不連続群論における位相群の similar 類とコンパクト化の関係について

広島大学大学院先進理工系科学研究科
長屋 拓暁

Hiroaki Nagaya
Graduate School of Advanced Science and Engineering, Hiroshima University

1　概要

G の閉部分群 H, L を固定し, 等質空間 G/H に L が自然に作用する設定では, 作用が proper となる条件は G 内の 2 つの部分群 H, L の関係性で言い換えられる. さらにその条件は H, L が部分群に限らず, より一般の 2 つの部分集合に対しても定式化できる. この経緯を踏まえ, 小林俊行氏 ([5]) は G 内の部分集合の対に関して proper 性を定義した. また, similar という同値関係を G の冪集合上に導入し, 部分集合の対が proper であることは similar の取り替えによらないことも示した. さらに同論文では, この similar という関係を不連続双対と呼ばれる集合で決定づける双対性定理を証明した. その後吉野太郎氏 ([8]) によって, 双対性定理はリー群を含む一般の σ-コンパクトな局所コンパクト群に対して成り立つことが示された. 今回の主結果の一つは, 粗幾何学の観点から 2 つの部分集合の proper 性, similar, 不連続双対という概念を定式化し, 双対性定理が成り立つ条件を明らかにしたことである (定理 4.5 を見よ). もう一つの結果として, 冪集合族の similar による同値類の集合が, Higson コンパクト化と呼ばれるコンパクト化の境界の閉集合族に埋め込めることを示した (定理 6.1 を見よ). 本論文は奥田隆幸氏 (広島大学) との共同研究に基づくものである.

2　歴史的背景

離散群が多様体に自由かつ固有不連続に作用するとき, その軌道空間もまた多様体になることが知られている. さらに, その多様体が (擬) リーマン計量やシンプレティック構造などの幾何構造を持つ場合, その軌道空間にも引き継がれる. 固有不連続な作用を探すときに, 以下で定義する proper な作用が役に立つ.

定義 2.1. L を局所コンパクトハウスドルフ群, X を局所コンパクトハウスドルフ空間とし, X 上の連続 L-作用 ρ を考える. 作用 ρ が **proper** であるとは, 任意のコンパクト集合 $C \subset X$ に対し, L の部分集合 $L_C := \{l \in L \mid lC \cap C \neq \emptyset\}$ もまたコンパクトとなることである.

proper な作用は, 任意に作用する群の離散部分群をとると, 制限した作用は自動的に固有不連続

になるという性質を持つ．そのため, 固有不連続の研究は, proper 性の研究と離散部分群を調べる研究の二つに分けることもできる．

本論文の主題はこの proper 性の研究であり, 空間を等質空間に限定して話を進める．等質空間への作用の proper 性については以下の言い換えが成り立つ．

定理 2.2. G を局所コンパクトハウスドルフ群, H, L をその閉部分群とし, 作用 ρ を等質空間 G/H 上の自然な L-作用とする．このとき, 以下は同値である．

1. 作用 ρ は proper である．
2. 任意のコンパクト部分集合 $S \subset G$ に対して, $L \cap SHS^{-1}$ もまたコンパクトである．

上記の定理のもと, 小林俊行氏は部分群とは限らないより一般の 2 つの部分集合に対して, proper という概念を以下のように導入した ([5])．以降 G を局所コンパクトハウスドルフ群とする．

定義 2.3. L, H を G の部分集合とする．組 L と H が G 上の **proper** であるとは, 任意のコンパクト集合 $S \subset G$ に対して, $L \cap SHS^{-1}$ もまたコンパクトとなることをいう．このとき $L \pitchfork_G H$ と表す．また, 集合 $\pitchfork(L; G)$ を

$$\pitchfork(L; G) := \{H \subset X \mid L \pitchfork_G H\}$$

と定め, **不連続双対**と呼ぶ．

また, $L \pitchfork_G H$ という条件は対称であることを示しているのが, 次の定理である．

定理 2.4 (小林 [5])**.** L, H を G の閉部分群とする．このとき, 以下の 4 条件は同値である．

1. L の自然な G/H への作用は proper である．
2. H の自然な G/L への作用は proper である．
3. $L \pitchfork_G H$ が成り立つ．
4. $H \pitchfork_G L$ が成り立つ．

