

Quasi-variational inequality with time-nonlocal dependence in elastoplasticity

京都教育大学 赤川 佳穂[†]

概要 この講究録は、ひずみ硬化を伴う弾塑性モデルを記述する仮似変分不等式の適切性について述べる。ここでは、特に塑性変形の降伏条件に対応する閾値関数に関する連続依存性について焦点を当てて証明の詳細を述べる。合わせて、これに関連した結果を紹介する。

1 導入

1.1 節では、制約集合が未知関数に依存する変分問題の一般的な枠組みを紹介する。1.2 節では、未知関数の時間非局所的依存性が現れる現象の具体例として、ひずみ硬化について述べる。我々の扱うフルモデルを 1.3 節で与える。

1.1 発展包含

仮似変分不等式の理論において、未知関数への依存性を 2 つのタイプを区別することが重要である。一つは制約集合が未知関数の値ごと依存する局所型、もう一方は制約集合が未知関数そのものに依存する非局所型である。関連研究の例として、[5, 6, 10, 17, 18, 19, 20, 31] を参照できる。次に、これら 2 つのタイプの未知関数依存性の区別について説明する。今、時刻 $T > 0$ を有限時刻、 H と V を実 Hilbert 空間とする。未知関数 $\sigma : [0, T] \rightarrow H$ に対して、2 つの発展包含

$$\sigma'(t) + \partial I_{K_1(t, \sigma(t))} \ni 0 \quad \text{in } H, \quad \text{for a.a. } t \in (0, T)$$

と

$$\sigma'(t) + \partial I_{K_2(t; \sigma)} \ni 0 \quad \text{in } H, \quad \text{for a.a. } t \in (0, T)$$

を取り上げる。ここで、 ∂I_{K_i} は指示関数 I_{K_i} の H における劣微分を表し、 $K_i \subset H$ は閉凸集合である。 K_1 は H の要素としての未知関数の値 $\sigma(t)$ に依存するのに対し、 K_2 は $L^2(0, T; H)$ の要素としての未知関数 σ そのものに依存する。後者の場合は、解の過去の履歴に依存して系が時間発展することを意味する。言い換えれば、系は時間非局所的構造を持つと言える。

先行研究 [25, 30] では、未知関数の依存性が自然に時間非局所的になる問題について議論している。ここで、その時間非局所的依存性がどのように自然に生じるかを説明する。この問題は 2 つの系から構成される。1 つは上記の発展包含であり、もう 1 つは変位ベクトル $\mathbf{u}$ に対する運動方程式である。先行研究 [25] で考慮された枠組みでは、未知関数 $\mathbf{u}$ に対する局所的

[†]2025 年 3 月まで岐阜工業高等専門学校に所属

依存性を持つ制約集合が, 新しい変数 $\mathbf{v}$ に対する非局所的依存性を持つように再定式化される. すなわち, 元の未知関数 $\mathbf{u}$ を時間変数 t に関する $\mathbf{v}$ の積分として以下のように表す.

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{v}(\ell) d\ell + \mathbf{u}_0 \quad \text{for any } t \in [0, T].$$

したがって, $\mathbf{u}$ における局所的な依存性は, $\mathbf{v}$ の観点からみると非局所的になる. ここで $\mathbf{u}_0$ は与えられた初期値である. ここまでをまとめると, 本講究録で考察する発展包含は, ある系に対する解作用素 $S : L^2(0, T; H) \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{V})$ を用いて以下の形で表現できる.

$$\sigma'(t) + \partial I_{K(t; S\sigma)} \ni 0 \quad \text{in } H, \quad \text{for a.a. } t \in (0, T).$$

この設定では, 制約集合 $K \subset H$ は時刻 $t \in [0, T]$ と関数 $S\sigma \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ に依存する.

次節では, 時間非局所的依存性が現れる具体的な物理現象について議論する.

1.2 ひずみ硬化弾塑性変形

弾塑性モデルの最も重要な数学的研究は, 1976 年に Duvaut と Lions [4] によって導入された. この論文において著者らは完全塑性モデルを変分不等式で考察した. この先駆的な結果の後, 多くの結果がある (例えば [11, 12, 13, 14, 15]). 本講究録では, 移動硬化を扱った Showalter [29] と Visintin [32] に注目する. 彼らの本質的なアイデアは, 制約集合が未知関数に従って平行移動するというものである. このアイデアにより, Bauschinger 効果などの非線形現象を表現する様々なモデルを取り扱うことが可能になる. 弾塑性モデルは, 閉凸制約集合に関連付けられた指示関数の劣微分を含む発展包含として定式化される. 制約集合は時間非局所的な意味で未知関数自身に依存する. 具体的には, 関数の時間積分が制約集合の変数として用いられる. これはひずみの時間履歴を表し, 弾塑性のひずみ硬化を表現する.

それでは, 1976 年に Duvaut と Lions によって導入されたオリジナルのモデルを思い起こそう. 空間次元を $d \geq 2$ とする. 材料が領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を占めるとき, 時刻 t , 位置 $x \in \Omega$ での変位ベクトル $\mathbf{u}(t, x)$ を考える. ひずみテンソル $\varepsilon(\mathbf{u})$ は以下のように定義する:

$$\varepsilon(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T).$$

Prandtl–Reuss モデルでは, 全ひずみテンソル $\varepsilon(\mathbf{u})$ が弾性ひずみ ε_e と塑性ひずみ ε_p に加法的に分解できると仮定する.

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \varepsilon_e + \varepsilon_p.$$

さらに, Hooke の法則を仮定する.

$$\varepsilon_e = \mathcal{B}\sigma.$$

ここで, 弾性係数 $\mathcal{B} : \mathcal{S}^d \rightarrow \mathcal{S}^d$ は線形, 対称, 正定値とする. $\mathcal{S}^d$ は d 次元対称行列全体を表す. Duvaut–Lions モデルは完全塑性を記述しており, 塑性ひずみの時間微分 $\dot{\varepsilon}_p$ が以下のように劣微分に属する発展包含で表現される.

$$(1) \quad \partial I_Z(\sigma(t)) \ni \dot{\varepsilon}_p(t) = -\mathcal{B}\dot{\sigma}(t) + \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) \quad \text{in } \mathcal{S}^d, \quad \text{for a.a. } t \in (0, T).$$

応力テンソル σ に対する制約 $Z \subset \mathcal{S}^d$ にはいくつかの定式化がある. 本研究では Z を, 降伏条件を記述する集合 Z_M と, 非局所型の仮似変分構造を生じさせる平行移動の和として考える. より正確には, 降伏局面を記述する集合は以下のように定義される von Mises の降伏条件を取り上げる.

$$Z_M := \{\tau \in \mathcal{S}^d : |\tau^D| \leq g\}.$$

ここで $|\cdot|$ は行列の Frobenius ノルムを表し, $\sigma^D := \sigma - (\text{tr}\sigma/d)E_d$ は σ の偏差部分を表す. g は与えられた閾値である. ひずみ硬化は, ひずみ $\varepsilon(\mathbf{u})$ によって誘導される降伏面の平行移動によって表現される. すなわち, 更新された降伏面は下記の式で与えられる. これを移動硬化則と呼ぶ.

$$(2) \quad Z_M + \mathcal{L}(\varepsilon(\mathbf{u})).$$

ここで $\mathcal{L} : \mathcal{S}^d \rightarrow \mathcal{S}^d$ のグラフは応力-ひずみ曲線の塑性領域に対応する. 変位ベクトル $\mathbf{u}$ は運動方程式の解として得られるため, 発展包含 (1) は仮似変分問題として分類される. $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{u}}$ を変位の時間微分とし, 以降, $\mathbf{v}$ は $\mathbf{u}$ に関連する速度を表すために用いる. したがって, 発展包含 (1) と制約集合 (2) は変数 $\mathbf{v}$ の観点から再定式化すると, 制約集合 (2) は以下ようになる:

$$Z(t; \mathbf{v}(\cdot, x)) := Z_M + \mathcal{L}\left(\int_0^t \varepsilon(\mathbf{v}(s, x)) ds\right) \quad \text{for } t \geq 0, x \in \Omega.$$

ここでは簡単のため, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$ と仮定している. このようにして, 制約集合の未知関数に対する時間非局所的依存性が自然に導入される.

