正方分割表解析における対称性の分解と最近の展開

東京理科大学　田畑　耕治
Kouji Tahata
Tokyo University of Science
E-mail address: kouji_tahata@rs.tus.ac.jp

1　はじめに

正方分割表解析は，行と列が同じ分類からなる分割表を対象とし，対角成分を基準とした対称構造やその逸脱を統計的に評価するための枠組みである．この分野は，対称モデル (Bowker, 1948)，準対称モデル (Caussinus, 1965) および周辺同等モデル (Stuart, 1955) の提案を端緒として発展し，周辺分布の構造と対称性との関係を明らかにする研究が数多く行われてきた．

正方分割表に対する代表的なモデルとしては，対称モデル，準対称モデルおよび周辺同等モデルが知られている．特に，準対称モデルは，周辺分布の非対称性を許容しつつ，セル確率の対称構造を捉えるモデル（具体的には，オッズ比の対称性）として重要な役割を果たしてきた．一方で，これらのモデル間の関係を体系的に理解するためには，対称性を単一の仮説として扱うだけでなく，複数の要素に分解して捉える視点が有用である (Kateri and Papaioannou, 1997; Kateri and Agresti, 2007; Tomizawa and Tahata, 2007; Tahata, 2020, 2022)．

このような観点から，正方分割表における対称性を「対称性の分解」という立場で捉える研究が進められてきた．すなわち，対称性を，準対称性と周辺同等性といった複数の構成要素に分解し，各要素の寄与を個別に評価する枠組みである (Caussinus, 1965)．この考え方は，モデル間の包含関係を明確にするとともに，データにおける非対称性の性質をより詳細に解釈することを可能にする．

また，正方分割表の解析において，対称モデルはしばしば制約の強いモデルであり，実際のデータに対して十分な当てはまりを示さない場合が多い．このような状況において，対称性の当てはまりが悪い理由を体系的に理解するための視点として，先に述べた対称性の分解は有効な役割を果たす．一方で，対称性が成り立たない場合の解析を目的として，これまでに二つの方向性から多くの研究が行われてきた．

第一に，対称性からの隔たりの程度を定量的に測る尺度の構築に関する研究があり，Tomizawa (1994) をはじめとして，その一般化や拡張が提案されている (Tomizawa *et al.*, 1998; Tahata *et al.*, 2008)．第二に，対称性を緩和した非対称構造を直接表現するモデルの構築に関する研究があり，古典的な研究として McCullagh (1978)，Goodman (1979)，Agresti (1983)，Tahata *et al.* (2016) などが挙げられる．

特に，非対称モデルの構築に関する研究においては，Kateri and Papaioannou (1997) が f-divergence (Csiszár and Shields, 2004) に基づくモデリングの枠組みを提案して以降，対数線形モデルの枠組みで与えられてきた既存のモデルを包含する形で，一般化されたモデルが数多く提案されている (Kateri and Agresti, 2007; Tahata, 2020)．これらの研究は，対称性からの逸脱を柔軟に記述するための理論的基盤を提供している．

本稿では，著者らによる一連の研究を中心に，正方分割表解析における最近の動向を概観する．特に，対称性の分解，準対称性および周辺同等性というキーワードを軸として，理論的拡張および新たな解析手法について紹介することを目的とする．また，議論の見通しを優先するため，数学的な厳密性を簡略化して述べている部分がある．厳密な定義や証明については，参考文献に挙げた原著論文を参照されたい．

第 2 節では，正方分割表解析の枠組みを多元分割表へ拡張した研究を紹介する (Okahara and Tahata, 2025a,b)．ここでは，対称性の分解という考え方が，同じ分類からなる多元分割表においても自然に定式化できることを示す．第 3 節では，Aitchison 幾何の枠組みを導入することにより，新しい対称性の分解を与える研究を取り上げる (Nakamura *et al.*, 2025)．このアプローチは，従来とは異なる幾何学的視点から対称構造を捉える点に特徴がある．さらに，第 4 節では，対称性からの隔たりを測る尺度を用いた可視化手法に関する研究を紹介する (Urasaki *et al.*, 2025)．これは，数値的評価にとどまらず，分割表データの構造を直観的に理解することを目的とした試みである．最後に，第 5 節において，本稿の内容を総括し，今後の課題および正方分割表解析のさらなる発展の可能性について述べる．

