

On a weighted estimate of solutions to the damped wave equation and its application to Nakao's problem in 3D *

東北大学 理学研究科 喜多 航佑

Kosuke Kita

Mathematical Institute, Tohoku University

1 導入

本稿では, 消散波動方程式の解の時空重み付き L^∞ -評価とその応用 ([9] の概説) 及び将来の展望について解説する. 先ず, 三次元における非線形消散波動方程式の次の初期値問題を考察する:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = |u|^p, & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ u(0) = \varphi, \quad \partial_t u(0) = \psi. \end{cases}$$

ここで, u は実数値をとる未知関数であり, $p > 1$ である. また, (φ, ψ) は適切な関数空間に属する与えられた初期データである. この初期値問題は, 一般次元の全空間 $\mathbb{R}^n$ において近年盛んに研究されてきた. 特に, 小さな初期データに対する (1.1) の解の大域的存在を判定する閾値となる臨界指数は $p_F = p_F(n) = 1 + 2/n$ で与えられることが知られている. この p_F が臨界指数であるとは, もし $p > p_F$ であれば, 十分小さな初期データに対して (1.1) の大域解の存在が期待でき, 一方で $1 < p \leq p_F$ の場合, たとえ初期データが十分小さくとも, 適切な初期データを選ぶことで対応する解が有限時間内に爆発するということである.

空間次元 $n = 1, 2$ の場合については [28] において研究されており, 適切に小さく滑らかでコンパクトサポートを持つ初期データに対して大域解の存在が証明されている. また, $p \leq 1 + 2/n$ の場合には爆発とそのライフスパンの評価が導出されている. 一般次元の場合 $n \geq 1$ については [38] において研究されている. その研究では, $p > 1 + 2/n$ のとき, コンパクトサポートを持つ小さな初期データに対する大域解の存在を示す結果が得られている. その証明は, 適切に重み付けされたエネルギー評価に基づいている. また, $p \in (1, 1 + 2/n)$ の場合には解の爆発が証明されている. 一般にコンパクトサポートを持たない指数的減衰を持つ初期データの取扱いについては [20] で行われており, L^2 ノルムの減衰が十分大きな時刻に対し $t^{-n/4}$ によって上から評価されている. また, 初期データが $L^1 \cap H^1$ に属する場合については [6] において考察されており, 優臨界の場合において $n \leq 3$ のとき大域解の存在が確立されている. さらに, 初期データが $L^1 \cap L^\infty$ に関連するソボレフ空間に属する場合については [24] において考察されており, 優臨界の場合における最適な

*Joint work with Professor Vladimir Georgiev (University of Pisa)

時間減衰も得られている。上記の研究以外にも、非線形消散波動方程式に関する多くの結果が存在する（詳細は [8, 10–17, 19, 22, 25, 26, 28, 29, 31, 35, 36, 40, 41] およびその引用文献を参照されたい）。ここで、空間変数の減衰に関して注目すると次の問が自然に現れる：

1. 初期データが小さく、十分速く減衰する場合において、 $p > 1 + \frac{2}{n}$ のときの解の大きな $|x|$ に対する最適な漸近挙動はどのようなになるか？
2. 優臨界の場合において、線形消散波動方程式と類似した時空間減衰を保証するための初期データの最適な減衰条件は何か？

第一の問題に関して、線形消散波動方程式の解は次のような挙動を示すことを証明する：

$$(1.2) \quad (1 + t + |x|^2)^{-\frac{n}{2}}, \quad t > 0.$$

本稿の一つ目の目的は、次元 $n = 3$ の場合に対して、これら上記の問題に答えることである。その為に先ず、三次元空間における次の線形消散波動方程式を考察する：

$$(1.3) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = F(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ u(0) = \varphi, \quad \partial_t u(0) = \psi, \end{cases}$$

ここで、 $\varphi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, および $F \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ は、無限遠においてある程度の減衰を持つ関数である。本論文を簡潔にするため、いくつかの記法を導入する。 $\alpha \in \mathbb{R}^M$ ($M \in \mathbb{N}$) に対して、次の記法を定める：

$$\langle \alpha \rangle := 1 + |\alpha|,$$

ただし、 $|\cdot|$ は通常のユークリッドノルムを表す。さらに、 $\kappa \geq 0$ に対して、次のノルムを定義する：

$$\|f\|_{\infty, \kappa} := \|\langle \cdot \rangle^\kappa f(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}.$$

また、記法 $f \lesssim g$ は、ある正の定数 C を用いて $f \leq Cg$ が成り立つことを意味する。

本研究の目的は、放物型の重みを用いた (1.3) の解の評価を導出することである。消散を伴う波動方程式が持つ 拡散現象 を考慮すると、放物型の重みを導入することは自然である。実際、線形消散波動方程式の解が、適切な初期データを持つ線形拡散方程式の対応する解に漸近することはよく知られている（詳細については [4, 18, 33, 40] を参照）。消散波動方程式は双曲型方程式に分類されるものの、ある意味では放物型方程式の性質を有しているといえる。一方、典型的な双曲型方程式である線形波動方程式の解に対しては、波動型の重み付き評価が知られている。[21] において John は、次の線形波動方程式の解に対する重み付き L^∞ 評価を証明し、その評価を非線形問題に応用した：

$$(1.4) \quad \begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w = F(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ w(0) = \varphi, \quad \partial_t w(0) = \psi. \end{cases}$$

この結果を簡単に纏めると、[21] において、適切な関数 φ, ψ, F に対して次の 2 つの結果が成り立

つ. (i) $F \equiv 0$ とし, w を (1.4) の解とする. このとき, $\kappa > 0$ に対して次の評価が成り立つ:

$$\langle t + |x| \rangle \langle t - |x| \rangle^\kappa |w(t, x)| \lesssim \|\varphi\|_{\infty, \kappa+1} + \|\nabla \varphi\|_{\infty, \kappa+2} + \|\psi\|_{\infty, \kappa+2}.$$

(ii) $\varphi = \psi = 0$ を仮定し, w を (1.4) の解とする. このとき, $\kappa > 0$ かつ $\gamma > 1$ に対して次の評価が成り立つ:

$$\langle t + |x| \rangle \langle t - |x| \rangle^\kappa |w(t, x)| \lesssim \left\| \langle \tau + |y| \rangle^{\kappa+2} \langle \tau - |y| \rangle^\gamma F(\tau, y) \right\|_{L_{\tau, y}^\infty}.$$

これらの評価は, 波動方程式の特性を巧みに利用したものであり, 非線形波動方程式の解析において極めて有用であることが知られている (cf. [23, 37]). しかし, 非線形消散波動方程式に対しては, [38] および [20] によって発展した重み付きエネルギー法が頻繁に用いられているものの, 重み付きの各点評価を用いる手法は十分には発展していない. さらに, 重み付きエネルギー法は, 効果的な消散を伴う非線形消散波動方程式の解析において非常に有用な手法であるが, 消散が効果的でない非線形波動方程式には適用できなくなるという問題がある. 本研究の主要な動機の一つは, 消散波動方程式に対する John 型の評価を確立し, 将来的には波動方程式と消散波動方程式の非線形連立系の解析にそれを応用することである (最終節にてより詳細に述べる).