次に, 変位ベクトル $\mathbf{u}$ に対する運動方程式と合わせて, 我々の扱うフルモデル方程式を導入する.

1.3 モデル方程式

我々は, 応力テンソル σ に対する発展包含と変位速度ベクトル $\mathbf{v}$ に対する運動方程式を組み合わせたモデルを考える. 空間次元を $d \geq 2$ とする. 集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ は滑らかな領域であり, 境界 $\Gamma := \partial\Omega$ は $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ かつ $|\Gamma_1| > 0$ を満たすとする. さらに, $\mathbf{n}$ は Γ の外向きの単位法線ベクトルを表す. 未知関数 $\sigma : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{S}^d$ と $\mathbf{v} : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ は, それぞれ応力テンソルと変位速度ベクトルを表す. このとき, 応力テンソル σ と変位速度ベクトル $\mathbf{v}$ は以下の方程式を満たす:

$$(3) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \text{div}(\nu \varepsilon(\mathbf{v}) + \sigma) + \mathbf{f} \quad \text{in } Q := (0, T) \times \Omega,$$

$$(4) \quad \mathcal{B} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \partial I_{Z(\mathbf{v})}(\sigma) \ni \varepsilon(\mathbf{v}) + h \quad \text{in } Q,$$

$$(5) \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{on } (0, T) \times \Gamma_1,$$

$$(6) \quad (\nu \varepsilon(\mathbf{v}) + \sigma) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{on } (0, T) \times \Gamma_2,$$

$$(7) \quad \mathbf{v}(0, \cdot) = \mathbf{v}_0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$(8) \quad \sigma(0, \cdot) = \sigma_0 \quad \text{in } \Omega.$$

ここで $\mathbf{f} : Q \rightarrow \mathbb{R}^d$ と $h : Q \rightarrow \mathcal{S}^d$ は外力である. $\mathbf{v}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ と $\sigma_0 : \Omega \rightarrow \mathcal{S}^d$ は初期値である. $\mathcal{B} : \mathcal{S}^d \rightarrow \mathcal{S}^d$ は弾性係数である. 技術的な理由により, 本講究録では作用素 $\mathcal{B}$ を単位行列に制限する. 非斉次境界条件を考える場合, 外力, 初期値と制約集合に適切な修正を加えることにより, 非斉次境界条件の問題を斉次境界条件 (5), (6) を持つ問題に変換できる.

2 定義と主結果

この章では、まず関数空間を導入し、無限次元設定における発展包含として問題を再定式化する。次に、弱解を定義して、その解の適切性を保証するのに必要な仮定を述べる。

以降以下の記号を用いる。

$$\mathbf{H} := L^2(\Omega; \mathbb{R}^d), \quad H := L^2(\Omega; \mathcal{S}^d).$$

これらの内積を $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}}, (\cdot, \cdot)_H$ とし、ノルムを $|\cdot|_{\mathbf{H}}, |\cdot|_H$ とする。また以下も用いる。

$$\mathbf{V} := \{z \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) : z = \mathbf{0} \text{ a.e. on } \Gamma_1\}$$

および、 $\mathbf{V}$ の共役空間 $\mathbf{V}'$ を共役対 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}}$ とともに用いる。さらに、双線形形式 $a(\cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := (\varepsilon(\mathbf{v}), \varepsilon(\mathbf{w}))_H \quad \text{for } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$$

と定義する。また $\|\cdot\| := \sqrt{a(\cdot, \cdot)}$ とする。このとき、よく知られた Korn の不等式により $\|\cdot\|$ は $\mathbf{V}$ におけるノルムであることがわかる。応力テンソル σ に対する発展包含を、無限次元における発展包含に置き換えるために、集合 $Z_M, Z(t; \mathbf{v}(\cdot, x)) \subset \mathcal{S}^d$ に対応する制約集合 $K_M(t), K(t; \mathbf{v}) \subset H$ を以下のように定義する。各 $t \in [0, T]$ に対して、

$$(9) \quad \begin{aligned} K_M(t) &:= \left\{ \tau \in H : |\tau^D(x)| \leq g(t, x) \text{ for a.a. } x \in \Omega \right\}, \\ K(t; \mathbf{v}) &:= K_M(t) + \sigma_*(t) + \mathcal{L} \int_0^t \varepsilon(\mathbf{v}(s)) ds. \end{aligned}$$

ここで $g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ は閾値関数、 $\sigma_* : Q \rightarrow \mathcal{S}^d$ は与えられた関数、 $\mathcal{L} : \mathcal{S}^d \rightarrow \mathcal{S}^d$ は与えられた線形作用素である。 σ_* は非斉次境界条件の問題を斉次境界条件の問題に変換する際に現れる項であり、与えられた平行移動の項と捉えることができる。すなわち、この制約集合 $K(t; \mathbf{v})$ は von Mises 制約条件 $K_M(t)$ の平行移動によって定義される。このとき、発展包含 (4) は以下のように書き直される。

$$(10) \quad \sigma'(t) + \partial I_{K(t; \mathbf{v})}(\sigma(t)) \ni \varepsilon(\mathbf{v}(t)) + h(t) \quad \text{in } H, \quad \text{a.a. } t \in (0, T).$$

ここで弾性係数 $\mathcal{B}$ は単位行列に制限している。

次に、問題 (3)–(8) の解を変分不等式の意味において定義する。

定義 2.1. 関数の対 $(\mathbf{v}, \sigma)$ が仮似変分不等式の意味で (3)–(8) の解であるとは

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\in H^1(0, T; \mathbf{V}') \cap C([0, T]; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}), \\ \sigma &\in H^1(0, T; H), \\ \sigma(t) &\in K(t; \mathbf{v}) \quad \text{for all } t \in [0, T], \end{aligned}$$

かつ、それらが以下を満たすことである：

$$(11) \quad \langle \mathbf{v}'(t), z \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} + \nu a(\mathbf{v}(t), z) + (\sigma(t), \varepsilon(z))_H = (\mathbf{f}(t), z)_H \quad \text{for all } z \in \mathbf{V},$$

$$(12) \quad (\sigma'(t), \sigma(t) - \tau)_H - (\varepsilon(\mathbf{v}(t)), \sigma(t) - \tau)_H \leq (h(t), \sigma(t) - \tau)_H \quad \text{for all } \tau \in K(t; \mathbf{v})$$

a.a. $t \in (0, T)$, かつ初期条件 $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ in $\mathbf{H}$ と $\sigma(0) = \sigma_0$ in H を満たす。

以降、以下を仮定する：

- (A1) $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ かつ $h \in L^2(0, T; H)$;
 (A2) $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}$ かつ $\sigma_0 \in K_M(0) + \sigma_*(0) \subset H$;
 (A3) $\sigma_* \in H^1(0, T; H)$;
 (A4) $g \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$, $g(t, x) \geq 0$ for all $t \in [0, T]$, a.e. in Ω ;
 (A5) $\mathcal{L} : \mathcal{S}^d \rightarrow \mathcal{S}^d$ は線形.

1 つ目の定理は解の存在に関するものである.

定理 2.1. 仮定 (A1)–(A5) の下で, 仮似変分不等式の意味で (3)–(8) の解 $(\mathbf{v}, \sigma)$ が一意的に存在する.

2 つ目の定理は解の連続依存性に関するものである.