この定理により, 等質空間上の作用の固有性は G の冪集合 $\mathcal{P}(G)$ 上の関係 $\pitchfork_G$ を調べることに帰着される．この対称な関係 $\pitchfork_G$ を調べるために, 小林氏は similar という関係も導入している．

定義 2.5. L, L' を G の部分集合とする．L と L' が **similar** であるとは, あるコンパクト集合 $S \subset G$ が存在して, $L \subset SL'S^{-1}$ かつ $L' \subset SLS^{-1}$ が成り立つことをいう．このとき, $L \sim_G L'$ と表す．

この similar という関係は同値関係であることが容易に示せる．上記の定義を導入した背景として以下の命題がある．

命題 2.6. L, L', H を G の部分集合とし, $L \sim_G L'$ とする．このとき, $L \pitchfork_G H$ であることと $L' \pitchfork_G H$ であることは同値である．

これにより, proper 性の議論は similar での取り替えを許すことがわかる. さらに小林氏は, この similar という同値関係に対して, 以下の問いをたてた.

疑問 2.7. 不連続双対 $\pitchfork(H;G)$ が与えられたとき, 部分集合 $H \subset G$ は similar を除いて一意に復元できるか?

この問いに対して, 小林氏は G が線形簡約リー群である場合に**不連続双対定理**と呼ばれる定理を示し, 肯定的な回答を示した. その後より一般に吉野太郎氏により, 不連続双対定理は以下の設定に一般化された.

定理 2.8 (吉野 [8])**.** G を σ-コンパクトな局所コンパクトハウスドルフ群とし, L, L' を G の部分集合とする. このとき, 以下の 2 条件は同値である.

1. $L \sim_G L'$ が成り立つ.
2. $\pitchfork(L;G) = \pitchfork(L';G)$ が成り立つ.

以降では, 2 つの集合に対する proper 性, similar 性, 不連続双対を粗幾何学の観点から定式化する.

3 粗幾何に関する予備知識

本節では，粗幾何に関する基本的な定義と性質をまとめる.

定義 3.1. 集合 X をとる. $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ が次の五条件を満たすとき，X 上の**粗構造**と呼ぶ.

1. $\mathrm{diag}(X) := \{(x,x) \mid x \in X\} \in \mathcal{E}$.
2. $E \in \mathcal{E}$ ならば $E^T := \{(x',x) \mid (x,x') \in E\} \in \mathcal{E}$.
3. $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ ならば $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}$.
4. $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ ならば
$$E_1 \circ E_2 := \{(x,z) \in X \times X \mid \exists y \in X \text{ s.t. } (x,y) \in E_1,\ (y,z) \in E_2\} \in \mathcal{E}.$$
5. $E \in \mathcal{E}$ ならば，各 $E' \subset E$ に対して $E' \in \mathcal{E}$.

組 $(X, \mathcal{E})$ を**粗空間**と呼び，$\mathcal{E}$ の元を**制御集合**という.

また, $\mathcal{E}^0 \subset \mathcal{P}(X \times X)$ が次の四条件を満たすとき，$\mathcal{E}^0$ を粗構造の**基底**という:

(i)' ある $E' \in \mathcal{E}^0$ が存在して $\mathrm{diag}(X) \subset E'$ を満たす.
(ii)' 任意の $E \in \mathcal{E}^0$ に対し，$E^T \subset E'$ を満たす $E' \in \mathcal{E}^0$ が存在する.
(iii)' 任意の $E_1, E_2 \in \mathcal{E}^0$ に対し，$E_1 \cup E_2 \subset E'$ を満たす $E' \in \mathcal{E}^0$ が存在する.
(iv)' 任意の $E_1, E_2 \in \mathcal{E}^0$ に対し，$E_1 \circ E_2 \subset E'$ を満たす $E' \in \mathcal{E}^0$ が存在する.