あるパラメータ $\alpha > 0$ に対して, 次の関数空間とノルムを導入する.

$$Y^\alpha := \{(f, g) \in W^{1, \infty}(\mathbb{R}^3) \times L^\infty(\mathbb{R}^3); \|f, g\|_{Y^\alpha} < +\infty\},$$

$$\|f, g\|_{Y^\alpha} := \|f\|_{\infty, \alpha} + \|\nabla f\|_{\infty, \alpha} + \|g\|_{\infty, \alpha}.$$

Theorem 1.1. (i) (斉次項) $\alpha > 3/2$ とする. $F \equiv 0$ の場合の (1.3) の解 u について, $(\varphi, \psi) \in Y^\alpha$ ならば, 次の評価が成り立つ:

$$(1.5) \quad \left\| \langle t + |x|^2 \rangle^{\frac{3}{2}} u(t, x) \right\|_{L_{t, x}^\infty} \lesssim \|\varphi, \psi\|_{Y^{2\alpha}}.$$

(ii) (デュハメル項) $\alpha > 5/2$ とする. $\varphi = \psi = 0$ の場合の (1.3) の解 u について, 次の評価が成り立つ:

$$(1.6) \quad \left\| \langle t + |x|^2 \rangle^{\frac{3}{2}} u(t, x) \right\|_{L_{t, x}^\infty} \lesssim \left\| \langle s + |y|^2 \rangle^\alpha F(s, y) \right\|_{L_{s, y}^\infty}$$

ただし, 右辺が有界であるような F に対して成立する.

Remark 1.2. (1) [32] では, $F \equiv 0$ の場合の線形消散波動方程式 (1.3) の解について, 次のような重み付き評価が得られている:

$$|u(t, x)| \lesssim \langle t + |x|^2 \rangle^{-\frac{3}{2}} \log(e + t + |x|^2) \|(\varphi, \psi)\|_{Y^3}.$$

本論文の証明を用いれば, 定理 1.1 において $\alpha = 3/2$ の場合に同じ評価が得られることがわかる. また, [32] では $\alpha \in (0, 3/2)$ の場合も扱っており, 初期データの減衰が遅い場合には異なる減衰評価が得られることが示されている (詳細は [32] を参照のこと).

(2) 非線形熱方程式については, 同じ重みを用いた L^∞ ノルムの評価が [7] に見られる ([2] も

参照). この結果から, 本研究の評価が妥当であることが導かれる.

次の節で, (1.3) の解の明示的な公式を用いてこの定理を証明する. [5] の第 VI 章や [34] によると, 解は次の形で明示的に表される.

$$(1.7) \quad u(t, x) = D(t)(\varphi + \psi) + \partial_t D(t)\varphi + \int_0^t D(t - \tau)F(\tau, x)d\tau.$$

ここで

$$(1.8) \quad D(t)f := e^{-\frac{t}{2}}W(t)f + S(t)f,$$

$$(1.9) \quad (W(t)f)(x) := \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} f(x + t\omega) d\sigma(\omega),$$

$$(1.10) \quad (S(t)f)(x) := e^{-\frac{t}{2}} \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{S^2} I_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{t^2 - \rho^2} \right) \frac{1}{2\sqrt{t^2 - \rho^2}} f(x + \rho\omega) \rho^2 d\sigma(\omega) d\rho.$$

ここで, I_ν は次数 ν の変形ベッセル関数であり, ガンマ関数を用いて

$$I_\nu(r) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{r}{2} \right)^{2n + \nu}$$

と定義される. また, ガンマ関数 $\Gamma(r)$ は次のように定義される.

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} s^{r-1} e^{-s} ds.$$

線形あるいは非線形の消散波動方程式の解の評価に関する研究は膨大に存在する. $F \equiv 0$ の場合の (1.3) の解の漸近挙動について, 先駆的な研究は Matsumura [30] によってなされた. [30] では, $\mathbb{R}^n$ における (1.3) にフーリエ変換を適用し, 次のような L^p - L^q 評価を得た.

$$\|u(t)\|_{L^p} \lesssim \langle t \rangle^{-\frac{n}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)} (\|\varphi\|_{L^q} + \|\psi\|_{L^q}) + e^{-\frac{t}{4}} \left(\|\varphi\|_{H^{[\frac{n}{2}] + 1}} + \|\psi\|_{H^{[\frac{n}{2}]}} \right),$$

ここで, $1 \leq q \leq 2 \leq p \leq \infty$, $[\frac{n}{2}]$ は $\frac{n}{2}$ の整数部分を表す. この評価の右辺において, 第一項は (1.3) の低周波成分に対応し, 第二項は高周波成分に対応する. さらに [34] では, Nishihara によって $n = 3$ の場合の評価が改良された (他の次元については [17, 31, 35, 36] も参照).

本稿の 2 つ目の目標は, 重み付き L^∞ 評価を半線形問題 (1.1) に適用することである. デュハメルの原理により, 非線形問題 (1.1) は次の積分方程式として書き直すことができる.

$$(1.11) \quad u(t, \cdot) = D(t)(\varphi + \psi) + \partial_t(D(t)\varphi) + \int_0^t D(t - s)|u(s)|^p ds.$$

(1.1) の解 u は, (1.11) の解として定義される. 時間大域解とその減衰評価を得るために, (1.1) に

対して次の関数空間 X を導入する.

$$X := \{u \in L^\infty(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^3)); \|u\|_X < +\infty\},$$

$$\|u\|_X := \sup_{t>0} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \langle t + |x|^2 \rangle^{\frac{3}{2}} |u(t, x)|.$$

この枠組みでの大域解の存在と減衰評価に関する結果は次のように述べられる.