定理 2.2. 仮定 (A1)–(A5) の下で, $(\mathbf{v}^{(i)}, \sigma^{(i)})$ ($i = 1, 2$) を $\mathbf{f}^{(i)}, h^{(i)}, \mathbf{v}_0^{(i)}, \sigma_0^{(i)}, \sigma_*^{(i)}, g^{(i)}$ に対応する仮似変分不等式の意味で (3)–(8) の解とする. さらに, $g^{(i)} \in C(\overline{Q})$ であり, 定数 $c > 0$ が存在して

$$g^{(i)} \geq c \quad \text{for } i = 1, 2, \quad |g^{(1)} - g^{(2)}|_{C(\overline{Q})} \leq c$$

を満たすとする. このとき, 以下の連続依存性が成り立つ:

$$\begin{aligned} & |\sigma^{(1)}(t) - \sigma^{(2)}(t)|_H^2 + |\mathbf{v}^{(1)}(t) - \mathbf{v}^{(2)}(t)|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|\mathbf{v}^{(1)}(s) - \mathbf{v}^{(2)}(s)\|^2 ds \\ & \leq M \left\{ |\sigma_0^{(1)} - \sigma_0^{(2)}|_H^2 + |\mathbf{v}_0^{(1)} - \mathbf{v}_0^{(2)}|_{\mathbf{H}}^2 + |h^{(1)} - h^{(2)}|_{L^2(0, T; H)}^2 + |\mathbf{f}^{(1)} - \mathbf{f}^{(2)}|_{L^2(0, T; \mathbf{H})}^2 \right. \\ & \quad + |\sigma_*^{(1)} - \sigma_*^{(2)}|_{H^1(0, T; H)}^2 \\ & \quad + \sum_{i=1}^2 \left(|\sigma_0^{(i)}|_H^2 + |\mathbf{v}_0^{(i)}|_{\mathbf{H}}^2 + |h^{(i)}|_{L^2(0, T; H)}^2 + |\mathbf{f}^{(i)}|_{L^2(0, T; \mathbf{H})}^2 + |\sigma_*^{(i)}|_{W^{1,2}(0, T; H)}^2 \right) \times \\ & \quad \left. |g^{(1)} - g^{(2)}|_{C(\overline{Q})} \right\} \end{aligned}$$

$t \in [0, T]$. ここで定数 $M > 0$ は $T, \nu, \mathcal{L}, c$ のみに依存する.

注意. 定理 2.2 について, 閾値関数 $g^{(i)}$ は, 共通の定数 c によって下から浮いていること, そして同じ定数 c でその差 $|g^{(1)} - g^{(2)}|_{C(\overline{Q})}$, すなわち $g^{(1)}$ と $g^{(2)}$ のゆらぎが制限されていることに注意する. また, 連続依存性の評価式の $|g^{(1)} - g^{(2)}|_{C(\overline{Q})}$ の係数は, 初期値, 外力, 平行移動そのものの大きさに依存している. また, 閾値関数の差を考えなければ, 系として次の結果が得られる.

系 2.3. 仮定 (A1)–(A5) の下で, $(\mathbf{v}^{(i)}, \sigma^{(i)})$ ($i = 1, 2$) を $\mathbf{f}^{(i)}, h^{(i)}, \mathbf{v}_0^{(i)}, \sigma_0^{(i)}, \sigma_*^{(i)}$ に対応する仮似変分不等式の意味で (3)–(8) の解とする. このとき, 以下の連続依存性が成り立つ:

$$(13) \quad \begin{aligned} & |\sigma^{(1)}(t) - \sigma^{(2)}(t)|_H^2 + |\mathbf{v}^{(1)}(t) - \mathbf{v}^{(2)}(t)|_H^2 + \int_0^t \|\mathbf{v}^{(1)}(s) - \mathbf{v}^{(2)}(s)\|^2 ds \\ & \leq M' \left\{ |\sigma_0^{(1)} - \sigma_0^{(2)}|_H^2 + |\mathbf{v}_0^{(1)} - \mathbf{v}_0^{(2)}|_H^2 + |h^{(1)} - h^{(2)}|_{L^2(0,T;H)}^2 + |\mathbf{f}^{(1)} - \mathbf{f}^{(2)}|_{L^2(0,T;H)}^2 \right. \\ & \quad \left. + |\sigma_*^{(1)} - \sigma_*^{(2)}|_{H^1(0,T;H)}^2 \right\} \end{aligned}$$

$t \in [0, T]$. ここで定数 $M' > 0$ は $T, \nu, \mathcal{L}$ のみに依存する.

3 定理の証明

定理 2.1 については証明のアイデアを述べるにとどめる. この講究録では, 特に閾値関数に関する連続依存性についての定理 2.2 に焦点を当てて議論を進める.

3.1 証明の準備

定理 2.1 の証明の主要なアイデアは, 劣微分によって支配される発展方程式の抽象理論に基づいている. 制約集合の未知依存性を扱うために Banach 不動点理論も用いる. まず, 与えられた変位速度ベクトル $\hat{\mathbf{v}}$ に対して応力テンソル σ の変分不等式を解く. そのために, [7, 9, 34] によって与えられた Kenmochi–Yamada 条件と呼ばれる変分不等式を解くための判定条件を確認する.

補題 3.1. $\hat{\mathbf{v}} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ を与えられたものとする. 以下の性質を満たす $\alpha \in L^2(0, T)$ が存在する: 任意の $s, t \in [0, T]; s \leq t, \tau \in K(s; \hat{\mathbf{v}})$ に対して, $\tilde{\tau} \in K(t; \hat{\mathbf{v}})$ が存在して

$$(14) \quad |\tilde{\tau} - \tau|_H \leq \int_s^t \alpha(\ell) d\ell.$$

を満たす.

証明. 関数 $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\alpha(\cdot) := |g'(\cdot)|_{L^2(\Omega)} + |\sigma'_*(\cdot)|_H + |\mathcal{L}| \|\hat{\mathbf{v}}(\cdot)\|$$

と定めると, $\alpha \in L^2(0, T)$ である. この関数が (14) を満たすことを確かめていく. $s, t \in [0, T]; s \leq t$ とする. $K(s; \hat{\mathbf{v}})$ の定義から, 各 $\tau \in K(s; \hat{\mathbf{v}})$ に対して

$$\tau_M := \tau - \sigma_*(s) - \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\hat{\mathbf{v}}(\ell)) d\ell \in K_M(s)$$

である. ここで作用素 $P^t : H \rightarrow K_M(t)$ を以下の通り定める:

$$(P^t(\tau))(x) := \begin{cases} \tau(x) & |\tau^D| \leq g(t, x) \\ \frac{\text{tr } \tau(x)}{d} E_d + \frac{g(t, x)}{|\tau^D(x)|} \tau^D(x) & \text{otherwise} \end{cases} \quad x \in \Omega, \tau \in H.$$

上記の作用素を用いて

$$\tilde{\tau} := P_{K_M(t)}(\tau_M) + \sigma_*(t) + \mathcal{L} \int_0^t \varepsilon(\hat{v}(\ell)) d\ell$$

と定めれば, $\tilde{\tau} \in K(t; \hat{v})$ である. さらに, for a.a. $x \in \Omega$ に対して

$$|(P^t \tau_M)(x) - (\tau_M)(x)| \leq |g(t, x) - g(s, x)|$$

であることに注意して, 以下の評価を得る.

$$\begin{aligned} |\tilde{\tau} - \tau|_H &\leq |g(t) - g(s)|_{L^2(\Omega)} + |\sigma_*(t) - \sigma_*(s)|_H + |\mathcal{L}| \int_s^t |\varepsilon(\hat{v}(\ell))| d\ell \\ &\leq \int_s^t \left(|g'(\ell)|_{L^2(\Omega)} + |\sigma'_*(\ell)|_H + |\mathcal{L}| \|\hat{v}(\ell)\| \right) d\ell. \end{aligned}$$

よって, 補題の結論を得る. $\square$

この補題のおかげで, 発展方程式のよく知られた理論 [7] を適用することができる. すなわち, 以下の命題 3.2 の変分不等式に対する解の存在性と一意性が保証される.

命題 3.2. 任意の与えられた $\hat{v} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ に対して, 各 $t \in [0, T]$ について $\sigma(t) \in K(t; \hat{v})$ であり, 下記の変分不等式を満たす解 $\sigma \in H^1(0, T; H)$ が一意的に存在する.

$$(15) \quad \sigma'(t) + \partial I_{K(t; \hat{v})}(\sigma(t)) \ni \varepsilon(\hat{v}(t)) + h(t) \quad \text{in } H, \quad \text{for a.a. } t \in (0, T),$$

$$(16) \quad \sigma(0) = \sigma_0 \quad \text{in } H.$$

上記の変分不等式に対する解作用素を $\hat{S} : L^2(0, T; \mathbf{V}) \rightarrow L^2(0, T; H)$ と定める.

以下の命題は一般的な放物型の理論より保証される (例えば, [28] を参照).