2　多元分割表への拡張

正方分割表解析において発展してきた対称性の分解という考え方は，二元分割表に特有のものではなく，多元分割表に対しても自然に拡張できる構造を持っている (Bhapkar and Darroch, 1990; Tomizawa and Tahata, 2007)．Okahara and Tahata (2025a,b) は，この点に着目し，多元分割表における対称モデルを，情報理論および最大エントロピー原理の観点から体系的に定式化した．本節では，その基本的な考え方と主結果を紹介する．

順序カテゴリ多元 r^T 分割表を考えるにあたり，各変数が同一の順序カテゴリ集合を持つと仮定する．X_s（$s \in V = \{1, \dots, T\}$）を確率変数とする．各カテゴリに順序スコア

$$u_1 < \cdots < u_r$$

を与える．これらのスコアは，順序構造を表現するための既知定数として扱われ，推定対象ではない．$\boldsymbol{i} = (i_1, \dots, i_T)$ をセルの添字とし，対応するスコアベクトルを

$$\boldsymbol{u_i} = (u_{i_1}, \dots, u_{i_T})^\top$$

と表す．

多元分割表における完全対称モデル（S モデル）は，添字の置換によって生成される対称集合 $D(\boldsymbol{i})$ 上でセル確率 $\pi_{\boldsymbol{i}}$ が等しいことを要請するモデルである．しかしながら，実データにおいては，完全な対称性は過度に制約的であることが多い．そこで，Okahara and Tahata (2025b) は，セル確率の和に関するいくつかの制約条件が同時に与えられている状況のもとで，S モデルからの情報距離（例えば，Kullback–Leibler divergence）を最小にするモデルを構成することを考えた．

このような問題設定は，情報理論的アプローチ (Bishop *et al.*, 1975) として知られており，正方分割表解析においては Kateri and Papaioannou (1997) や Kateri and Agresti (2007) で用いられている．すなわち，与えられた制約条件のもとで，基準分布からの情報距離を最小化する分布を採用するという考え方である．Okahara and Tahata (2025b) は，この枠組みを f-divergence に基づいて一般化し，多元分割表に対する新しい非対称モデルを導出した．

具体的には，基準分布を

$$\pi_{\boldsymbol{i}}^{S} = \frac{1}{|D(\boldsymbol{i})|} \sum_{\boldsymbol{j} \in D(\boldsymbol{i})} \pi_{\boldsymbol{j}}$$

とし，対称集合ごとの確率和，周辺平均および二次の混合モーメントを制約条件として課したとき，f-divergence を最小化する唯一の解が，セル確率

$$\pi_{\boldsymbol{i}} = \pi_{\boldsymbol{i}}^{S} F^{-1}\big(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}}^{\top}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}}^{\top}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}} + \gamma_{\boldsymbol{i}}\big)$$

の形で表されることを示した．ここで，$\boldsymbol{\alpha}$ は一次項の係数ベクトル，$\boldsymbol{B}$ は対称行列であり，$\gamma_{\boldsymbol{i}}$ は対称集合ごとに一定となる対称的な交互作用項である．

Okahara and Tahata (2025b) の提案モデルは，f-divergence に基づく Gaussian symmetry（GS[f]）モデルと呼ばれ，構造的に多変量正規分布との類似性を持っている．連続変数の場合，平均と共分散行列を固定したもとで Shannon エントロピーを最大化すると，多変量正規分布が得られることが知られている．同様に，本研究で提案されたモデルは，順序スコア上で定義された離散分布に対して，平均および共分散行列に対応する制約のもとで最大エントロピー原理を適用した結果として解釈できる．この意味で，提案モデルは「Gaussian」という名称を持ち，多元分割表における正規型構造を捉えるモデルと位置づけられる．