X 上の粗構造の基底 $\mathcal{E}^0$ に対して,

$$\langle \mathcal{E}^0 \rangle := \{\, E \subset X \times X \mid \exists\, E^0 \in \mathcal{E}^0 \ \text{ s.t. } \ E \subset E^0 \,\}$$

と書くことにする．このとき $\langle \mathcal{E}^0 \rangle$ は X 上の粗構造をなす．粗空間 $(X, \mathcal{E})$ が**可算基底**をもつとは, $\mathcal{E}$ の粗基底 $\mathcal{E}_0$ で可算なものが存在することをいう.

粗空間は距離空間の一般化である．実際に以下の例のように距離空間から粗構造が誘導される.

例 3.2. (X, d) を距離空間とする．$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$E_n := \{(x, y) \mid d(x, y) \leq n\} \subset X \times X$$

と定める．このとき, $\mathcal{E}_0 := \{E_n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ は粗構造の基底となる．この基底から誘導される粗構造 $\mathcal{E}_d$ を**有界粗構造**と呼ぶ．定め方から明らかに可算基底を持つ.

また, 局所コンパクトハウスドルフ群 G に対しても, 粗構造が備わる.

例 3.3. G を局所コンパクトハウスドルフ群とする．任意のコンパクト部分集合 $S \subset G$ に対して,

$$E_S := \{(x, y) \mid x \in SyS^{-1}\}$$

と定める．このとき, $\mathcal{E}_0^{\mathrm{LR}} := \{E_S \mid S \subset G \text{ はコンパクト }\}$ は粗構造の基底となる．この基底から誘導される粗構造 $\mathcal{E}^{\mathrm{LR}}$ を **LR-粗構造**と呼ぶ．特筆すべきこととして, G が加えて σ-コンパクトであるとき, LR-粗構造は可算基底を持つ.

粗構造の元 $E \in \mathcal{E}$ を決めるごとに, 任意の部分集合に対して E-近傍という概念が以下のように定義できる.

定義 3.4. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$，制御集合 $E \in \mathcal{E}$，部分集合 $S \subset X$ に対し，集合

$$E[S] := \{\, x \in X \mid \exists\, y \in S \text{ s.t. } (x, y) \in E \,\}$$

を S の E-**近傍**という.

以降の議論を簡潔にするために, 粗空間における粗連結性を以下で定義し, 今後粗空間を考える際には粗連結であることを仮定しておく.

定義 3.5. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ が**粗連結**であるとは, 任意の二点 $x, y \in X$ に対して, $\{(x, y)\} \in \mathcal{E}$ が成り立つことをいう.

例 3.2 や例 3.3 で紹介した粗構造は全て粗連結である．また下記のように粗空間における有界集合を定義する.

定義 3.6. 粗連結な粗空間 $(X, \mathcal{E})$ において, $B \subset X$ が**有界**であるとは, ある有限集合 S と $E \in \mathcal{E}$ が存在して $B \subset E[S]$ を満たすことをいう.

以後，粗空間 $(X, \mathcal{E})$ の全ての有界集合の族を $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ と書く.

本節の最後に, 粗同値であることを以下のように定義する.

定義 3.7. $(X,\mathcal{E}),(Y,\mathcal{F})$ を粗空間とし, $f:X\to Y$ を写像とする．このとき, f が**粗同値**であるとは, 以下の 3 条件を満たすことである．

1. 任意の $E\in\mathcal{E}$ について, $f_*E:=\{(f(x),f(x'))\mid (x,x')\in E\}$ が $\mathcal{F}$ に属する．
2. 任意の $F\in\mathcal{F}$ について, $f^*F:=\{(x,x')\mid (f(x),f(x'))\in F\}$ が $\mathcal{E}$ に属する．
3. ある $F\in\mathcal{F}$ が存在して, $F[f(X)]=Y$ となる．

4 粗不連続双対定理

この節では, 不連続双対定理に欠かせない proper 性, similar, 不連続双対を粗幾何学の観点から定式化する．本節の最後には, 粗幾何学的な不連続双対定理の十分条件を与える．以降, $(X,\mathcal{E})$ を粗連結な粗空間とする．