命題 3.3. 任意の与えられた $\hat{\sigma} \in L^2(0, T; H)$ に対して, 下記の弱形式を満たす解 $\mathbf{v} \in H^1(0, T; \mathbf{V}') \cap L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V})$ が一意的に存在する.

$$(17) \quad \langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} + \nu a(\mathbf{v}(t), \mathbf{z}) = -(\hat{\sigma}(t), \varepsilon(\mathbf{z}))_H + (\mathbf{f}(t), \mathbf{z})_H$$

$$\text{for all } \mathbf{z} \in \mathbf{V} \quad \text{for a.a. } t \in (0, T),$$

$$(18) \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \quad \text{in } \mathbf{H}.$$

上記の弱形式に対する解作用素を $S : L^2(0, T; H) \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{V})$ と定める.

定理 2.1 の証明のアイディア 解作用素の合成作用 $S \circ \hat{S} : L^2(0, T; \mathbf{V}) \rightarrow L^2(0, T; \mathbf{V})$ が縮小作用素になることを示し, Banach の不動点定理より, 不動点 $\mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{V})$ が一意的に存在することが保証される. このとき, $(\mathbf{v}, \hat{S}\mathbf{v})$ が仮似変分不等式の意味で (3)–(8) の解となる.

次の命題は、定理 2.2 を証明する際に必要になる解のアプリオリ評価である。

命題 3.4. 仮似変分不等式の意味で (3)–(8) の解 $(\mathbf{v}, \sigma)$ が存在するとき、 $\widetilde{M} > 0$ が存在して、以下の不等式を満たす。

$$\begin{aligned} & |\sigma(t)|_H^2 + |\mathbf{v}(t)|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|\mathbf{v}(s)\|^2 ds \\ & \leq \widetilde{M} \left(|\sigma_0|_H^2 + |\mathbf{v}_0|_{\mathbf{H}}^2 + |h|_{L^2(0,T;H)}^2 + |\mathbf{f}|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + |\sigma_*|_{W^{1,2}(0,T;H)}^2 \right) \end{aligned}$$

$t \in [0, T]$. ここで定数 $\widetilde{M}$ は、 T , ν , $\mathcal{L}$ のみに依存する。

証明. 仮似変分不等式 (11), (12) を $t = s$ として、試験関数を次のように選ぶ。

$$\tau = \sigma_*(s) + \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}(\ell)) d\ell, \quad \mathbf{z} = \mathbf{v}(s).$$

得られた変分不等式と弱形式の和をとって、次のように計算できる。

$$\begin{aligned} & \left(\sigma'(s), \sigma(s) - \sigma_*(s) - \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}(\ell)) d\ell \right)_H + \langle \mathbf{v}'(s), \mathbf{v}(s) \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} + \nu a(\mathbf{v}(s), \mathbf{v}(s)) \\ & \leq - \left(\varepsilon(\mathbf{v}(s)) + h(s), \sigma_*(s) + \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}(\ell)) d\ell \right)_H + (h(s), \sigma(s))_H + (\mathbf{f}(s), \mathbf{v}(s))_{\mathbf{H}}, \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{ds} |\sigma(s)|_H^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{ds} |\mathbf{v}(s)|_{\mathbf{H}}^2 + \nu \|\mathbf{v}(s)\|^2 \\ & \leq \left(\sigma'(s), \sigma_*(s) + \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}(\ell)) d\ell \right)_H - \left(\varepsilon(\mathbf{v}(s)) + h(s), \sigma_*(s) + \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}(\ell)) d\ell \right)_H \\ & \quad + (h(s), \sigma(s))_H + (\mathbf{f}(s), \mathbf{v}(s))_{\mathbf{H}}. \end{aligned}$$

任意の $t \in [0, T]$ に対して、 $(0, t)$ 上で両辺積分し、右辺の第 1 項に部分積分を適応する。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\sigma(t)|_H^2 + \frac{1}{2} |\mathbf{v}(t)|_{\mathbf{H}}^2 + \nu \int_0^t \|\mathbf{v}(s)\|^2 ds \\ & \leq \int_0^t \left(\sigma'(s), \sigma_*(s) + \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}(\ell)) d\ell \right)_H ds \\ & \quad - \int_0^t \left(\varepsilon(\mathbf{v}(s)) + h(s), \sigma_*(s) + \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}(\ell)) d\ell \right)_H ds \\ & \quad + \int_0^t (h(s), \sigma(s))_H ds + \int_0^t (\mathbf{f}(s), \mathbf{v}(s))_{\mathbf{H}} ds + \frac{1}{2} |\sigma_0|_H^2 + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_0|_{\mathbf{H}}^2 \\ & = - \int_0^t \left(\sigma(s), \sigma'_*(s) + \mathcal{L} \varepsilon(\mathbf{v}(s)) \right)_H + \left(\sigma(t), \sigma_*(t) + \mathcal{L} \int_0^t \varepsilon(\mathbf{v}(\ell)) d\ell \right)_H - (\sigma_0, \sigma_*(0))_H \\ & \quad - \int_0^t \left(\varepsilon(\mathbf{v}(s)) + h(s), \sigma_*(s) + \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}(\ell)) d\ell \right)_H ds \\ & \quad + \int_0^t (h(s), \sigma(s))_H ds + \int_0^t (\mathbf{f}(s), \mathbf{v}(s))_{\mathbf{H}} ds + \frac{1}{2} |\sigma_0|_H^2 + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_0|_{\mathbf{H}}^2. \end{aligned}$$

部分積分であわれた第2項の扱いに注意が必要である．この項を Young の不等式で分解した際に、 $|\sigma(t)|_H^2$ と $\int_0^t \|\mathbf{v}(\ell)\|^2 d\ell$ が現れるが、両項を左辺に吸収する必要がある． $\int_0^t \|\mathbf{v}(\ell)\|^2 d\ell$ について、Hölder の不等式より係数に時間変数 t が現れることが利用できる．そこで、時間区間 $(0, T)$ を $N \in \mathbb{N}$ 等分して、その幅 $T_* := T/N$ が十分小さく

$$0 < T_* < \frac{\nu}{8|\mathcal{L}|^2}$$

を満たすものとする．ここから $t \in [0, T_*]$ について評価を考える．Young の不等式と Hölder の不等式を用いて下記の評価を得る．

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}|\sigma(t)|_H^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{v}(t)|_{\mathbf{H}}^2 + \nu \int_0^t \|\mathbf{v}(s)\|^2 ds \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma(s)|_H^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma'_*(s)|_H^2 ds + \frac{|\mathcal{L}|^2}{\nu} \int_0^t |\sigma(s)|_H^2 ds + \frac{\nu}{4} \int_0^t \|\mathbf{v}(s)\|^2 ds \\ & \quad + \frac{1}{4}|\sigma(t)|_H^2 + 2|\sigma_*(t)|_H^2 + 2|\mathcal{L}|^2 T_* \int_0^t \|\mathbf{v}(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}|\sigma_0|_H^2 + \frac{1}{2}|\sigma_*(0)|_H^2 \\ & \quad + \frac{\nu}{4} \int_0^t \|\mathbf{v}(s)\|^2 ds + \frac{2}{\nu} \int_0^t |\sigma_*(s)|_H^2 ds + \frac{2|\mathcal{L}|^2}{\nu} \int_0^t s \int_0^s \|\mathbf{v}(\ell)\|^2 d\ell ds \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^t |h(s)|_H^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma(s)|_H^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t |\mathbf{f}(s)|_{\mathbf{H}}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t |\mathbf{v}(s)|_{\mathbf{H}}^2 ds \\ & \quad + \frac{1}{2}|\sigma_0|_H^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{v}_0|_{\mathbf{H}}^2. \end{aligned}$$

さらに、 $T_* < \nu/(8|\mathcal{L}|^2)$ に注意して、 $\int_0^t \|\mathbf{v}(\ell)\|^2 d\ell$ を左辺に吸収する． $|\sigma_*(t)|_H^2$ や $|\sigma_*(0)|_H^2$ は $|\sigma_*|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}$ で評価できる．