Theorem 1.3. $p > 5/3$, $\alpha > 3/2$ とする. ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在し, すべての $(\varphi, \psi) \in Y^{2\alpha}$ に対して $\|\varphi, \psi\|_{Y^{2\alpha}} \leq \varepsilon_0$ ならば, 一意的な大域解 $u \in X$ が存在し, 次の評価を満たす.

$$(1.12) \quad \|u\|_X \lesssim \|\varphi, \psi\|_{Y^{2\alpha}}.$$

Remark 1.4. (i) $\alpha > 3/2$ のとき, $Y^{2\alpha} \subset (W^{1,1} \cap W^{1,\infty}) \times (L^1 \cap L^\infty)$ であることがわかる. 実際, $\|f\|_{\infty, \alpha} < +\infty$ ならば,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |f| dx \leq \|f\|_{\infty, 2\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} \langle x \rangle^{-2\alpha} dx < +\infty.$$

したがって, [34] の定理 1.2 より, (1.11) を満たす解 u は $C([0, \infty); L^1 \cap L^\infty \cap H^1) \cap C^1([0, \infty); L^2)$ に属する. ここでは簡単の為, 解のクラスを単に X とする.

(ii) 優臨界 $p > p_F(3) = 5/3$ のとき, (1.1) には小さい初期値に対して大域解が存在することはよく知られている. しかし, この結果では, その大域解に対する新しい時空の減衰評価を得ていることに注意.

2 線形問題の解の評価

本節では, 定理 1.1 を証明する. 本節全体を通して, 以下の不等式が頻繁に使用されることに注意. 任意の $a, b > 0$ に対して,

$$e^{-ar} \leq \left(\frac{b}{a}\right)^b e^{-(b-a)} (1+r)^{-b}, \quad r \geq 0.$$

この評価は直接計算によって簡単に示される.

2.1 定理 1.1 の (i) の証明

最初に, 斉次線形消散波動方程式の解の重み付き評価を示す. もし $F \equiv 0$ ならば, (1.3) の解は次のように明示できる.

$$\begin{aligned} u(t, \cdot) &= D(t)(\varphi + \psi) + \partial_t D(t)\varphi \\ &= e^{-\frac{t}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{8} \right) W(t)\varphi + e^{-\frac{t}{2}} \partial_t (W(t)\varphi) + e^{-\frac{t}{2}} W(t)\psi + S(t) \left(\frac{1}{2}\varphi + \psi \right) + \tilde{S}(t)\varphi, \end{aligned}$$

ここで

$$\tilde{S}(t)f(x) := \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{4\pi} \int_0^t \int_{S^2} \partial_t \left\{ I_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{t^2 - \rho^2} \right) \frac{1}{2\sqrt{t^2 - \rho^2}} \right\} f(x + \rho\omega) \rho^2 d\sigma(\omega) d\rho.$$

Lemma 2.1. $P(t)$ を多項式とする. 任意の $\delta > 0$ および $\kappa \geq 0$ に対して, 次の評価が成り立つ.

$$(2.1) \quad \left| e^{-\delta t} P(t) \int_{S^2} f(x + t\omega) d\sigma(\omega) \right| \lesssim \begin{cases} e^{-\frac{\delta}{2}t} \|f\|_{\infty,0}, \\ e^{-\frac{\delta}{2}t} \langle x \rangle^{-\kappa} \|f\|_{\infty,\kappa}. \end{cases}$$

Proof. $e^{-\delta t} P(t) \lesssim e^{-\frac{\delta}{2}t}$ を考慮すると,

$$\left| e^{-\delta t} P(t) \int_{S^2} f(x + t\omega) d\sigma(\omega) \right| \lesssim e^{-\frac{\delta}{2}t} \int_{S^2} d\sigma(\omega) \|f\|_{\infty,0} \lesssim e^{-\frac{\delta}{2}t} \|f\|_{\infty,0}.$$

また,

$$\begin{aligned} \left| e^{-\delta t} P(t) \int_{S^2} f(x + t\omega) d\sigma(\omega) \right| &\lesssim e^{-\delta t} P(t) \langle x \rangle^{-\kappa} \int_{S^2} \langle x \rangle^{\kappa} |f(x + t\omega)| d\sigma(\omega) \\ &\lesssim e^{-\delta t} P(t) \langle x \rangle^{-\kappa} \int_{S^2} (\langle x + t\omega \rangle^{\kappa} + \langle t\omega \rangle^{\kappa}) |f(x + t\omega)| d\sigma(\omega) \\ &\lesssim e^{-\delta t} P(t) \langle x \rangle^{-\kappa} (\|f\|_{\infty,\kappa} + \langle t \rangle^{\kappa} \|f\|_{\infty}) \\ &\lesssim e^{-\frac{\delta}{2}t} \langle x \rangle^{-\kappa} \|f\|_{\infty,\kappa}. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.2. $P(t)$ を多項式とする. 任意の $\kappa \geq 0$ に対して, 次の評価が成り立つ.

$$\left| e^{-\frac{t}{2}} P(t) W(t) f(x) \right| + \left| e^{-\frac{t}{2}} \partial_t (W(t) f)(x) \right| \lesssim e^{-\frac{t}{4}} \langle t + |x|^2 \rangle^{-\kappa} (\|f\|_{\infty,2\kappa} + \|\nabla f\|_{\infty,2\kappa}).$$

Proof.

$$e^{-\frac{t}{2}} \partial_t (W(t) f)(x) = e^{-\frac{t}{2}} \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(x + t\omega) d\sigma(\omega) + e^{-\frac{t}{2}} \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \omega \cdot (\nabla f)(x + t\omega) d\sigma(\omega).$$

これにより, 補題 2.1 を用いると所望の不等式が導かれる.