定義 4.1. X の部分集合の組 (S,T) が**漸近的に交わらない**とは, 任意の $E\in\mathcal{E}$ に対し $S\cap E[T]$ が有界であることをいう．このとき, 記号 $S\pitchfork_{\mathcal{E}} T$ で表す．また, 集合 $\pitchfork_{\mathcal{E}}(S;X)$ を

$$\pitchfork_{\mathcal{E}}(S;X):=\{T\subset X\mid S\pitchfork_{\mathcal{E}} T\}$$

と定める．

これに対し, 著者らは過去の研究で以下を示している．

定理 4.2. ([7]) G を局所コンパクトハウスドルフ群とし, $\mathcal{E}^{\mathrm{LR}}$ を G 上の LR 粗構造とする (例 3.3 を見よ)．また, L,H を G の部分集合とする．このとき以下は同値である．

1. $L\pitchfork_G H$ が成り立つ．すなわち L と H は proper である (定義 2.3 を見よ)．
2. $L\pitchfork_{\mathcal{E}^{\mathrm{LR}}} H$ が成り立つ．すなわち L と H は漸近的に交わらない．

特に, 不連続双対 $\pitchfork(L;G)$ (定義 2.3 を見よ) と集合 $\pitchfork_{\mathcal{E}^{\mathrm{LR}}}(L;G)$ は一致する．

これにより, proper 性や不連続双対が粗幾何学の観点から定式化された．次に similar について考察する．

定義 4.3. 粗空間 X 上の部分集合 S,T に前順序 $S\leq_{\mathcal{E}} T$ をある $E\in\mathcal{E}$ が存在して, $S\subset E[T]$ となることにより定義する．また, S と T が **coarsely similar** であるとは, $S\leq_{\mathcal{E}} T$ かつ $T\leq_{\mathcal{E}} S$ を満たすことをいう．このとき, $S\sim_{\mathcal{E}} T$ と表す．

上の設定のもとで, $\sim_{\mathcal{E}}$ は $\mathcal{P}(X)$ 上の同値関係となる．同値類全体を **similar 類**と呼び $[\mathcal{P}(X)]$ と書く．また $[\mathcal{P}(X)]^\times:=[\mathcal{P}(X)]\setminus\{[\emptyset]\}$ とおく．前順序 $\leq_{\mathcal{E}}$ は商集合 $[\mathcal{P}(X)]$ 上に降り, 半順序になる．同様に $[\mathcal{P}(X)]^\times$ 上でも半順序である．
proper 性に関して定理 4.2 が成り立ったように, similar 性についても以下の定理が成り立つ．

定理 4.4 (N-Okuda)**.** G を局所コンパクトハウスドルフ群とし, $\mathcal{E}^{\mathrm{LR}}$ を G 上の LR 粗構造とす

る (例 3.3 を見よ). また, L, H を G の部分集合とする. このとき以下は同値である.

1. $L \sim_G H$ が成り立つ. すなわち L と H は similar である (定義 2.5 を見よ).
2. $L \sim_{\mathcal{E}^{\mathrm{LR}}} H$ が成り立つ. すなわち L と H は coarsely similar である.

これにより, proper 性や不連続双対に加え, similar であることも粗幾何学の観点から定式化された. これをもとに, 著者らは以下の粗幾何学版の不連続双対定理を示した.

定理 4.5 (N-Okuda, **粗不連続双対定理**の十分条件)**.** $(X, \mathcal{E})$ を可算基底をもつ粗連結な粗空間とし, A, A' を X の部分集合とする. このとき, 次の二条件は同値である.

1. $A \sim_{\mathcal{E}} A'$.
2. $\pitchfork_{\mathcal{E}} (A; X) = \pitchfork_{\mathcal{E}} (A'; X)$.

局所コンパクト群 G が σ-コンパクトであるとき, LR 粗構造は可算基底を持つのだった. この事実と定理 4.2,4.4 を用いると, 上記の定理の系として第 2 節の歴史的背景で述べた吉野氏の定理 (定理 2.8) が導かれる.

次に, proper 性や不連続双対, similar 性と粗同値の関係を考察する. このことに関して, 下記の定理が成り立つ.