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}|\sigma(t)|_H^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{v}(t)|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{\nu}{4} \int_0^t \|\mathbf{v}(s)\|^2 ds \\ & \leq \left(1 + \frac{|\mathcal{L}|^2}{\nu}\right) \int_0^t |\sigma(s)|_H^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t |\mathbf{v}(s)|_{\mathbf{H}}^2 ds + \frac{2+\nu}{8} \int_0^t \int_0^s \|\mathbf{v}(\ell)\|^2 d\ell ds \\ & \quad + \frac{1}{2}|\sigma_0|_H^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{v}_0|_{\mathbf{H}}^2 + |h|_{L^2(0,T;H)}^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{f}|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + \left(1 + \frac{2}{\nu} + 5\left(\frac{1}{T} + T\right)\right) |\sigma_*|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

次に、得られた上記の評価の係数を揃える．ここで、

$$C_m := \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\nu}{4} \right\}, \quad C_M := \max \left\{ 1 + \frac{|\mathcal{L}|^2}{\nu}, \frac{2+\nu}{8}, 1 + \frac{2}{\nu} + 5\left(\frac{1}{T} + T\right) \right\}, \quad \widetilde{M}_0 := \frac{C_M}{C_m}$$

とする．定数 $\widetilde{M}_0$ は $T, \nu, \mathcal{L}$ のみに依存する．得られた評価は下記のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} & |\sigma(t)|_H^2 + |\mathbf{v}(t)|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|\mathbf{v}(s)\|^2 ds \\ & \leq \widetilde{M}_0 \left\{ \int_0^t |\sigma(s)|_H^2 ds + \int_0^t |\mathbf{v}(s)|_{\mathbf{H}}^2 ds + \int_0^t \int_0^s \|\mathbf{v}(\ell)\|^2 d\ell ds \right. \\ & \quad \left. + |\sigma_0|_H^2 + |\mathbf{v}_0|_{\mathbf{H}}^2 + |h|_{L^2(0,T;H)}^2 + |\mathbf{f}|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + |\sigma_*|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right\} \end{aligned}$$

$t \in [0, T_*]$. したがって, Gronwall の不等式より

$$\begin{aligned} & |\sigma(t)|_H^2 + |\mathbf{v}(t)|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|\mathbf{v}(s)\|^2 ds \\ & \leq \widetilde{M}_0 \exp\left(\widetilde{M}_0 T\right) \left(|\sigma_0|_H^2 + |\mathbf{v}_0|_{\mathbf{H}}^2 + |h|_{L^2(0,T;H)}^2 + |\mathbf{f}|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + |\sigma_*|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right) \end{aligned}$$

$t \in [0, T_*]$. 右辺の係数 $\widetilde{M}_* := \widetilde{M}_0 \exp(\widetilde{M}_0 T)$ は初期値に依存しないので, 任意の時刻 $t \in [0, T]$ に拡張できる. 実際, 任意の $t \in [0, T]$ に対して, $t \in [(k-1)T_*, kT_*]$ を満たす $k = 1, 2, \dots, N$ が存在して, 下記のように評価できる. ここで, $\sigma_k := \sigma(kT_*)$, $\mathbf{v}_k := \mathbf{v}(kT_*)$ と表記するとする.

$$\begin{aligned} & |\sigma(t)|_H^2 + |\mathbf{v}(t)|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|\mathbf{v}(s)\|^2 ds \\ & \leq \widetilde{M}_* \left(|\sigma_{k-1}|_H^2 + |\mathbf{v}_{k-1}|_{\mathbf{H}}^2 + |h|_{L^2(0,T;H)}^2 + |\mathbf{f}|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + |\sigma_*|_{W^{1,2}(0,T;H)}^2 \right) \\ & \leq \widetilde{M}_*^2 \left(|\sigma_{k-2}|_H^2 + |\mathbf{v}_{k-2}|_{\mathbf{H}}^2 \right) + (\widetilde{M}_* + \widetilde{M}_*^2) \left(|h|_{L^2(0,T;H)}^2 + |\mathbf{f}|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + |\sigma_*|_{W^{1,2}(0,T;H)}^2 \right) \\ & \vdots \\ & \leq \widetilde{M}_*^k \left(|\sigma_0|_H^2 + |\mathbf{v}_0|_{\mathbf{H}}^2 \right) + \sum_{p=1}^k \widetilde{M}_*^p \left(|h|_{L^2(0,T;H)}^2 + |\mathbf{f}|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + |\sigma_*|_{W^{1,2}(0,T;H)}^2 \right) \\ & \leq \widetilde{M}_*^N \left(|\sigma_0|_H^2 + |\mathbf{v}_0|_{\mathbf{H}}^2 \right) + \sum_{p=1}^N \widetilde{M}_*^p \left(|h|_{L^2(0,T;H)}^2 + |\mathbf{f}|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + |\sigma_*|_{W^{1,2}(0,T;H)}^2 \right) \\ & =: \widetilde{M} \left(|\sigma_0|_H^2 + |\mathbf{v}_0|_{\mathbf{H}}^2 + |h|_{L^2(0,T;H)}^2 + |\mathbf{f}|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + |\sigma_*|_{W^{1,2}(0,T;H)}^2 \right). \end{aligned}$$

以上より, 命題 3.4 が証明された. □

3.2 定理 2.2 の証明

$i = 1, 2$ とする. $(\sigma^{(i)}, \mathbf{v}^{(i)})$ を $\sigma_0^{(i)}, \mathbf{v}_0^{(i)}, h^{(i)}, \mathbf{f}^{(i)}, \sigma_*^{(i)}, g^{(i)}$ に対する仮似変分不等式の意味で (3)–(8) の解とする. 閾値関数 $g^{(i)}$ に対する仮定として以下を採用する: ある定数 $c > 0$ が存在して

$$g^{(i)} \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap C(\overline{Q}), \quad g^{(i)} \geq c \quad \text{for } i = 1, 2, \quad |g^{(1)} - g^{(2)}|_{C(\overline{Q})} \leq c.$$

ここで, 関数の差を $\bar{g} := g^{(1)} - g^{(2)}$ と表すとする. $\bar{\sigma} := \sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}$, $\bar{\mathbf{v}} := \mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{v}^{(2)}$ などその他の関数も同様である.

$$K_{\mathbf{M}}^{(i)}(t) := \left\{ \tau \in H : |\tau^{\mathbf{D}}| \leq g^{(i)}(t) \text{ a.e. in } \Omega \right\},$$

$$K^{(i)}(t; \mathbf{v}) := K_{\mathbf{M}}^{(i)}(t) + \sigma_*^{(i)}(t) + \mathcal{L} \int_0^t \varepsilon(\mathbf{v}^{(i)}(\ell)) d\ell.$$

$\sigma^{(i)}(t)$ に対して, $\sigma_{\mathbf{M}}^{(i)}(t) \in K_{\mathbf{M}}^{(i)}(t)$ が存在して

$$\sigma^{(i)}(t) = \sigma_{\mathbf{M}}^{(i)}(t) + \sigma_*^{(i)}(t) + \mathcal{L} \int_0^t \varepsilon(\mathbf{v}^{(i)}(\ell)) d\ell.$$

ここで

$$r := 1 - \frac{1}{c} |g^{(1)} - g^{(2)}|_{C(\overline{Q})} = 1 - \frac{1}{c} |\bar{g}|_{C(\overline{Q})}$$

とおく. このとき, $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$ に対して

$$r\sigma_M^{(j)}(t) \in K_M^{(i)}(t)$$

である. 今, $(\sigma^{(i)}, \mathbf{v}^{(i)})$ は次を満たす.

$$(19) \quad \left((\sigma^{(i)})'(t), \sigma^{(i)}(t) - \tau \right)_H - \left(\varepsilon(\mathbf{v}^{(i)}(t)), \sigma^{(i)}(t) - \tau \right)_H \leq \left(h^{(i)}(t), \sigma^{(i)}(t) - \tau \right)_H$$

for all $\tau \in K^{(i)}(t; \mathbf{v}^{(i)})$,

$$(20) \quad \langle (\mathbf{v}^{(i)})'(t), \mathbf{z} \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} + \nu a(\mathbf{v}^{(i)}(t), \mathbf{z}) + (\sigma^{(i)}(t), \varepsilon(\mathbf{z}))_H = (\mathbf{f}^{(i)}(t), \mathbf{z})_H$$

for all $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$, for a.a. $t \in (0, T)$.