□

$S(t)$ 及び $\tilde{S}(t)$ の評価をする為に, 変形ベッセル関数の幾つかの性質を用いる. ここではそれらを証明無しで述べるが詳細は例えば [1] を参照せよ (cf. [34]).

$$(2.2) \quad I_1'(r) = I_0(r) - \frac{1}{r} I_1(r), \quad I_0(r) - \frac{2}{r} I_1(r) = I_2(r),$$

$$(2.3) \quad I_n(r) \lesssim \begin{cases} r^n & (r \leq \frac{1}{2}), \\ r^{-\frac{1}{2}} e^r & (r > \frac{1}{2}). \end{cases}$$

不等式 (2.3) により, 次の評価が得られる.

$$(2.4) \quad e^{-\frac{t}{2}} \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{t^2 - \rho^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \lesssim \begin{cases} e^{-\frac{t}{2}}, & \text{if } \sqrt{t^2 - \rho^2} \leq 1; \\ \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{\langle t^2 - \rho^2 \rangle^{\frac{3}{4}}}, & \text{if } \sqrt{t^2 - \rho^2} \geq 1, \frac{t}{\sqrt{2}} \leq \rho; \\ \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}}, & \text{if } \sqrt{t^2 - \rho^2} \geq 1, \frac{t}{\sqrt{2}} \geq \rho. \end{cases}$$

また, これらを纏めると次の評価も得る.

$$(2.5) \quad e^{-\frac{t}{2}} \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{t^2 - \rho^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \lesssim \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{\langle t^2 - \rho^2 \rangle^{\frac{3}{4}}}.$$

以上の評価を基にして次の $S(t)$ についての各点評価が得られる.

Lemma 2.3. $\alpha > 3/2$ とする. このとき, 次の評価が成り立つ.

$$|S(t)f(x)| + |\tilde{S}(t)f(x)| \lesssim \langle t + |x|^2 \rangle^{-\frac{3}{2}} \|f\|_{\infty, 2\alpha}.$$

Proof. 先ず $S(t)f(x)$ の評価を行う.

$$|S(t)f(x)| \lesssim \mathcal{I}_0(t, x) \|f\|_{\infty, 2\alpha}.$$

ここで,

$$\mathcal{I}_0(t, x) := \int_0^t \int_{\mathbb{S}^2} e^{-\frac{t}{2}} \frac{I_1\left(\frac{t^2 - \rho^2}{2}\right)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \rho^2 \langle x + \rho\omega \rangle^{-2\alpha} d\sigma(\omega) d\rho.$$

$t \geq \sqrt{2}$ として良い. 以下の不等式を示せば十分である:

$$(2.6) \quad \mathcal{I}_0(t, x) \lesssim \begin{cases} \langle t \rangle^{-\frac{3}{2}}, \\ \langle x \rangle^{-3}. \end{cases}$$

この為に, 変形ベッセル関数の評価 (2.4) に従って, $\mathcal{I}_0$ を三つの項に分割する.

$$\mathcal{I}_0(t, x) \lesssim \sum_{j=1}^3 \mathcal{I}_{0j}(t, x).$$

ここで,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{01}(t, x) &:= \int_{\sqrt{t^2-1}}^t \int_{\mathbb{S}^2} e^{-\frac{t}{2}} \rho^2 \langle x + \rho\omega \rangle^{-2\alpha} d\sigma(\omega) d\rho, \\ \mathcal{I}_{02}(t, x) &:= \int_{\frac{t}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{t^2-1}} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{\langle t^2 - \rho^2 \rangle^{\frac{3}{4}}} \rho^2 \langle x + \rho\omega \rangle^{-2\alpha} d\sigma(\omega) d\rho, \\ \mathcal{I}_{03}(t, x) &:= \int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}} \rho^2 \langle x + \rho\omega \rangle^{-2\alpha} d\sigma(\omega) d\rho.\end{aligned}$$

$\mathcal{I}_{01}$ と $\mathcal{I}_{02}$ に関しては指数減衰のおかげで容易に次の評価が得られる.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{01}(t, x) + \mathcal{I}_{02}(t, x) &\lesssim \int_{\frac{t}{\sqrt{2}}}^t \int_{\mathbb{S}^2} e^{-\frac{t}{8}} \rho^2 \langle x + \rho\omega \rangle^{-2\alpha} d\sigma(\omega) d\rho \\ &\lesssim e^{-\frac{t}{8}} \langle x \rangle^{-2\alpha} \int_{\frac{t}{\sqrt{2}}}^t \int_{\mathbb{S}^2} \rho^2 \langle \rho \rangle^{2\alpha} d\sigma(\omega) d\rho \\ &\lesssim e^{-\frac{t}{16}} \langle x \rangle^{-2\alpha}.\end{aligned}$$

但し, ここで $\langle a \rangle \leq \langle a - b \rangle \langle b \rangle$ なる不等式を用いた. 次に $\mathcal{I}_{03}$ の評価を行う為, 次のよく知られた等式を用いる; $\rho > 0, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, g \in C([0, \infty))$ に対して,

$$(2.7) \quad \frac{\rho}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} g(|x + \rho\omega|) d\sigma(\omega) = \frac{1}{2|x|} \int_{||x|-\rho}^{|x|+\rho} \lambda g(\lambda) d\lambda.$$

この等式 (2.7) により,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{03}(t, x) &\lesssim \langle t \rangle^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \int_{\mathbb{S}^2} e^{-\frac{\rho^2}{4t}} \rho^2 \langle x + \rho\omega \rangle^{-2\alpha} d\sigma(\omega) d\rho \\ &\lesssim \langle t \rangle^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \int_{||x|-\rho|}^{|x|+\rho} \frac{\rho\lambda}{|x|} \langle \lambda \rangle^{-2\alpha} d\lambda d\rho \\ &\lesssim \langle t \rangle^{-\frac{3}{2}} \int_0^{|x|+\frac{t}{\sqrt{2}}} \left(\int_{||x|-\lambda|}^{|x|+\lambda} \frac{\rho}{|x|} d\rho \right) \lambda \langle \lambda \rangle^{-2\alpha} d\lambda \\ &\lesssim \langle t \rangle^{-\frac{3}{2}} \int_0^\infty \langle \lambda \rangle^{-2\alpha+2} d\lambda \lesssim \langle t \rangle^{-\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

ここで $\alpha > 3/2$ なので $-2\alpha + 2 < -1$ となることに注意.