定理 4.6 (N-Okuda)**.** $(X, \mathcal{E}), (Y, \mathcal{F})$ を粗連結な粗空間とし, $f : X \to Y$ を粗同値とする. また A, A' を X の部分集合とすると, 以下は同値である.

1. $A \sim_{\mathcal{E}} A'$ が成り立つ.
2. $f(A) \sim_{\mathcal{F}} f(A')$ が成り立つ.

さらに S, T を X の部分集合とすると, 以下は同値である.

1. $S \pitchfork_{\mathcal{E}} T$ が成り立つ.
2. $f(S) \pitchfork_{\mathcal{F}} f(T)$ が成り立つ.

系として, $A \sim_{\mathcal{E}} A'$ と $\pitchfork_{\mathcal{E}} (A; X) = \pitchfork_{\mathcal{E}} (A'; X)$ の同値性が成り立つ粗不連続双対定理は, 粗同値で保たれることがわかる.

5 Higson コンパクト化に関する基礎事項

粗不連続双対定理によって, proper 性を研究するにあたり $\sim_{\mathcal{E}}$ の同値類全体である similar 類 $[\mathcal{P}(X)]$ を調べることが重要であることがわかった. 本節からは $[\mathcal{P}(X)]$ から $\{[\emptyset]\}$ を除いた集合 $[\mathcal{P}(X)]^{\times} := [\mathcal{P}(X)] \setminus \{[\emptyset]\}$ が特定の設定化で Higson コロナの閉集合族に埋め込めることを紹介する. そのために本節では Higson コンパクト化に関する基礎事項を準備する.

以下, X をコンパクトでない局所コンパクトハウスドルフ空間, $\mathcal{E}$ を以下の 2 条件を満たす粗連結な粗構造とする.

1. ある $E \in \mathcal{E}$ が存在して, E は対角線集合 $\mathrm{diag}(X)$ の近傍となる.
2. 部分集合 $B \subset X$ に対して, B が $(X, \mathcal{E})$ 上で有界であることと B が X 上相対コンパクトであることは同値である.

特に, 局所コンパクトハウスドルフ群の LR 粗構造は上記の性質を満たす (例 3.3 を見よ).
この粗空間 $(X, \mathcal{E})$ 上に、Higson 関数を以下で定める.

定義 5.1 (Higson 関数)**.** 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ に対し，関数 $f \colon X \to \mathbb{R}$ が **Higson 関数**であるとは，任意の $E \in \mathcal{E}$ と $r > 0$ に対し，ある有界集合 $B \subset X$ が存在して，任意の $x \in X \setminus B$ について $f(E[x])$ の直径が r 以下となることである．また, 関数環 $C_h^b(\mathcal{E})$ を

$$C_h^b(\mathcal{E}) := \{\, f \colon X \to \mathbb{R} \mid f \text{ は有界連続かつ Higson 関数} \,\}$$

と定める.

上記の関数環を用いて, Higson コンパクト化を以下で定義する.

定義 5.2. $C_h(X)$ が $C_b(X)$ の部分バナッハ代数であり，X の位相を生成するものと仮定する. X のハウスドルフコンパクト化 hX が，$\{f|_X \mid f \in C^b(hX)\} = C_h^b(X)$ を満たすとき，hX を $(X, \mathcal{E})$ の **Higson コンパクト化**という．また, その境界 $\nu X := hX \setminus X$ を **Higson コロナ**という.

また, 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ は, 現在の設定下において Higson コンパクト化が存在することが知られている.

次に, 位相空間における正規性の粗幾何学版に相当する，粗正規性を紹介する．そのためにまず粗近傍という概念を準備する.

定義 5.3 (Dydak–Weighill [2])**.** 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ と 部分集合 $A \subset X$ に対し，$N \subset X$ が A の**粗近傍**であるとは, $A \subset N$ かつ任意の $E \in \mathcal{E}$ に対して，ある有界集合 $K \subset X$ が存在し $E[A] \subset N \cup K$ を満たすことをいう．さらに N が A の位相的近傍でもあるとき，N を A の**ハイブリッド近傍**という.