ここで, (19) について $i = 1$ を考える.

$$\left((\sigma^{(1)})'(s), \sigma^{(1)}(s) - \tau \right)_H - \left(\varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(s)), \sigma^{(1)}(s) - \tau \right)_H \leq \left(h^{(1)}(s), \sigma^{(1)}(s) - \tau \right)_H$$

for all $\tau \in K^{(1)}(s; \mathbf{v}^{(1)})$,

上式の試験関数として

$$\tau = r\sigma_M^{(2)}(s) + \sigma_*^{(1)}(s) + \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(\ell)) \, d\ell$$

を選べば

$$\begin{aligned} & \sigma^{(1)}(s) - \tau \\ &= \sigma_M^{(1)}(s) - \sigma_*^{(1)}(s) + \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(\ell)) \, d\ell - \left(r\sigma_M^{(2)}(s) - \sigma_*^{(1)}(s) + \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(\ell)) \, d\ell \right) \\ &= \sigma_M^{(1)}(s) - r\sigma_M^{(2)}(s). \end{aligned}$$

したがって, 次の不等式を得る.

$$\left((\sigma^{(1)})'(s) - \varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(s)) - h^{(1)}(s), \sigma_M^{(1)}(s) - r\sigma_M^{(2)}(s) \right)_H \leq 0.$$

$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_M + \bar{\sigma}_* + \mathcal{L} \int \varepsilon(\bar{\mathbf{v}}) d\ell$ に注意して計算すると, 次のように変形できる.

$$\begin{aligned} & \left((\sigma^{(1)})'(s) - \varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(s)) - h^{(1)}(s), \sigma_M^{(1)}(s) - \sigma_M^{(2)}(s) \right)_H \\ & \leq (1-r) \left(-(\sigma^{(1)})'(s) + \varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(s)) + h^{(1)}(s), \sigma_M^{(2)}(s) \right)_H, \\ & \left((\sigma^{(1)})'(s) - \varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(s)) - h^{(1)}(s), \bar{\sigma}(s) - \bar{\sigma}_*(s) - \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\bar{\mathbf{v}}(\ell)) \, d\ell \right)_H \\ & \leq (1-r) \left(-(\sigma^{(1)})'(s) + \varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(s)) + h^{(1)}(s), \sigma^{(2)}(s) - \sigma_*^{(2)}(s) - \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}^{(2)}(\ell)) \, d\ell \right)_H. \end{aligned}$$

同様にして次の評価を得る.

$$\begin{aligned} & - \left((\sigma^{(2)})'(s) - \varepsilon(\mathbf{v}^{(2)}(s)) - h^{(2)}(s), \bar{\sigma}(s) - \bar{\sigma}_*(s) - \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\bar{\mathbf{v}}(\ell)) d\ell \right)_H \\ & \leq (1-r) \left(-(\sigma^{(2)})'(s) + \varepsilon(\mathbf{v}^{(2)}(s)) + h^{(2)}(s), \sigma^{(1)}(s) - \sigma_*^{(1)}(s) - \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(\ell)) d\ell \right)_H. \end{aligned}$$

上式2つの不等式を両辺足し合わせて次の評価を得る.

$$\begin{aligned} & \left(\bar{\sigma}'(s) - \varepsilon(\bar{\mathbf{v}}(s)) - \bar{h}(s), \bar{\sigma}(s) - \bar{\sigma}_*(s) - \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\bar{\mathbf{v}}(\ell)) d\ell \right)_H \\ & \leq (1-r) \left\{ \left(-(\sigma^{(1)})'(s) + \varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(s)) + h^{(1)}(s), \sigma^{(2)}(s) - \sigma_*^{(2)}(s) - \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}^{(2)}(\ell)) d\ell \right)_H \right. \\ & \quad \left. + \left(-(\sigma^{(2)})'(s) + \varepsilon(\mathbf{v}^{(2)}(s)) + h^{(2)}(s), \sigma^{(1)}(s) - \sigma_*^{(1)}(s) - \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(\ell)) d\ell \right)_H \right\} \\ & =: \frac{|\bar{g}|_{C(\bar{Q})}}{c} W(s). \end{aligned}$$

右辺の $\{\cdot\}$ の中身を $W(s)$ とおく. 続いて, (20) の試験関数の選び方は標準的な方法である. すなわち, (20) の $i = 1, 2$ について試験関数をそれぞれ $\bar{\mathbf{v}}(s)$, $-\bar{\mathbf{v}}(s)$ を選び, 2つの弱形式の和をとることで次の等式を得る.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} |\bar{\mathbf{v}}(s)|_{\mathbf{H}}^2 + \nu \|\bar{\mathbf{v}}(s)\|^2 + (\bar{\sigma}(s), \varepsilon(\bar{\mathbf{v}}(s)))_H = (\bar{\mathbf{f}}(s), \bar{\mathbf{v}}(s))_{\mathbf{H}}.$$

上式2つの評価を合わせることで次の不等式が得られる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{ds} |\bar{\sigma}(s)|_H^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{ds} |\bar{\mathbf{v}}(s)|_{\mathbf{H}}^2 + \nu \|\bar{\mathbf{v}}(s)\|^2 \\ & \leq \left(\bar{\sigma}'(s), \bar{\sigma}_*(s) + \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\bar{\mathbf{v}}(\ell)) d\ell \right)_H - \left(\varepsilon(\bar{\mathbf{v}}(s)) + \bar{h}(s), \bar{\sigma}_*(s) + \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\bar{\mathbf{v}}(\ell)) d\ell \right)_H \\ & \quad + (\bar{h}(s), \bar{\sigma}(s))_H + (\bar{\mathbf{f}}(s), \bar{\mathbf{v}}(s))_{\mathbf{H}} - \frac{|\bar{g}|_{C(\bar{Q})}}{c} W(s). \end{aligned}$$

命題 3.4 と全く同様の計算を適応すると, $T_* := T/N > 0$, $\widetilde{M}_0 > 0$ が存在して

(21)

$$\begin{aligned} & |\bar{\sigma}(t)|_H^2 + |\bar{\mathbf{v}}(t)|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|\bar{\mathbf{v}}(s)\|^2 ds \\ & \leq \widetilde{M}' \left\{ \int_0^t |\bar{\sigma}(s)|_H^2 ds + \int_0^t |\bar{\mathbf{v}}(s)|_{\mathbf{H}}^2 ds + \int_0^t \int_0^s \|\bar{\mathbf{v}}(\ell)\|^2 d\ell ds \right. \\ & \quad \left. + |\bar{\sigma}_0|_H^2 + |\bar{\mathbf{v}}_0|_{\mathbf{H}}^2 + |\bar{h}|_{L^2(0,T;H)}^2 + |\bar{\mathbf{f}}|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + |\bar{\sigma}_*|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{|\bar{g}|_{C(\bar{Q})}}{c} \int_0^t |W(s)| ds \right\} \end{aligned}$$

$t \in [0, T_*]$ が成り立つ. 次に, $W(s)$ に関する項について, $\widehat{M} > 0$ が存在して

$$\int_0^t W(s) ds \leq \widehat{M} \sum_{i=1}^2 \left(|\sigma_0^{(i)}|_H^2 + |\mathbf{v}_0^{(i)}|_{\mathbf{H}}^2 + |h^{(i)}|_{L^2(0,T;H)}^2 + |\mathbf{f}^{(i)}|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + |\sigma_*^{(i)}|_{W^{1,2}(0,T;H)}^2 \right)$$

$t \in [0, T]$, 満たすことを示す. 実際, 任意の $t \in [0, T]$ に対して

$$\begin{aligned} \int_0^t W(s) ds &= \int_0^t \left(\varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(s)) + h^{(1)}(s), \sigma^{(2)}(s) - \sigma_*^{(2)}(s) - \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}^{(2)}(\ell)) d\ell \right)_H ds \\ &\quad - \int_0^t \left((\sigma^{(1)})'(s), \sigma^{(2)}(s) - \sigma_*^{(2)}(s) - \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}^{(2)}(\ell)) d\ell \right)_H ds \\ &\quad + \int_0^t \left(\varepsilon(\mathbf{v}^{(2)}(s)) + h^{(2)}(s), \sigma^{(1)}(s) - \sigma_*^{(1)}(s) - \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(\ell)) d\ell \right)_H ds \\ &\quad - \int_0^t \left((\sigma^{(2)})'(s), \sigma^{(1)}(s) - \sigma_*^{(1)}(s) - \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(\ell)) d\ell \right)_H ds \\ &=: \int_0^t W_1(s) ds - \int_0^t W_2(s) ds + \int_0^t W_3(s) ds - \int_0^t W_4(s) ds. \end{aligned}$$