特に，関数 f として Kullback–Leibler divergence を選択した場合には，指数関数型のモデルが得られ，セル確率の比がスコアの線形結合として表現される．これは，対数線形モデルとの整合性を持ちつつ，対称集合内での条件付き確率の構造を明示的に記述できる点に特徴がある．一方，Pearson の χ^2 divergence や Hellinger 距離を用いた場合には，条件付き確率の差や冪変換に基づく表現が得られ，対称性からの逸脱を異なる尺度で捉えることが可能となる．

非対称性を表現する GS[f] モデルを補完し，S モデルを再構成するためのモデルを導入する．提案された GS[f] モデルは，スコア変換 $g(i) = u_i$ に関する周辺平均および二次の混合モーメントに関連するモデルである．そこで，これらの量に対して対称な構造を課すモデルとして，二次モーメント同等性（second-moment equality, ME_2）モデルを導入する．ME_2 モデルは，次の条件によって定義される：

$$\mu_1 = \mu_s, \quad \sigma_1^2 = \sigma_s^2 \quad \text{および} \quad \rho_{12} = \rho_{st}, \quad s, t \in V.$$

ここで，

$$\mu_u = \mathrm{E}\bigl[g(X_u)\bigr], \quad \sigma_u^2 = \mathrm{Var}\bigl[g(X_u)\bigr], \quad \rho_{st} = \frac{\mathrm{E}\bigl[g(X_s)\, g(X_t)\bigr] - \mu_s \mu_t}{\sigma_s \sigma_t}$$

である．

$T \geq 3$ のもとで，定理「S モデルが成り立つことと，GS[f] モデルおよび ME_2 モデルが同時に成り立つこととは同値である」は，S モデルの構成に関する基本的な結果を与える．以上の結果により，S モデルは，GS[f] モデルと ME_2 モデルに分解できることが示された．この分解は，尤度比検定統計量 G^2 に対して

$$G^2(\mathrm{S}) = G^2(\mathrm{GS}[f]) + G^2(\mathrm{ME}_2) + o_p(1)$$

が成り立ち，多元分割表における非対称性の要因を構造的に分析するための理論的基盤を与えている．

3　新しい対称性の分解

本節では，Nakamura *et al.* (2025) によって提案された，Aitchison 幾何に基づく新しい対称性の分解について紹介する．本研究は，正方分割表解析における対称構造を，確率分布全体の幾何学的性質として捉え直す点に特徴がある．

従来の正方分割表解析では，対称モデルや準対称モデルは，主として対数線形モデルの枠組みのもとで定式化され，周辺同等モデルは，セル確率に対する線形制約として定式化されてきた．この枠組みでは，モデル間の関係は包含関係や適合度検定統計量の分解として理解される (Tomizawa and Tahata, 2007; Tahata, 2020)．しかしながら，確率分布の空間そのものの構造に着目すると，これらのモデルは必ずしも直交的な関係にあるとは限らない．

この問題に対し，本研究では，分割表のセル確率を組成データとして捉え，Aitchison 幾何の枠組みを導入する (Egozcue *et al.*, 2015; Nakamura *et al.*, 2024)．Aitchison 幾何は，単体上の確率分布を対数比変換を通じてユークリッド空間と対応付け，その像に内積構造を導入する幾何学である．この枠組みを用いることで，確率分布の変動を幾何学的に分解することが可能となる．

具体的には，正方分割表における確率分布空間を，Aitchison 内積に関して直交する部分空間へと分解することが考えられる．Nakamura *et al.* (2025) は，Egozcue *et al.* (2015) と Nakamura *et al.* (2024) の結果を援用して，独立かつ対称に対応する部分空間 $\mathcal{S}_{syind}$，独立かつ歪対称に対応する部分空間 $\mathcal{S}_{skind}$，交互作用かつ対称に対応する部分空間 $\mathcal{S}_{syint}$ および交互作用かつ歪対称に対応する部分空間 $\mathcal{S}_{skint}$ を明示的に構成し，これらが Aitchison 幾何のもとで互いに直交することを示している．この結果は，従来は包含関係として整理されてきたモデル間の関係とは異なり，Aitchison 幾何の枠組みにおいて，これらの構造が互いに直交するという新しい関係性が成り立つことを示している．また，これらの構造を用いて対称性，準対称性および幾何周辺同等性を導入している．ここで導入された準対称性が Caussinus (1965) の準対称性と同値であることは非常に興味深い．

