G})} =: \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ を満たす任意の $u_0 \in \Sigma_c(\mathcal{G})$ に対して, $u(0) = u_0$ を満たす (4.1) の一意解 $u \in C([0, \infty); \Sigma_c \cap L^\infty)$ が存在する. さらに, $W \in L^\infty(\mathcal{G}) \cap L^2(\mathcal{G})$ が唯一つ存在し, 各 $j = 1, 2, \ldots, n$ と任意の $t \geqslant 1$ に対して

$$\left\| u_j(t) - \frac{1}{(2it)^{\frac{1}{2}}} W_j\left(\frac{x}{2t}\right) \exp\left(\frac{i|x|^2}{4t} + i\frac{\lambda}{2}\left|W_j\left(\frac{x}{2t}\right)\right|^2 \log t \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \lesssim \varepsilon t^{-\frac{1}{4}+\delta} \log t$$

が成り立つ. ここで, $\delta > 0$ は ε に依存する十分小さい定数である.

定理 4.3 ([5])**.** $1 \leqslant p \leqslant 2$ とする. (4.1) の時間大域解 $u \in C([0, \infty); \Sigma_c(\mathcal{G}))$ が, ある $v_+ \in \Sigma_c(\mathcal{G})$ と $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\left\| \left(e^{-it\Delta_K} u\right)_j(t) - v_{+j} \right\|_{\Sigma(\mathbb{R}_+)} \to 0 \quad (t \to \infty)$$

を満たすならば $v_+ \equiv 0$ である.

注意 4.1. 定理 4.1 は, 与えられた漸近形に近づく特殊解を構成する終値問題, 定理 4.2 は, 初期値により決まる漸近形に近づく大域解を構成する初期値問題にあたる. それぞれ $\mathbb{R}$ 上の NLS での先行研究 Ozawa [14], Hayashi, Naumkin [9] の $\mathcal{G}$ 上への拡張になっている. 定理 4.3 は, Cazenave [7] による $\mathbb{R}$ 上の先行研究の拡張である.

証明の方針は, $\mathbb{R}$ 上の先行研究に従う. 詳しくは [5] を参照されたい. 証明の鍵は, 命題 3.2 である. また, Δ_K に付随する Fourier 変換 $\mathscr{F}$ の特徴として, 空間変数 xI と $\mathscr{F}$

を交換する際に頂点での連続性が必要となるため, データの仮定に頂点での連続性が要求される. [16] では, 非線形問題に応用する際に必要となる $\Delta(A,B)$ に付随する一般化 Fourier 変換の諸性質について, 詳しく述べられていなかった. その性質は [5] で与えられた. 以下にその性質を列挙しておく. ただし, ユニタリ性は [16] による.

補題 4.1 ([5])**.** $\varphi \in H^1_c(\mathcal{G})$ に対して

$$X\mathscr{F}^{-1}\varphi = i\mathscr{F}_c^{-1}\partial_x\varphi, \quad \mathscr{F}_c\partial_x\varphi = iX\mathscr{F}\varphi$$

が成立する. ここで $X = xI$, $\partial_x\varphi = {}^t(\varphi_1'(x), \dots, \varphi_n'(x))$ であり

$$\mathscr{F}_c := (\mathcal{F}^- + \mathcal{F}^+)I_n - \frac{2}{n}\mathcal{F}^+J_n, \quad \mathscr{F}_c^{-1} := (\mathscr{F}_c)^* = (\mathcal{F}^+ + \mathcal{F}^-)I_n - \frac{2}{n}\mathcal{F}^-J_n.$$

補題 4.2 ([16])**.** $\langle \mathscr{F}f, g\rangle_{L^2(\mathcal{G})} = \langle f, \mathscr{F}^{-1}g\rangle_{L^2(\mathcal{G})}$ が成立する. 特に, $\|\mathscr{F}f\|_{L^2(\mathcal{G})} = \|f\|_{L^2(\mathcal{G})}$. さらに, 同様の主張が $\mathscr{F}_c$ に対しても成り立つ.

次の性質は, 部分積分を使わないので原点での連続性は必要ない.