位相空間の正規性の言い換えとして, 任意の閉集合 A とその開近傍 N に対して, ある A の閉近傍 V が存在して, N が V の近傍になるという条件があった．これをもとに, 粗正規性は以下のように定義される.

定義 5.4 (Dydak–Weighill [2])**.** 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ が**粗正規**であるとは, 任意の集合 $A \subset X$ とその粗近傍 N に対し，ある A の粗近傍 V が存在して，N が V の粗近傍になることをいう．さらに, X が位相的にも正規空間であるとき, $(X, \mathcal{E})$ は**ハイブリッド正規**であるという.

ハイブリッド正規な空間の例として, 著者らは以下の定理を示した.

定理 5.5. [N.-Okuda] G を連結成分有限な局所コンパクトハウスドルフ群とし, $\mathcal{E}^{\mathrm{LR}}$ を LR 粗構造とする (例 3.3 を見よ)．このとき, $(G, \mathcal{E}^{\mathrm{LR}})$ はハイブリッド正規である.

また 2018 年に Dydak 氏と Weighill 氏は, 5 節の冒頭の設定を満たす粗空間に対して以下の重要な定理を示した.

定理 5.6 (Dydak–Weighill [2])**.** 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ について次の二条件は同値である.

- 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ は粗正規である.
- 任意の X の 2 つの部分集合 A, D に対し, $\mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} D \cap \nu X = \emptyset$ となることと A, D が漸近的に交わらないことは同値である.

注意 5.7. 上の定理は粗空間の枠組みで述べているが, Dydak–Weighill [2] は粗空間を一般化したラージスケール空間の設定で証明している (Corollary 5.4, Propositions 9.3, 9.4 を参照).

6 主定理

この節では前節に続いて, X をコンパクトでない局所コンパクトハウスドルフ空間, $\mathcal{E}$ を以下の 2 条件を満たす粗連結な粗構造とする.

1. ある $E \in \mathcal{E}$ が存在して, E は対角線集合 $\mathrm{diag}(X)$ の近傍となる.
2. 部分集合 $B \subset X$ に対して, B が $(X, \mathcal{E})$ 上で有界であることと B が X 上相対コンパクトであることは同値である.

前節では, この設定下において $(X, \mathcal{E})$ に対し Higson コンパクト化 hX が存在することを紹介した. Higson コロナ $\nu X := hX \setminus X$ の閉部分集合族を $\mathcal{F}(\nu X)$ と表すこととする. そして以下の対応を考える.

$$\Phi \colon [\mathcal{P}(X)]^{\times} \to \mathcal{F}(\nu X), \quad [A] \mapsto \mathrm{cl}_{hX} A \cap \nu X$$

ここで, $[\mathcal{P}(X)]^{\times}$ とは, $\mathcal{P}(X)$ 上に定まる同値関係 $\sim_{\mathcal{E}}$ で割った集合 $[\mathcal{P}(X)]$ から $[\emptyset]$ を除いた集合であった (coarsely similar$\sim_{\mathcal{E}}$ については定義 4.3 を見よ). 本節では, この対応の well-defined 性, 単射性, 全射性について考察する.

まず well-defind 性については以下の定理が成り立つ.

定理 6.1 (N-Okuda)**.** コンパクトでない局所コンパクトハウスドルフ空間 X がパラコンパクトであることを仮定する. このとき

$$\Phi \colon [\mathcal{P}(X)]^{\times} \to \mathcal{F}(\nu X), \quad [A] \mapsto \mathrm{cl}_{hX} A \cap \nu X$$

は well-defined であり, かつ順序を保つ. ここで, $[\mathcal{P}(X)]^{\times}$ には 定義 4.3 で与えた順序 $\leq_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{F}(\nu X)$ には包含順序 $\subset$ が備わっているものとする.

特に系として以下のことが成り立つ.

系 6.2. $(G, \mathcal{E}^{\mathrm{LR}})$ をコンパクトでない局所コンパクトハウスドルフ群とし, νG を Higson コロナ

とする．$\mathcal{F}(\nu G)$ を νG の閉集合族とする．このとき,

$$\Phi\colon [\mathcal{P}(G)]^{\times} \to \mathcal{F}(\nu G), \quad [A] \mapsto \mathrm{cl}_{hG}A \cap \nu G$$

は well-defined であり, 順序を保つ.