この幾何学的分解に基づくと，任意の分割表（確率表）$\mathbf{P}$ は，独立かつ対称 $\mathbf{P}_{syind}$，独立かつ歪対称 $\mathbf{P}_{skind}$，交互作用かつ対称 $\mathbf{P}_{syint}$ および交互作用かつ歪対称 $\mathbf{P}_{skint}$ に対応する成分の和として一意的に表現される：

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{syind} \oplus \mathbf{P}_{skind} \oplus \mathbf{P}_{syint} \oplus \mathbf{P}_{skint}.$$

ただし，$\oplus$ は，perturbation である．この分解は，第 2 節で紹介した多元分割表における対称性の分解とは異なる，新たな対称性の分解を与えるものである．特に，Aitchison 幾何の枠組みのもとでは，これらの成分が内積に関して互いに直交することが示されており，各成分が独立した情報を担っていることが幾何学的に明確化される．この直交性により，非対称性の要因を構造ごとに切り分けて解釈することが可能となる．

さらに，Nakamura *et al.* (2025) では，Aitchison 距離を用いることで，各成分の寄与の大きさを定量的に評価する方法も提案されている．また，対称性からの逸脱を測る指標 $S(\mathbf{P})$，準対称性からの逸脱を測る指標 $Q(\mathbf{P})$，幾何周辺同等性からの逸脱を測る指標 $M(\mathbf{P})$ を導入し，対称性からの逸脱が準対称性からの逸脱と幾何周辺同等性からの逸脱との和と等しいことが成り立つことを示している：

$$S(\mathbf{P}) = Q(\mathbf{P}) + M(\mathbf{P}).$$

これにより，どの種類の非対称性がデータの構造を支配しているかを，数値的に把握することが可能となる．この点は，モデル選択や結果の解釈において実用的な意義を持つ．

以上のように，Aitchison 幾何に基づく新しい対称性の分解は，正方分割表解析における既存のモデル群を，確率分布空間の幾何構造として統一的に理解するための理論的枠組みを提供している．この視点は，次節で紹介する対称性の可視化とも密接に関連しており，分割表解析の新たな展開を示すものと言える．

4　対称性の可視化

分割表の全体構造やカテゴリ間の関係を理解するために，これまでに多くの解析手法が提案されてきた．中でも，カテゴリ間の関係を視覚的に把握する方法として，Benzécri により提案された対応分析（correspondence analysis, CA）は広く用いられている (Benzécri, 1992)．CA は Pearson のカイ二乗統計量に基づく可視化手法であり，SAS や R などの統計ソフトウェアを用いて容易に実装できることから，現在でも実データ解析において重要な役割を果たしている．また，power-divergence 統計量の近似に基づく可視化手法も提案されている (Beh and Lombardo, 2023)．

これらの多くは，独立性や連関性の評価に基づいてカテゴリ間の関係を把握することを目的としている．また，独立性からの隔たりを測る尺度として，例えば Urasaki *et al.* (2023) などがある．一方で，正方分割表における対称性からの逸脱に着目した可視化手法も提案されてきた．特に，対称モデルのもとでの期待値と観測値との差から得られる歪対称行列に特異値分解を適用する手法が知られている (Greenacre, 2000)．このようなアプローチは，対称性からの隔たりを統計量として捉えるだけでなく，その構造を低次元空間で直観的に理解することを可能にする．また，正方分割表における対称性からの逸脱に着目した可視化手法においても power-divergence 統計量の近似に基づく方法が提案されている (Beh and Lombardo, 2024)．