第 1, 3 項については, Young の不等式と Hölder の不等式を用いて分解し, 命題 3.4 より評価できる. 第 2, 4 項については, $(\sigma^{(i)})'$ が含まれるので, 部分積分を用いて等式変形する.

$$\begin{aligned} & - \int_0^t W_2(s) ds - \int_0^t W_4(s) ds \\ &= \int_0^t \left(\sigma^{(1)}(s), (\sigma^{(2)})'(s) - (\sigma_*^{(2)})'(s) - \mathcal{L} \varepsilon(\mathbf{v}^{(2)}(s)) \right)_H ds \\ &\quad - \left(\sigma^{(1)}(t), \sigma^{(2)}(t) - \sigma_*^{(2)}(t) - \mathcal{L} \int_0^t \varepsilon(\mathbf{v}^{(2)}(\ell)) d\ell \right)_H + \left(\sigma_0^{(1)}, \sigma_0^{(2)} - \sigma_*^{(2)}(0) \right)_H \\ &\quad - \int_0^t \left((\sigma^{(2)})'(s), \sigma^{(1)}(s) - \sigma_*^{(1)}(s) - \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(\ell)) d\ell \right)_H ds \\ &= - \int_0^t \left(\sigma^{(1)}(s), (\sigma_*^{(2)})'(s) + \mathcal{L} \varepsilon(\mathbf{v}^{(2)}(s)) \right)_H ds \\ &\quad - \left(\sigma^{(1)}(t), \sigma^{(2)}(t) - \sigma_*^{(2)}(t) - \mathcal{L} \int_0^t \varepsilon(\mathbf{v}^{(2)}(\ell)) d\ell \right)_H + \left(\sigma_0^{(1)}, \sigma_0^{(2)} - \sigma_*^{(2)}(0) \right)_H \\ &\quad + \int_0^t \left((\sigma^{(2)})'(s), \sigma_*^{(1)}(s) + \mathcal{L} \int_0^s \varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(\ell)) d\ell \right)_H ds \\ &= - \int_0^t \left(\sigma^{(1)}(s), (\sigma_*^{(2)})'(s) + \mathcal{L} \varepsilon(\mathbf{v}^{(2)}(s)) \right)_H ds \\ &\quad - \left(\sigma^{(1)}(t), \sigma^{(2)}(t) \right)_H + \left(\sigma^{(1)}(t), \sigma_*^{(2)}(t) + \mathcal{L} \int_0^t \varepsilon(\mathbf{v}^{(2)}(\ell)) d\ell \right)_H + \left(\sigma_0^{(1)}, \sigma_0^{(2)} - \sigma_*^{(2)}(0) \right)_H \\ &\quad - \int_0^t \left(\sigma^{(2)}(s), (\sigma_*^{(1)})'(s) + \mathcal{L} \varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(s)) d\ell \right)_H ds \\ &\quad + \left(\sigma^{(2)}(t), \sigma_*^{(1)}(t) + \mathcal{L} \int_0^t \varepsilon(\mathbf{v}^{(1)}(\ell)) d\ell \right)_H - \left(\sigma_0^{(2)}, \sigma_*^{(1)}(0) \right)_H \end{aligned}$$

$t \in [0, T]$. したがって, $(\sigma^{(i)})'$ が相殺されたので, 第 1 項と第 3 項と同様に命題 3.4 の解の有界性より評価できる. この評価と (21) と合わせて, $M_0 > 0$ が存在して,

$$\begin{aligned} & |\bar{\sigma}(t)|_H^2 + |\bar{\mathbf{v}}(t)|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|\bar{\mathbf{v}}(s)\|^2 ds \\ & \leq M_0 \left\{ \int_0^t |\bar{\sigma}(s)|_H^2 ds + \int_0^t |\bar{\mathbf{v}}(s)|_{\mathbf{H}}^2 ds + \int_0^t \int_0^s \|\bar{\mathbf{v}}(\ell)\|^2 d\ell ds \right. \\ & \quad + |\bar{\sigma}_0|_H^2 + |\bar{\mathbf{v}}_0|_{\mathbf{H}}^2 + |\bar{h}|_{L^2(0,T;H)}^2 + |\bar{\mathbf{f}}|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + |\bar{\sigma}_*|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^2 \left(|\sigma_0^{(i)}|_H^2 + |\mathbf{v}_0^{(i)}|_{\mathbf{H}}^2 + |h^{(i)}|_{L^2(0,T;H)}^2 + |\mathbf{f}^{(i)}|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + |\sigma_*^{(i)}|_{W^{1,2}(0,T;H)}^2 \right) |\bar{g}|_{C(\bar{Q})} \right\} \end{aligned}$$

$t \in [0, T_*]$ が成り立つ. ただし, 定数 M_0 は $T, \nu, \mathcal{L}, c$ のみに依存する. ここで, Gronwall の不等式より

(22)

$$\begin{aligned} & |\bar{\sigma}(t)|_H^2 + |\bar{\mathbf{v}}(t)|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|\bar{\mathbf{v}}(s)\|^2 ds \\ & \leq M_0 \exp(M_0 T) \left\{ |\bar{\sigma}_0|_H^2 + |\bar{\mathbf{v}}_0|_{\mathbf{H}}^2 + |\bar{h}|_{L^2(0,T;H)}^2 + |\bar{\mathbf{f}}|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + |\bar{\sigma}_*|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^2 \left(|\sigma_0^{(i)}|_H^2 + |\mathbf{v}_0^{(i)}|_{\mathbf{H}}^2 + |h^{(i)}|_{L^2(0,T;H)}^2 + |\mathbf{f}^{(i)}|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + |\sigma_*^{(i)}|_{W^{1,2}(0,T;H)}^2 \right) |\bar{g}|_{C(\bar{Q})} \right\} \end{aligned}$$

$t \in [0, T_*]$. $M_* := M_0 \exp(M_0 T)$ とおく. ここから次の記号を用いる.

$$\begin{aligned} |U|_{\mathcal{H}} &:= \{|\sigma|_H^2 + |\mathbf{v}|_{\mathbf{H}}^2\}^{1/2}, \quad U = (\sigma, \mathbf{v}) \in H \times \mathbf{H} \\ |F_*|_{L^2(0,T;\mathcal{H})} &:= \left\{ |h|_{L^2(0,T;H)}^2 + |\mathbf{f}|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + |\sigma_*|_{W^{1,2}(0,T;H)}^2 \right\}^{1/2}, \\ F_* &= (h, \mathbf{f}, \sigma_*) \in L^2(0,T;H) \times L^2(0,T;\mathbf{H}) \times W^{1,2}(0,T;H). \end{aligned}$$

この表記を用いて, (22) は次のように書き直せる.

$$\begin{aligned} & |\bar{U}|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^t \|\bar{\mathbf{v}}(s)\|^2 ds \\ & \leq M_* \left\{ |\bar{U}_0|_{\mathcal{H}}^2 + |\bar{F}_*|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}^2 + \sum_{i=1}^2 \left(|U_0^{(i)}|_{\mathcal{H}}^2 + |F_*^{(i)}|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}^2 \right) |\bar{g}|_{C(\bar{Q})} \right\} \end{aligned}$$

$t \in [0, T_*]$. また命題 3.4 の解の有界性は

$$|U^{(i)}(t)|_{\mathcal{H}}^2 \leq \widetilde{M} \left\{ |U_0^{(i)}|_{\mathcal{H}}^2 + |F_*^{(i)}|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}^2 \right\}$$

$t \in [0, T]$ と表されることに注意する. 任意の $t \in [0, T]$ に対して, $t \in [(k-1)T_*, kT_*]$ を満たす $k = 1, 2, \dots, N$ が存在して, 次のように評価できる. ここで, $U_k := U(kT_*)$ とする.