次に単射性については以下のことが成り立つ.

定理 6.3 (N-Okuda)**.** コンパクトでない局所コンパクトハウスドルフ空間 X がパラコンパクトであることを仮定する．また粗構造 $\mathcal{E}$ が可算基底をもち, $(X, \mathcal{E})$ は粗正規であるとする．このとき

$$\Phi\colon [\mathcal{P}(X)]^{\times} \to \mathcal{F}(\nu X), \quad [A] \mapsto \mathrm{cl}_{hX}A \cap \nu X$$

は単射である.

実はこの証明には第 4 節で扱った粗不連続双対定理を用いる．この証明の概要を記載しておく.

証明の概要. X のパラコンパクト性から定理 6.1 より Φ は well-defined である．A, A' を X の部分集合で A と A' が similar でないものとする．Φ の単射性を示すには, $\mathrm{cl}_{hX}A \cap \nu X \neq \mathrm{cl}_{hX}A' \cap \nu X$ を示せばよい．粗空間 $(X, \mathcal{E})$ は粗連結で，かつ $\mathcal{E}$ は可算基底をもつので, **粗不連続双対定理**が成り立ち (定理 4.5 を見よ), $\pitchfork(A, \mathcal{E}) \neq \pitchfork(A', \mathcal{E})$ が従う．一般性を失わず, $\pitchfork(A, \mathcal{E})$ の元 D で $\pitchfork(A', \mathcal{E})$ に属さないものが存在するとしてよい．またパラコンパクトハウスドルフ空間は位相的に正規であるから, 粗正規の仮定と Dydak-Weighill による定理 5.6 より，$\mathrm{cl}_{hX}A \cap \mathrm{cl}_{hX}D \cap \nu X = \emptyset$ である一方，$\mathrm{cl}_{hX}A' \cap \mathrm{cl}_{hX}D \cap \nu X \neq \emptyset$ が従う．これは, $\mathrm{cl}_{hX}A \cap \nu X \neq \mathrm{cl}_{hX}A' \cap \nu X$ を意味する．したがって Φ は単射である. □

定理 5.5 より連結成分が有限の局所コンパクトハウスドルフ群はハイブリッド正規であった．また, 連結成分有限の局所コンパクトハウスドルフ群は σ-コンパクトであり, LR 粗構造は可算基底を持つ．このことから以下の系が導かれる.

系 6.4. G を連結成分有限のコンパクトでない局所コンパクトハウスドルフ群とし，LR-粗構造 $\mathcal{E}^{\mathrm{LR}}$ を考える．Higson コロナ νG の閉部分集合全体を $\mathcal{F}(\nu G)$ と書く．このとき

$$\Phi\colon [\mathcal{P}(G)]^{\times} \to \mathcal{F}(\nu G), \quad [A] \mapsto \mathrm{cl}_{hG}A \cap \nu G$$

は単射である.

最後に Φ の全射性について考察する．全射性については以下の定理により多くの場合望めないことがわかる.

定理 6.5 (N.-Okuda)**.** コンパクトでない局所コンパクトハウスドルフ空間 X がパラコンパクトであると仮定する．粗空間 $(X, \mathcal{E})$ は粗正規であり，さらに可算部分集合 $N \subset X$ と制御集合 $E \in \mathcal{E}$ が存在して $E[N] = X$ を満たすとする．このとき

$$\Phi\colon [\mathcal{P}(X)]^{\times} \to \mathcal{F}(\nu X), \quad [A] \mapsto \mathrm{cl}_{hX}A \cap \nu X$$

は決して全射にはならない.

また証明の概要は以下ように濃度の議論を用いる.