本節では，Tomizawa *et al.* (1998) により提案された power-divergence 型尺度を用いて，正方分割表における対称性からの逸脱を可視化する方法を紹介する (Urasaki *et al.*, 2025)．Bowker (1948) の対称性検定により対称モデルが棄却された場合，対称性からの逸脱の程度を定量的に評価することが重要となる．$r \times r$ 正方分割表において，(i, j) セル確率を p_{ij} とする．Tomizawa *et al.* (1998) は，power-divergence に基づく尺度

$$\Phi^{(\lambda)} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{2^{\lambda}-1} I^{(\lambda)}(\{p^*_{ij}; p^s_{ij}\}), \qquad \lambda > -1,$$

を提案した．ここで，

$$I^{(\lambda)}(\{p^*_{ij}; p^s_{ij}\}) = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \sum_{i \neq j} p^*_{ij} \left[\left(\frac{p^*_{ij}}{p^s_{ij}} \right)^{\lambda} - 1 \right]$$

であり，$p^*_{ij} = p_{ij}/\delta$，$p^s_{ij} = (p^*_{ij} + p^*_{ji})/2$，$\delta = \sum_{i \neq j} p_{ij}$ と定義される．p^*_{ij} は，観測値が主対角成分以外のセルに入るという条件のもとで (i, j) セルに入る条件付き確率を表している．

正方分割表において，対称モデルは主対角成分に制約を課さないため，Tomizawa (1994) では，主対角成分を除いた条件付き確率 (p^*_{ij}) に基づく尺度が導入された．Tomizawa *et al.* (1998) の尺度 $\Phi^{(\lambda)}$ は，Tomizawa (1994) の尺度を一般化したものであり，λ を用いることで多様な divergence を包含する枠組みを与えている．

$\Phi^{(\lambda)}$ は，$\lambda > -1$ のもとで次の性質を満たす．

1. $0 \leq \Phi^{(\lambda)} \leq 1$.

2. $\Phi^{(\lambda)} = 0$ は完全な対称構造 $p_{ij} = p_{ji}$ と同値である．

3. $\Phi^{(\lambda)} = 1$ は対称性からの逸脱が最大である場合，すなわち，任意の $i < j$ に対して，$p_{ij} = 0$ かつ $p_{ji} > 0$，または，$p_{ij} > 0$ かつ $p_{ji} = 0$.

Tomizawa *et al.* (1998) の尺度を用いた可視化では，対称性からの逸脱を表す尺度 $\Phi^{(\lambda)}$ を構成する部分尺度から得られる歪対称行列 $S_{\text{skew}}^{(\lambda)}$ に特異値分解を適用する．このとき，得られた特異値を用いることで，対称性からの逸脱の大きさを幾何学的に解釈することが可能となる．

特に重要な量が total inertia である．歪対称行列 $S_{\text{skew}}^{(\lambda)}$ に対して，

$$\Phi^{(\lambda)} = \mathrm{trace}\left(S_{\text{skew}}^{(\lambda)\top} S_{\text{skew}}^{(\lambda)}\right) = \sum_{m=1}^{M} \mu_m^2$$

と表され，これは特異値の二乗和として与えられる．ここで μ_m は第 m 特異値であり，M は r が偶数のとき $M = r$，r が奇数のとき $M = r - 1$ である．CA プロットにおいて，第 m 次元の主慣性は μ_m^2 と解釈され，total inertia に対する寄与率は

$$100 \times \frac{\mu_m^2}{\Phi^{(\lambda)}}$$

によって与えられる．人間の認知的制約を考慮すると，可視化は高々二次元あるいは三次元までが望ましく，特に第 1・第 2 次元は，対称性からの逸脱を最もよく反映する軸として用いられる．また，実データへの適用においては，尺度 $\Phi^{(\lambda)}$ の推定量 $\widehat{\Phi}^{(\lambda)}$ を用いることに注意する．

このように，total inertia を通じて各次元の寄与を明確に評価できる点は，Tomizawa *et al.* (1998) の尺度に基づく可視化の大きな特徴であり，異なる標本サイズを持つ正方分割表間でも比較可能な可視化を可能にしている．