次に x に関する減衰については,

$$\frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}} \lesssim \langle \rho \rangle^{-3}.$$

であることに注意し (2.7) を用いて変形すると

$$\mathcal{I}_{03}(t, x) \lesssim \iint_{\Omega_0} \langle \rho \rangle^{-3} \frac{\rho\lambda}{|x|} \langle \lambda \rangle^{-2\alpha} d\lambda d\rho,$$

となる。ここで,

$$\Omega_0 = \Omega_0(t, x) := \left\{ (\rho, \lambda); 0 \leq \rho \leq \frac{t}{\sqrt{2}}, |x| - \rho \leq \lambda \leq |x| + \rho \right\}.$$

であり, この積分領域を

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{03}^j(t, x) &:= \iint_{\Omega_j} \langle \rho \rangle^{-3} \frac{\rho \lambda}{|x|} \langle \lambda \rangle^{-2\alpha} d\lambda d\rho, \\ \Omega_0 &= \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 := \left\{ (\rho, \lambda) \in \Omega_0; \rho \geq \frac{|x|}{2} \right\}, \quad \Omega_2 := \left\{ (\rho, \lambda) \in \Omega_0; \rho \leq \frac{|x|}{2} \right\}. \end{aligned}$$

と分割して評価することで得られる。基本的には t の減衰と同様の計算となる為, ここでは詳細は省略する。

最後に $\tilde{S}(t)$ の評価について簡単に述べる。変形ベッセル関数の性質 (2.2) より, 直接計算により次の関係が成り立つ。

$$\partial_t \left\{ \frac{I_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{t^2 - \rho^2} \right)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \right\} = \left\{ I_0 \left(\frac{\sqrt{t^2 - \rho^2}}{2} \right) - \frac{4}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} I_1 \left(\frac{\sqrt{t^2 - \rho^2}}{2} \right) \right\} \frac{t}{2(t^2 - \rho^2)}.$$

よって再び (2.2) より

$$\partial_t \left\{ \frac{I_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{t^2 - \rho^2} \right)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \right\} = \frac{t}{2(t^2 - \rho^2)} I_2 \left(\frac{\sqrt{t^2 - \rho^2}}{2} \right)$$

となるが (2.3) を用いると,

$$\left| e^{-\frac{t}{2}} \partial_t \left\{ \frac{I_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{t^2 - \rho^2} \right)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \right\} \right| \lesssim \begin{cases} e^{-\frac{t}{2}} t, & \text{if } \sqrt{t^2 - \rho^2} \leq 1, \\ e^{-\frac{\rho^2}{4t}} \frac{t}{\langle t^2 - \rho^2 \rangle^{\frac{5}{4}}}, & \text{if } \sqrt{t^2 - \rho^2} \geq 1, \frac{t}{\sqrt{2}} \leq \rho, \\ e^{-\frac{\rho^2}{4t}} t^{-\frac{3}{2}}, & \text{if } \sqrt{t^2 - \rho^2} \geq 1, \frac{t}{\sqrt{2}} \geq \rho. \end{cases}$$

従って $\tilde{S}(t)$ の評価は $S(t)$ の評価と同様の手法で示される。 $\square$

Proof of (i) in Theorem 1.1. 解の明示表現公式と Lemma 2.1, 2.2, 2.3 を組み合わせると Theorem 1.1 の (i) が得られる。 $\square$

2.2 定理 1.1 の (ii) の証明

次に, 初期データが 0 である非斉次の消散波動方程式について考える. (即ち, (1.3) with $\varphi = \psi = 0$):

$$(2.8) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = F(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ u(0) = \partial_t u(0) = 0. \end{cases}$$

デュハメル原理により, 方程式 (2.8) の解 u は以下の様に記述できる.

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^t D(t-s)F(s, x)ds \\ &= \int_0^t e^{-\frac{t-s}{2}} W(t-s)F(s, x)ds + \int_0^t S(t-s)F(s, x)ds. \end{aligned}$$

Lemma 2.4. 任意の $\kappa \geq 0$ に対して, 次の評価が成り立つ.

$$(2.9) \quad \left| \int_0^t e^{-\frac{t-s}{2}} W(t-s)F(s, x)ds \right| \lesssim \langle t + |x|^2 \rangle^{-\kappa} \|\langle s + |y|^2 \rangle^\kappa F(s, y)\|_{L_{s,y}^\infty}$$

Proof. 指数減衰する項 $e^{-\frac{t-s}{2}}$ と Lemma 2.2 の各点評価により直ちに示される. $\square$

Lemma 2.5. $\alpha > 5/2$ とする. このとき, 次の評価が成立する.

$$(2.10) \quad \left| \int_0^t S(t-\tau)(F(\tau))(x)d\tau \right| \lesssim \langle t + |x|^2 \rangle^{-\frac{3}{2}} \|\langle s + |y|^2 \rangle^\alpha F(s, y)\|_{L_{s,y}^\infty}$$

holds.

Proof. 次の 2 つの評価を示せば十分である.

$$(2.11) \quad \left| \int_0^t S(t-\tau)F(\tau, x)d\tau \right| \lesssim \langle t \rangle^{-\frac{3}{2}} \|\langle s + |y|^2 \rangle^\alpha F(s, y)\|_{L_{s,y}^\infty},$$

$$(2.12) \quad \left| \int_0^t S(t-\tau)F(\tau, x)d\tau \right| \lesssim \langle x \rangle^{-3} \|\langle s + |y|^2 \rangle^\alpha F(s, y)\|_{L_{s,y}^\infty}.$$

先ず 1 つ目の評価 (2.11) を示す. 次の様に変形する.

$$(2.13) \quad |S(t-\tau)(F(\tau))(x)| \lesssim \text{Int}_\Omega(t-\tau, \tau, |x|) \|\langle s + |y|^2 \rangle^\alpha F(s, y)\|_{L_{s,y}^\infty}.$$

ここで,

$$\text{Int}_\Omega(t-\tau, \tau, |x|) = \iint_\Omega e^{-\frac{t-\tau}{2}} \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{(t-\tau)^2 - \rho^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \rho^2}} \frac{\rho}{|x|} \frac{\lambda}{\langle \tau + \lambda^2 \rangle^\alpha}$$

かつ

$$\Omega = \Omega(t-\tau, |x|) = \{(\rho, \lambda); 0 < \rho < t-\tau, ||x| - \rho| < \lambda < |x| + \rho\}.$$

変形ベッセル函数の評価 (2.5) を用いて次の評価を得る.

$$\int_0^t \text{Int}_\Omega(t - \tau, \tau, |x|) d\tau \lesssim \int_0^t \left(\iint_\Omega \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4(t-\tau)}}}{\langle (t-\tau)^2 - \rho^2 \rangle^{\frac{3}{4}}} \frac{\rho}{|x|} \frac{\lambda}{\langle \tau + \lambda^2 \rangle^\alpha} \right) d\tau.$$

次に注意せよ.