補題 4.3 ([5])**.** $\varphi \in H^{0,1}(\mathcal{G})$ に対して

$$\partial_x(\mathscr{F}\varphi) = -i\mathscr{F}_c(X\varphi).$$

補題 4.4 ([5], Hausdorff–Young の不等式)**.** $2 \leqslant p \leqslant \infty$ とする. このとき

$$\|\mathscr{F}f\|_{L^p(\mathcal{G})} \lesssim \|f\|_{L^{p'}(\mathcal{G})}, \qquad \|\mathscr{F}_cf\|_{L^p(\mathcal{G})} \lesssim \|f\|_{L^{p'}(\mathcal{G})}$$

が成立する. ただし, p' は p の Hölder 共役指数である.

参考文献

[1]Riccardo Adami, Claudio Cacciapuoti, Domenico Finco, and Diego Noja, *Fast solitons on star graphs*, Rev. Math. Phys. **23** (2011), no. 4, 409–451.

[2]Tuncay Aktosun, Martin Klaus, and Ricardo Weder, *Small-energy analysis for the self-adjoint matrix Schrödinger operator on the half line*, J. Math. Phys. **52** (2011), no. 10, 102101, 24. MR2894582

[3]Tuncay Aktosun and Ricardo Weder, *Direct and inverse scattering for the matrix Schrödinger equation*, Applied Mathematical Sciences, vol. 203, Springer, Cham, [2021] ©2021. MR4181482

[4]Jaime Angulo Pava and Nataliia Goloshchapova, *Extension theory approach in the stability of the standing waves for the NLS equation with point interactions on a star graph*, Adv. Differential Equations **23** (2018), no. 11-12, 793–846. MR3857871

[5]Kazuki Aoki, Takahisa Inui, Hayato Miyazaki, Haruya Mizutani, and Kota Uriya, *Asymptotic behavior for the long-range nonlinear Schrödinger equation on the star graph with the Kirchhoff boundary condition*, Pure Appl. Anal. **4** (2022), no. 2, 287–311. MR4496088

[6] Kazuki Aoki, Takahisa Inui, and Haruya Mizutani, *Failure of scattering to standing waves for a Schrödinger equation with long-range nonlinearity on star graph*, J. Evol. Equ. **21** (2021), no. 1, 297–312. MR4238207

[7] Thierry Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 10, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[8] Andreea Grecu and Liviu I. Ignat, *The Schrödinger equation on a star-shaped graph under general coupling conditions*, J. Phys. A **52** (2019), no. 3, 035202, 26. MR3899706

[9] Nakao Hayashi and Pavel I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations*, Amer. J. Math. **120** (1998), no. 2, 369–389.

[10] Hiroshi Isozaki, *Inverse spectral and scattering theory—an introduction*, SpringerBriefs in Mathematical Physics, vol. 38, Springer, Singapore, [2020] ©2020. MR4177841

[11] V. Kostrykin and R. Schrader, *Kirchhoff's rule for quantum wires*, J. Phys. A **32** (1999), no. 4, 595–630. MR1671833

[12] Vadim Kostrykin and Robert Schrader, *Laplacians on metric graphs: eigenvalues, resolvents and semigroups*, Quantum graphs and their applications, 2006, pp. 201–225. MR2277618

[13] Ivan Naumkin and Ricardo Weder, *The matrix nonlinear Schrödinger equation with a potential*, J. Math. Pures Appl. (9) **172** (2023), 1–104. MR4556900

[14] Tohru Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), no. 3, 479–493.

[15] Michael Reed and Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. MR493420

[16] Ricardo Weder, *Scattering theory for the matrix Schrödinger operator on the half line with general boundary conditions*, J. Math. Phys. **56** (2015), no. 9, 092103, 24.

[17] Kouki Yoshinaga, 星グラフ上の非線形 *Schrödinger* 方程式の解の漸近挙動について, 修士論文, 大阪大学 (2018).

[18] 谷島 賢二, シュレディンガー方程式 *I*, 朝倉数学体系, vol. 5, 朝倉書店, 2014.

[19] ______, シュレディンガー方程式 *II*, 朝倉数学体系, vol. 6, 朝倉書店, 2014.

[20] 中村 周, 量子力学のスペクトル理論, 共立講座 21 世紀の数学, vol. 26, 共立出版, 2012.

[21] 新井 仁之, 新・フーリエ解析と関数解析学, 培風館, 2010.

[22] 黒田 成俊, スペクトル理論 *II*, 岩波講座 基礎数学, vol. 23, 岩波書店, 2019.

[23] 新井 朝雄, ヒルベルト空間と量子力学 改訂増補版, 共立講座 21 世紀の数学, vol. 16, 共立出版, 2014.