5　おわりに

本稿では，正方分割表解析における対称構造に関する最近の研究動向について，著者らの一連の研究を中心に概観した．特に，対称性の分解という視点のもとで，準対称性および周辺同等性の役割を整理し，その理論的拡張と新たな解析手法について紹介した．

第 2 節では，正方分割表において確立されてきた対称性の分解の考え方を，多元分割表へ拡張する研究を取り上げた．情報理論的アプローチのもとで，与えられた複数の制約条件を同時に満たす分布のクラスを考え，その中で f-divergence を最小化することにより，対称性のモデルが一意的に構成されることを示した．この結果は，多元分割表に

おける対称構造を，制約と最適性の観点から体系的に整理する枠組みを与えるものである．また，Okahara and Tahata (2025b) で得られたモデルは，多変量正規分布に見られる平均・共分散構造との形式的類似性を有しており，多元分割表における依存構造を統一的に記述するための基盤を提供している．

第 3 節では，Aitchison 幾何に基づく新しい対称性の分解について述べた．対数比変換を通じて確率分布空間に内積構造を導入することにより，正方分割表における独立性や交互作用，ならびに対称性や歪対称性といった構造が，幾何学的に直交する成分として整理できることを示した (Nakamura *et al.*, 2025)．この結果は，従来，モデルの包含関係として整理されてきた対称構造とは異なり，Aitchison 幾何の枠組みにおいて，各構造が互いに直交するという新たな関係性が成り立つことを明らかにするものである．

第 4 節では，対称性からの逸脱の程度を尺度として定量化し，それに基づいて可視化を行う手法について紹介した．とりわけ，Tomizawa *et al.* (1998) の power-divergence 型尺度に基づく可視化では，対称性からの隔たりが total inertia として明確に定量化され，特異値分解によって得られる低次元表示が，その情報を効率的に反映することを示した．このような可視化は，仮説検定や適合度評価のみでは捉えにくい非対称性の構造や方向性を直観的に理解するための有効な手段であり，第 3 節で述べた幾何学的な対称性の分解と組み合わせることで，分割表データの構造的理解を一層深めることが期待される．

今後の課題としては，これらの理論的枠組みを，より一般的なカテゴリ構造や欠測を含む分割表へと拡張することが挙げられる．また，実データ解析への応用を通じて，提案手法の有効性や解釈上の利点を検証することも重要である．さらに，距離や幾何構造に基づく視点を発展させることで，分割表解析と他分野との連携が進むことも期待される．

謝辞

本稿で紹介した一連の研究は，多くの共同研究者との議論と協力によって得られた成果である．特に，大学院生の岡原久也氏，中村慶太氏，浦崎航氏には，それぞれの研究を通じて有益な議論と多くの示唆を頂いた．また，中川智之先生（明星大学）および土田潤先生（京都女子大学）には，本研究全体にわたり貴重な助言と継続的なご支援を賜った．ここに記して，深く感謝の意を表する．

本研究は JSPS 科研費 JP20K03756 及び京都大学数理解析研究所の助成を受けたものである．

参考文献

Agresti, A. (1983). A simple diagonals-parameter symmetry and quasi-symmetry model. *Statistics and Probability Letters* **1**, 313–316.

Beh, E. J. and Lombardo, R. (2023). Correspondence analysis using the cressie–read family of divergence statistics. *International Statistical Review* **92**, 17–42.

Beh, E. J. and Lombardo, R. (2024). Correspondence analysis for assessing departures from perfect symmetry using the cressie–read family of divergence statistics. *Symmetry* **16**.

Benzécri, J.-P. (1992). *Correspondence Analysis Handbook.* Marcel Dekker, New York.

Bhapkar, V. P. and Darroch, J. N. (1990). Marginal symmetry and quasi symmetry of general order. *Journal of Multivariate Analysis* **34**, 173–184.