$$(2.14) \quad \int_0^t \left(\iint_\Omega \frac{\rho \lambda}{|x| \langle \tau + \lambda^2 \rangle^\alpha} d\lambda d\rho \right) d\tau \lesssim 1.$$

この不等式は補題の証明中で重要となる. 十分小さな $\eta > 0$ を用いて $\alpha = \frac{5}{2} + \eta$ とすると,

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\iint_\Omega \frac{\rho \lambda d\lambda d\rho}{|x| \langle \tau + \lambda^2 \rangle^\alpha} \right) d\tau &\lesssim \int_0^t \frac{1}{\langle \tau \rangle^{1+\frac{\eta}{2}}} \left(\int_0^\infty \left(\int_{||x|-\lambda|}^{|x|+\lambda} \frac{\rho d\rho}{|x|} \right) \frac{\lambda}{\langle \lambda \rangle^{3+\eta}} d\lambda \right) d\tau \\ &\lesssim \int_0^\infty \frac{d\tau}{\langle \tau \rangle^{1+\frac{\eta}{2}}} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\langle \lambda \rangle^{1+\eta}} \lesssim 1. \end{aligned}$$

これらの準備の下で, 次の評価を示す.

$$(2.15) \quad \int_0^t \text{Int}_\Omega(t - \tau, \tau, |x|) d\tau \lesssim \langle t \rangle^{-\frac{3}{2}}.$$

先ず単純計算により

$$\frac{e^{-c\frac{\rho^2}{t-s}}}{\langle (t-s)^2 - \rho^2 \rangle^{\frac{3}{4}}} \leq \langle t-s \rangle^{-\frac{3}{2}}$$

となることに注意. 積分変数が $\tau < t/2$ となるとき, $\langle t-\tau \rangle^{-3/2} \lesssim \langle t \rangle^{-3/2}$ となるので, (2.14) を考慮すると

$$\int_0^{\frac{t}{2}} \text{Int}_\Omega(t - \tau, \tau, |x|) ds \lesssim \langle t \rangle^{-3/2}$$

を得る. 一方, $\tau \geq t/2$ の場合は,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{t}{2}}^t \text{Int}_\Omega(t - \tau, \tau, |x|) d\tau &\lesssim \langle t \rangle^{-\alpha} \int_0^t \left(\int_0^{t-\tau} \left(\int_{||x|-\rho|}^{|x|+\rho} \lambda d\lambda \right) \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4(t-\tau)}}}{\langle (t-\tau)^2 - \rho^2 \rangle^{\frac{3}{4}}} \frac{\rho}{|x|} d\rho \right) d\tau \\ &\lesssim \langle t \rangle^{-\alpha} \int_0^t \left(\int_0^{t-\tau} \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4(t-\tau)}}}{\langle (t-\tau)^2 - \rho^2 \rangle^{\frac{3}{4}}} \rho^2 d\rho \right) d\tau \\ &\lesssim \langle t \rangle^{-\alpha} \int_0^t d\tau. \end{aligned}$$

ここで,

$$(2.16) \quad \int_0^{t-\tau} \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4(t-\tau)}}}{\langle (t-\tau)^2 - \rho^2 \rangle^{\frac{3}{4}}} \rho^2 d\rho \lesssim 1.$$

となることを用いた. $\alpha - 1 > 3/2$ であるから,

$$\int_{\frac{t}{2}}^t \text{Int}_\Omega(t - \tau, \tau, |x|) ds \lesssim \langle t \rangle^{-\alpha} \int_0^t d\tau \lesssim \langle t \rangle^{-\frac{3}{2}}$$

となり (2.11) が示された.

空間変数に関する減衰評価 (2.12) は, $|S(t - \tau)F(\tau, x)|$ に Lemma 2.3 を適用し, τ に関する積分を実行することで直ちに得られる. $\square$

Proof of (ii) in Theorem 1.1. Lemma 2.4, 2.5 及び (2.8) の解の明示表現より, 定理の主張が従う. $\square$

3 応用

本節では, 得られた評価の応用として Theorem 1.3 の証明を述べる. その為に函数空間を導入する.

$$X = \{u \in L^\infty(0, \infty; L^\infty(\mathbb{R}^3)); \|u\|_X < \infty\},$$

$$\|u\|_X = \left\| \langle t + |x|^2 \rangle^{\frac{3}{2}} u(t, x) \right\|_{L_{t,x}^\infty}.$$

Proof of Theorem 1.3. 本証明は積分方程式の解の存在証明でよく知られた標準的な手法に則る. 次の様に近似方程式の解 $(u_n)_{n \geq 0}$ を定める.

$$u^{(0)}(t, \cdot) := D(t)(\varphi + \psi) + \partial_t(D(t)\varphi),$$

$$u^{(n+1)}(t, \cdot) := u^{(0)}(t, \cdot) + \int_0^t D(t-s) \left| u^{(n)}(s) \right|^p ds.$$

Theorem 1.1 の (i) より,

$$(3.1) \quad \left\| u^{(0)} \right\|_X \leq C_1 \|\varphi, \psi\|_{Y^{2\alpha}}.$$

ここで, $C_1 > 0$ はある定数である. 仮定より $p > 5/3$ であるので, $\beta - \frac{3}{2}p \leq 0$ となる $\beta > 5/2$ が存在する. よって, Theorem 1.1 の (ii) より, このような $\beta > 5/2$ に対し,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t D(t-s) \left| u^{(n)}(s) \right|^p ds \right\|_X &\lesssim \left\| \langle s + |y|^2 \rangle^\beta \left| u^{(n)} \right|^p \right\|_{L_{s,y}^\infty} \\ &\lesssim \left\| \langle s + |y|^2 \rangle^{\beta - \frac{3}{2}p} \right\|_{L_{s,y}^\infty} \left\| u^{(n)} \right\|_X^p \\ &\lesssim \left\| u^{(n)} \right\|_X^p. \end{aligned}$$

以上より, 任意の $n \geq 0$ に対し,

$$(3.2) \quad \left\| u^{(n+1)} \right\|_X \leq C_1 \|\varphi, \psi\|_{Y^{2\kappa}} + C_2 \left\| u^{(n)} \right\|_X^p$$

となる ($C_2 > 0$ は定数). ここで $\|\varphi, \psi\|_{Y^{2\kappa}} = \varepsilon$ とおき,

$$X(M) := \{u \in X; \|u\|_X \leq M\} \quad (M > 0)$$

とする. 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し, $u^{(n)} \in X(2\varepsilon C_0)$ ならば $u^{(n+1)} \in X(2\varepsilon C_0)$ となる. 但し, $C_0 = \max(C_1, C_2)$ とする. また, 同様に十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し,

$$(3.3) \quad \left\| u^{(n+1)} - u^{(n)} \right\|_X \leq \frac{1}{2} \left\| u^{(n)} - u^{(n-1)} \right\|_X$$

となることが示される.