証明の概要. 粗同値の定義より, 明らかに包含写像 $N \to X$ は粗同値となる (定義 3.7 を見よ). また, N の可算性から, $\mathcal{P}(N)$ の濃度は $2^{\aleph_0}$ で上からおさえられる. $[\mathcal{P}(N)]^{\times}$ は $\mathcal{P}(N)$ の商空間から $\{[\emptyset]\}$ を除いた集合であるから, その濃度は同様に $2^{\aleph_0}$ で上からおさえられる. 定理 4.6 より, similar 性は粗同値で保たれるので, ι から自然に誘導される $\iota_*\colon [\mathcal{P}(N)]^{\times} \to [\mathcal{P}(X)]^{\times}$ は 1:1 に対応する. よって, $[\mathcal{P}(X)]^{\times}$ の濃度は $2^{\aleph_0}$ 以下である. 一方, $(X,\mathcal{E})$ が粗正規であることを用いると, ある位相埋め込み $\iota\colon \beta\mathbb{N} \to hX$ が存在し, Higson コロナ νX の濃度は $2^{2^{\aleph_0}}$ 以上であることがわかる. ここで, $\mathbb{N}$ は自然数全体の集合とし, $\beta\mathbb{N}$ はそのストーンチェックコンパクト化とする. 上記の結果には $\beta\mathbb{N}$ の濃度が $2^{2^{\aleph_0}}$ であることを用いた. また, Higson コロナ νX はハウスドルフ空間であるから, 1 点集合は閉集合となる. よって, $\mathcal{F}(\nu X)$ もまた濃度が $2^{2^{\aleph_0}}$ 以上となる. これにより, 濃度比較から Φ は全射にならないことが示された. □

Higson コロナの濃度に関しては, 深谷友宏氏 ([3]) の議論を参考にした.

次に局所コンパクトハウスドルフ群の LR 粗構造に限って考察する. そのために以下の命題を用意する.

命題 6.6. G を連結成分有限の局所コンパクトハウスドルフ群とする. このとき, ある可算部分集合 $N \subset G$ とコンパクト部分集合 $S \subset G$ が存在して, $SNS^{-1} = G$ を満たす.

上記の命題と先ほどの定理 6.5 を用いると, 系として以下のことが示される.

系 6.7. G を局所コンパクトハウスドルフ群, $\mathcal{E}^{\mathrm{LR}}$ を G 上の LR-粗構造とする. G の連結成分が有限であると仮定する. このとき

$$\Phi\colon [\mathcal{P}(G)]^{\times} \to \mathcal{F}(\nu G), \quad [A] \mapsto \mathrm{cl}_{hG} A \cap \nu G$$

は決して全射になり得ない.

謝辞

本研究は、国際共同利用・共同研究拠点である京都大学数理解析研究所での RIMS 共同研究 (公開型) 「表現論, リー理論および関連分野」(2025 年 6 月 24-27 日) において発表したものです. 講演のご機会をいただきました世話人の佐々野詠淑先生には深く感謝申し上げます.

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2132 の支援を受けたものです。

参考文献

[1] Y. Benoist, Proper actions on reductive homogeneous spaces, *Ann. of Math.* **144** (1996), 315–347.

[2] J. Dydak and T. Weighill, Extension theorems for large scale spaces via coarse neighbourhoods, *Mediterr. J. Math.* **15** (2018), no. 2, Paper No. 59, 28 pp.

[3] T. Fukaya, Sublinear Higson corona of Euclidean cone, *Tsukuba J. Math.*,**36** (2012), 67–77.

[4] T. Kobayashi, Proper action on a homogeneous space of reductive type, *Math. Ann.* **285** (1989), 249–263.

[5] T. Kobayashi, Criterion of proper actions on homogeneous spaces of reductive groups, *J. Lie Theory* **6** (1996), 147–163.

[6] T. Kobayashi, Discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces, in *Mathematics Unlimited—2001 and Beyond* (eds. B. Engquist and W. Schmid), Springer-Verlag, 2001, 723–747; 邦訳 「非リーマン等質空間の不連続群論」 『数学の最前線 21 世紀への挑戦』 第 1 巻 (2002), 18–73.

[7] H. Nagaya, K. Ogawa and T. Okuda, A characterization of proper actions on homogeneous spaces with non-compact isotropy groups from a viewpoint of coarse geometry, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **101** (2025), no. 6, 31–36.

[8] T. Yoshino, Discontinuous duality theorem, *Internat. J. Math.* **18** (2007), no. 8, 887–893.