Bishop, Y. M., Fienberg, S. E. and Holland, P. W. (1975). *Discrete Multivariate Analysis: Theory and Practice.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Bowker, A. H. (1948). A test for symmetry in contingency tables. *Journal of the American Statistical Association* **43**, 572–574.

Caussinus, H. (1965). Contribution à l'analyse statistique des tableaux de corrélation. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques* **4e série, 29**, 77–183.

Csiszár, I. and Shields, P. C. (2004). *Information Theory and Statistics: A Tutorial.* Now Publishers Inc., Hanover.

Egozcue, J. J., Pawlowsky-Glahn, V., Templ, M. and Hron, K. (2015). Independence in contingency tables using simplicial geometry. *Communications in Statistics - Theory and Methods* **44**, 3978–3996.

Goodman, L. A. (1979). Multiplicative models for square contingency tables with ordered categories. *Biometrika* **66**, 413–418.

Greenacre, M. (2000). Correspondence analysis of square asymmetric matrices. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)* **49**, 297–310.

Kateri, M. and Agresti, A. (2007). A class of ordinal quasi-symmetry models for square contingency tables. *Statistics and Probability Letters* **77**, 598–603.

Kateri, M. and Papaioannou, T. (1997). Asymmetry models for contingency tables. *Journal of the American Statistical Association* **92**, 1124–1131.

McCullagh, P. (1978). A class of parametric models for the analysis of square contingency tables with ordered categories. *Biometrika* **65**, 413–418.

Nakamura, K., Nakagawa, T. and Tahata, K. (2024). Symmetry of square contingency tables using simplicial geometry. *Austrian Journal of Statistics* **53**, 85–98.

Nakamura, K., Nakagawa, T. and Tahata, K. (2025). Quasi-symmetry and geometric marginal homogeneity: a simplicial approach to square contingency tables. *Information Geometry* .

Okahara, H. and Tahata, K. (2025a). A generalized ordinal quasi-symmetry model and its separability for analyzing multi-way tables. *Japanese Journal of Statistics and Data Science* **8**, 949–974.

Okahara, H. and Tahata, K. (2025b). Modeling asymmetry in multi-way contingency tables with ordinal categories via f-divergence. *Statistical Papers* **67**, 3.

Stuart, A. (1955). A test for homogeneity of the marginal distributions in a two-way classification. *Biometrika* **42**, 412–416.

Tahata, K. (2020). Separation of symmetry for square tables with ordinal categorical data. *Japanese Journal of Statistics and Data Science* **3**, 469–484.

Tahata, K. (2022). Advances in quasi-symmetry for square contingency tables. *Symmetry* **14**, 1051.

Tahata, K., Iwashita, T. and Tomizawa, S. (2008). Measure of departure from conditional marginal homogeneity for square contingency tables with ordered categories. *Statistics* **42**, 453–466.

Tahata, K., Naganawa, M. and Tomizawa, S. (2016). Extended linear asymmetry model and separation of symmetry for square contingency tables. *Journal of the Japan Statistical Society* **46**, 189–202.

Tomizawa, S. (1994). Two kinds of measures of departure from symmetry in square contingency tables having nominal categories. *Statistica Sinica* **4**, 325–334.

Tomizawa, S., Seo, T. and Yamamoto, H. (1998). Power-divergence-type measure of departure from symmetry for square contingency tables that have nominal categories. *Journal of Applied Statistics* **25**, 387–398.

Tomizawa, S. and Tahata, K. (2007). The analysis of symmetry and asymmetry: Orthogonality of decomposition of symmetry into quasi-symmetry and marginal symmetry for multi-way tables. *Journal de la Société Française de Statistique* **148**, 3–36.

Urasaki, W., Nakagawa, T., Momozaki, T. and Tomizawa, S. (2023). Generalized cramér's coefficient via f-divergence for contingency tables. *Advances in Data Analysis and Classification* .

Urasaki, W., Nakagawa, T., Tsuchida, J. and Tahata, K. (2025). Visualization for departures from symmetry with the power-divergence-type measure in square contingency tables. *Psychometrika* 1–20.