従って, $(u_n)_{n \geq 0}$ は十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し $X(2\varepsilon C_0)$ におけるコーシー列となることが分かり, その極限として解が構成される. $\square$

4 今後の展望について

ここまでで, 3次元における単独の消散波動方程式について述べてきたが, 何故このような線形の解の重み付き評価の見直しを行ったかについて, 最後に未解決問題に触れつつ述べる.

次の非線形消散波動方程式と非線形波動方程式の連立系の初期値問題について考える.

$$(4.1) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u = |v|^p, & t > 0, x \in \mathbb{R}^N, \\ \partial_t^2 v - \Delta v = |u|^q, & t > 0, x \in \mathbb{R}^N, \\ u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = u_1, \\ v(0) = v_0, \quad \partial_t v(0) = v_1. \end{cases}$$

この初期値問題の臨界指数を決定せよという問題は九州大学の中尾埴宏名誉教授により提唱された ([39] を参照) が, 現状では未解決である. これは波動方程式における消散項の影響を非線形問題から理解しようとする一つの試みであると考えている. この問題に関する結果は現在のところ, [3, 27, 39] のみであり, いずれも小さな初期データに対する有限時刻爆発解の存在に関するものである. ここで, 連立系に対する臨界指数とは次の様な $\alpha_c = \alpha_c(p, q, N)$ の事をいう:

(i) $\alpha_c \geq 0$ のとき, 小さな初期値に対しても大域解が存在しない. (解の爆発)

(ii) $\alpha_c < 0$ のとき, 小さな初期値に対して大域解が存在する.

関連する波動方程式同士の連立系や消散波動方程式同士の連立系については多くの研究結果があり, 臨界指数は既に知られている. (それら歴史的経緯については [27] のイントロダクションに纏めた. また, その参考文献を参照.) 先行研究 [3, 27, 39] では $\mathbb{R}^N$ で考察されているが, ここでは $N = 3$ の場合について触れる. 上記の論文では

$$\tilde{\alpha}(p, q, 3) := \max \left\{ \frac{p+1}{pq-1} - \frac{3}{2}, \frac{q+1}{pq-1} - \frac{3}{2}, \frac{1/p+2}{pq-1} - 1 \right\} > 0$$

とするとき, 初期値に適当な正值性を課すと時間大域的な弱解は存在しない事が示されている. 上述の様に, 時間大域解の存在に関する結果は知られていないので, この $\tilde{\alpha}$ が臨界であるかどうかは

全く分かっていない. また, $\tilde{\alpha}$ について, $\max$ 内の 1 つ目と 2 つ目の指数は消散波動方程式の連立系の臨界指数と一致しているので, 3 つ目の $\frac{1/p+2}{pq-1} - 1$ が消散波動方程式と波動方程式の相互作用の影響から来るものであると推測できる.

波動方程式は基本的にエネルギー散逸の構造が無い為, 導入で述べたような消散波動方程式に有効な重み付きのエネルギー法が中尾の問題には適用できないという背景の下, 消散波動方程式に対して波動方程式で知られたアプローチを取ることによって (4.1) の時間大域解の構成が出来ないかと考えた. そこで導入に述べた John [21] の評価と適合するような消散波動方程式の解の評価を導出したというのが本稿の主定理である. さらに, Lemma 2.4, 2.5 は次の様に改良できることが最近分かった.

Theorem 4.1. $\alpha > 3/2, \gamma > 1$ とする. このとき次の評価が成り立つ.

$$(4.2) \quad \left| \int_0^t D(t-s)F(\tau, x)d\tau \right| \lesssim \langle t + |x|^2 \rangle^{-\frac{3}{2}} \|\langle s + |y|^2 \rangle^\alpha \langle s - |y| \rangle^\gamma F(s, y)\|_{L_{s,y}^\infty}$$

当然, この Theorem 4.1 を単独の非線形消散波動方程式に用いても Theorem 1.3 を示すことが出来るが, この定理の利点は右辺のノルム内の重み関数を, 波動方程式に特有である $t - |x|$ の重みと消散の効果である $t + |x|^2$ の重みに分解したことにある. これにより, この評価と [21] による波動方程式の評価を組み合わせることで, 部分的に $N = 3$ のときの (4.1) の時間大域解の構成に成功した (現在準備中). また, その際に光錐付近 ($t \sim |x|$) の挙動に注目すると, 大域解の存在を示す際の縮小写像の構成において $\frac{1/p+2}{pq-1} - 1 < 0$ なる条件が現れることが分かる. 他の条件も現れるので以前として $\tilde{\alpha}$ が臨界かどうかは未解決であるが, 上記の事情から消散波動方程式の解に対する時空重み付き評価の再考は, 本問題に関する一つの効果的なアプローチであると言える.

参考文献

- [1] M. Abramowitz; I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, Washington, DC, 1964.
- [2] T. Cazenave; F. Dickstein; I. Naumkin; F. B. Weissler, Sign-changing self-similar solutions of the nonlinear heat equation with positive initial value, *Amer. J. Math.*, **142** (2020), no. 5, 1439-1495.
- [3] W. Chen; M. Reissig, Blow-up of solutions to Nakao's problem via an iteration argument, *J. Differ. Equ.*, **275** (2021), 733-756.
- [4] R. Chill; A. Haraux, An optimal estimate for the difference of solutions of two abstract evolution equations, *J. Differential Equations*, **193** (2003), no. 2, 385-395.
- [5] R. Courant; D. Hilbert, Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations. (Vol. II by R. Courant.) Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons, Inc.), New York-London, 1962.