$$\begin{aligned}
& |\bar{U}(t)|_{\mathcal{H}}^2 \\
& \leq M_* \left\{ |\bar{U}_{k-1}|_{\mathcal{H}}^2 + |\bar{F}_*|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}^2 + \sum_{i=1}^2 \left(|U_{k-1}^{(i)}|_{\mathcal{H}}^2 + |F_*^{(i)}|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}^2 \right) |\bar{g}|_{C(\bar{Q})} \right\} \\
& \leq M_*^2 |\bar{U}_{k-2}|_{\mathcal{H}}^2 + (M_* + M_*^2) |\bar{F}_*|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}^2 \\
& \quad + \sum_{i=1}^2 \left\{ (M_*^2 + M_* \widetilde{M}) |U_{k-2}^{(i)}|_{\mathcal{H}}^2 + (M_*^2 + M_* (\widetilde{M} + 1)) |F_*^{(i)}|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}^2 \right\} |\bar{g}|_{C(\bar{Q})} \\
& \quad \vdots \\
& \leq M_*^N |\bar{U}_0|_{\mathcal{H}}^2 + \sum_{p=1}^N M_*^p |\bar{F}_*|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}^2 \\
& \quad + \sum_{i=1}^2 \left\{ (M_*^N + (M_*^{N-1} + \dots (M_*^3 + (M_*^2 + M_* \widetilde{M}) \widetilde{M}) \dots) \widetilde{M}) |U_0^{(i)}|_{\mathcal{H}}^2 \right. \\
& \quad \left. + (M_*^N + M_*^{N-1} (\widetilde{M} + 1) + \dots + M_* (\widetilde{M}^{N-1} + \dots + \widetilde{M} + 1)) |F_*^{(i)}|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}^2 \right\} |\bar{g}|_{C(\bar{Q})} \\
& =: M \left\{ |\bar{U}_0|_{\mathcal{H}}^2 + |\bar{F}_*|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}^2 + \sum_{i=1}^2 \left(|U_0^{(i)}|_{\mathcal{H}}^2 + |F_*^{(i)}|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}^2 \right) |\bar{g}|_{C(\bar{Q})} \right\}.
\end{aligned}$$

以上より, 定理 2.2 が示された. □

4 今後の課題

今回扱った問題は, 移動硬化則を表す項が線形 ($\mathcal{L}$ が線形) の場合であった. 非線形の場合を考えるためには, 解作用素の縮小性の評価や連続依存性の解の差の評価において, 積分の項をまとめることができず, 部分積分を適用する際に, 項の処理に困難が生じる. この部分の取り扱いについて引き続き検討が必要である.

降伏条件に対応する閾値関数が未知関数のひずみの履歴に依存する場合 (等方硬化則) を念頭に置き, 閾値関数に関する連続依存性について取り扱った. この際, 閾値関数に対する付加的な仮定が必要なり, また, 閾値関数の差の位相は $C(\bar{Q})$ となった. より実用的な位相での評価を得るために工夫が必要である.

References

- [1] Y. Akagawa, T. Fukao, and R. Kano, Time-dependence of the threshold function in the perfect plasticity model, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **32** (2023), 371–398.
- [2] Y. Akagawa and K. Matsui, Projection scheme for a perfect plasticity model with a time-dependent constraint set, *J. Math. Anal. Appl.*, **542** (2025), Article 128838, 22 pp.
- [3] M. Brokate, P. Krejčí, and H. Schnabel, On uniqueness in evolution quasivariational inequalities, *J. Convex Anal.*, **11** (2004), 111–130.
- [4] G. Duvaut and J. L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 219, Springer-Verlag, 1976.
- [5] J. L. Joly and U. Mosco, A propos de l’existence et de la régularité des solutions de certaines inéquations quasi-variationnelles, *J. Funct. Anal.*, **32**, (1979), 107–137.
- [6] R. Kano, Y. Murase, and N. Kenmochi, Nonlinear evolution equations generated by sub-differentials with nonlocal constraints, pp. 175–194 in “*Nonlocal and Abstract Parabolic Equations and their Applications*”, Vol. 86, Banach Center Publications, 2009.
- [7] N. Kenmochi, Some nonlinear parabolic variational inequalities, *Israel J. Math.*, **22** (1975), 304–331.
- [8] N. Kenmochi, Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications, *Bull. Fac. Ed. Chiba Univ.*, **30** (1981), 1–87.
- [9] N. Kenmochi, *Nonlinear Functional Inclusions of Elliptic and Parabolic Type in Banach Spaces Volume I*, Mathematical Sciences and Applications, Vol. 38, GAKUTO, 2024.
- [10] N. Kenmochi, T. Koyama, and G.H. Meyer, Parabolic PDEs with hysteresis and quasivariational inequalities, *Nonlinear Anal.*, **34** (1998), 665–686.
- [11] K. Kisiel, Dynamical proplasticity model — Existence theory for gradient type nonlinearities with Lipschitz perturbations, *J. Math. Anal. Appl.*, **450** (2017), 544–577.
- [12] K. Kisiel and K. Chelmiński, On strong solutions of viscoplasticity without safe-load conditions, *J. Differential Equations*, **269** (2020), 2264–2327.
- [13] K. Kisiel and K. Chelmiński, Prandtl–Reuss dynamical elasto-perfect plasticity without safe-load conditions, *Nonlinear Anal.*, **192** (2020), Article 111678, 28 pp.
- [14] K. Kisiel and K. Chelmiński, Quasistatic viscoplasticity without safe-load conditions, *J. Differential Equations*, **305** (2021), 368–400.
- [15] K. Kisiel and K. Kosiba, Dynamical proplasticity model with mixed boundary conditions — Theory for $\mathcal{LM}$ -type nonlinearity, *J. Math. Anal. Appl.*, **443** (2016), 187–229.

- [16] P. Krejčí and T. Roche, Lipschitz continuous data dependence of sweeping processes in BV spaces, *Discrete contin. Dyn. Syst. Ser. B*, **15** (2011), 637–650.
- [17] M. Kubo, Quasi-subdifferential operators and evolution equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, (2013), 447–456.
- [18] M. Kubo and N. Yamazaki, Global strong solutions to abstract quasi-variational evolution equations, *J. Differential Equations*, **265** (2018), 4158–4180.
- [19] M. Kubo and N. Yamazaki, Periodic solutions to a class of quasi-variational evolution equations, *J. Differential Equations*, **384** (2024), 165–192.
- [20] M. Kubo and N. Yamazaki, Elliptic-parabolic quasi-variational evolution equations, *Funkcial. Ekvac.*, **67** (2024), 1–27.
- [21] M. Kunze and M. D. P. Monteiro Marques, On parabolic quasi-variational inequalities ad state-dependent sweeping processes, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **12** (1998), 179–191.
- [22] M. D. P. Monteiro Marques, *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems, Shocks and Dry Friction*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Vol. 9, Birkhäuser, 1993.
- [23] J. J. Moreau, Raŕle par un convexe variable (Première partie), pp. 1–43 in “*Travaux du S minaire d’Analyse Convexe*”, Montperllier, 1974.
- [24] J. J. Moreau, Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space, *J. Differential Equations*, **26** (1977), 347–374.
- [25] F. Nacry and M. Sofonea, Histroy-depenedent operators and prox-regular sweeping processes, *Fixed Point Theory Algorithms Sci. Eng.*, (2022), Article 5, 23 pp.
- [26] V. Recupero, A continuity method for sweeping processes, *J. Differential Equations*, **251** (2011), 2125–2142.
- [27] V. Recupero, BV continuous sweeping processes, *J. Differential Equations*, **259** (2015), 4253–4272.
- [28] J. C. Robinson, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems — An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors*, Cambridge University Press, 2001.
- [29] R. E. Showalter, *Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 49, American Mathematical Society, 1997.
- [30] U. Stefanelli, Some quasivariational problems with memory, *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.* (8), **7** (2004), 319–333.

- [31] U. Stefanelli, Nonlocal quasivariational evolution problems, *J. Differential Equations*, **229** (2006), 204–228.
- [32] A. Visintin, Mathematical models of hysteresis, pp. 1-123 in *“The Science of Hysteresis”*, Vol. I, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2006.
- [33] A. Vladimirov, Equicontinuous sweeping processes, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, **18** (2013), 565–573.
- [34] Y. Yamada, On evolution equations generated by subdifferential operators, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **23** (1976), 491–515.