- [6] M. D’Abbicco; S. Lucente; M. Reissig, Semi-linear wave equations with effective damping, *Chinese Ann. Math. Ser. B*, **34** (2013), no. 3, 345-380.
- [7] K. Fujiwara; V. Georgiev; T. Ozawa, Note for global existence of semilinear heat equation in weighted L^∞ space, *Pliska Stud. Math.*, **30** (2019), 7-20.
- [8] K. Fujiwara; M. Ikeda; Y. Wakasugi, Estimates of lifespan and blow-up rates for the wave equation with a time-dependent damping and a power-type nonlinearity, *Funkcial. Ekvac.*, **62** (2019), no. 2, 157-189.
- [9] V. Georgiev; K. Kita, Weighted L^∞ -estimates for solutions of the damped wave equation in three space dimensions and its application, submitted.
- [10] N. Hayashi; E. I. Kaikina; P. I. Naumkin, Damped wave equation with super critical nonlinearities, *Differential Integral Equations*, **17** (2004), no. 5-6, 637-652.
- [11] N. Hayashi; E. I. Kaikina; P. I. Naumkin, Damped wave equation with a critical nonlinearity, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **358** (2006), no. 3, 1165-1185.
- [12] N. Hayashi; E. I. Kaikina; P.I. Naumkin, On the critical nonlinear damped wave equation with large initial data, *J. Math. Anal. Appl.*, **334** (2007), no. 2, 1400-1425.
- [13] N. Hayashi; P. I. Naumkin, Damped wave equation with a critical nonlinearity in higher space dimensions, *J. Math. Anal. Appl.*, **446** (2017), no. 1, 801-822.
- [14] M. Ikeda; T. Ogawa, Lifespan of solutions to the damped wave equation with a critical nonlinearity, *J. Differential Equations*, **261** (2016), no. 3, 1880-1903.
- [15] M. Ikeda; M. Sobajima, Sharp upper bound for lifespan of solutions to some critical semi-linear parabolic, dispersive and hyperbolic equations via a test function method, *Nonlinear Anal.*, **182** (2019), 57-74.
- [16] M. Ikeda; Y. Wakasugi, A note on the lifespan of solutions to the semilinear damped wave equation, *Proc. Amer. Math. Soc.* **143** (2015), no. 1, 163-171.
- [17] R. Ikehata; Y. Miyaoka; T. Nakatake, Decay estimates of solutions for dissipative wave equations in $\mathbf{R}^N$ with lower power nonlinearities, *J. Math. Soc. Japan*, **56** (2004), no. 2, 365-373.
- [18] R. Ikehata; K. Nishihara, Diffusion phenomenon for second order linear evolution equations, *Studia Math.*, **158** (2003), no. 2, 153-161.
- [19] R. Ikehata; K. Nishihara; H. Zhao, Global asymptotics of solutions to the Cauchy problem for the damped wave equation with absorption, *J. Differential Equations*, **226** (2006), no. 1, 1-29.

- [20] R. Ikehata; K. Tanizawa, Global existence of solutions for semilinear damped wave equations in $\mathbf{R}^N$ with noncompactly supported initial data, *Nonlinear Anal.*, **61** (2005), no. 7, 1189-1208.
- [21] F. John, Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions, *Manuscripta Math.*, **28** (1979), no. 1-3, 235-268.
- [22] G. Karch, Selfsimilar profiles in large time asymptotics of solutions to damped wave equations, *Studia Math.*, **143** (2000), no. 2, 175-197.
- [23] S. Katayama, Global solutions and the asymptotic behavior for nonlinear wave equations with small initial data. MSJ Memoirs, 36, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2017.
- [24] T. Kawakami; H. Takeda, Higher order asymptotic expansions to the solutions for a nonlinear damped wave equation, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, **23** (2016), no. 5, Art. 54, 30 pp.
- [25] S. Kawashima; M. Nakao; K. Ono, On the decay property of solutions to the Cauchy problem of the semilinear wave equation with a dissipative term, *J. Math. Soc. Japan*, **47** (1995), no. 4, 617-653.
- [26] M. Kirane; M. Qafsaoui, Fujita's exponent for a semilinear wave equation with linear damping, *Adv. Nonlinear Stud.*, **2** (2002), no. 1, 41-49.
- [27] K. Kita; R. Kusaba, A remark on the blowing up of solutions to Nakao's problem, *J. Math. Anal. Appl.*, **513** (2022), 126199.
- [28] T.-T. Li; Y. Zhou, Breakdown of solutions to $\square u + u_t = |u|^{1+\alpha}$, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, **1** (1995), no. 4, 503-520.
- [29] P. Marcati; K. Nishihara, The L^p - L^q estimates of solutions to one-dimensional damped wave equations and their application to the compressible flow through porous media, *J. Differential Equations*, **191** (2003), no. 2, 445-469.
- [30] A. Matsumura, On the asymptotic behavior of solutions of semi-linear wave equations, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **12** (1976,1977), no. 1, 169-189.
- [31] T. Narazaki, L^p - L^q estimates for damped wave equations and their applications to semi-linear problem, *J. Math. Soc. Japan*, **56** (2004), no. 2, 585-626.
- [32] T. Narazaki; K. Nishihara, Asymptotic behavior of solutions for the damped wave equation with slowly decaying data, *J. Math. Anal. Appl.*, **338** (2008), no. 2, 803-819.
- [33] K. Nishihara, Asymptotic behavior of solutions of quasilinear hyperbolic equations with linear damping, *J. Differential Equations*, **137** (1997), no. 2, 384-395.

- [34] K. Nishihara, L^p - L^q estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application, *Math. Z.*, **244** (2003), no. 3, 631-649.
- [35] T. Hosono; T. Ogawa, Large time behavior and L^p - L^q estimate of solutions of 2-dimensional nonlinear damped wave equations, *J. Differential Equations*, **203** (2004), no. 1, 82-118
- [36] S. Sakata; Y. Wakasugi, Movement of time-delayed hot spots in Euclidean space, *Math. Z.*, **285** (2017), no. 3-4, 1007-1040.
- [37] C. D. Sogge, Lectures on non-linear wave equations. Second edition. International Press, Boston, MA, 2008.
- [38] G Todorova; B. Yordanov, Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping, *J. Differential Equations*, **174** (2001), no. 2, 464-489.
- [39] Y. Wakasugi, A note on the blow-up of solutions to Nakao's problem, *in: New Trends in Analysis and Interdisciplinary Applications*, Birkhäuser/Springer, 2017, pp. 545-551.
- [40] H. Yang; A. Milani, On the diffusion phenomenon of quasilinear hyperbolic waves, *Bull. Sci. Math.*, **124** (2000), no. 5, 415-433.
- [41] Qi S. Zhang, A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping: the critical case, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **333** (2001), no. 2, 109-114.