リーマン対称空間上の不変統計構造について *

広島大学大学院 先進理工系科学研究科 数学プログラム　小林彦蔵 †
Hikozo Kobayashi
Mathematics Program, Graduate School of Advanced Science and Engineering,
Hiroshima University

概要

統計構造は，情報幾何学に由来する多様体上の幾何構造であり，あるクラスの統計モデルのパラメータ空間上に定まる幾何構造を一般化した概念である．本稿では，平均 0 の多次元正規分布族 $\mathcal{N}_0 \cong GL(n,\mathbb{R})/O(n)$ 上の $GL(n,\mathbb{R})$-不変統計構造の分類を行う．特に，分類の際に表現論における Chevalley の制限定理を用いることで，見通しよく分類が行えることを紹介する．本稿は，2025 年度 RIMS 共同研究「表現論，リー理論および関連分野の進展」における発表に基づくものであり，その内容は奥田隆幸氏 (広島大学) との共同研究に基づく．

1　導入

微分幾何学において，等質空間 G/H 上の G-不変な幾何構造の分類および，特別な不変幾何構造の探索といった問題は基本的かつ重要である．

本稿では，統計構造と呼ばれる幾何構造に着目する．統計接続の定義は次で与えられる．

定義 1.1. g，∇ をそれぞれ多様体 M 上のリーマン計量およびアファイン接続とする．∇ のねじれがなく，かつ M 上の $(0,3)$-テンソル場 ∇g が全対称となるとき，組 (g,∇) を M 上の統計構造と呼ぶ．またこのとき ∇ をリーマン多様体 (M,g) 上の統計接続と呼ぶ．

統計構造の由来は，「情報幾何学」にある．情報幾何学では主に，あるクラスの統計モデル*1 $\mathcal{P}$ のパラメータ空間上に，リーマン計量とアファイン接続の組 (多くの場合統計構造) を考え，これらを用いて統計的推論や，統計モデルの微分幾何学そのものを研究する．この分野において，特に重要とされている統計構造のひとつが，「$\mathcal{P}$ の Fisher 計量 g^F」および実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ でパラメトライズされる「$\mathcal{P}$ の Amari–Chentsov α-接続 $\nabla^{A(\alpha)}$ (α-接続 $\nabla^{(\alpha)}$)」のペア $(g^F, \nabla^{A(\alpha)})$ である．その重要性については，本稿では紹介しないが，例えば [1, 2, 4] などの文献を参照されたい．

* 本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2132 の支援を受けたものである．
† E-mail : hikozo-kobayashi@hiroshima-u.ac.jp
*1 本稿では「統計モデル」の厳密な定義には立ち入らないが，$\mathbb{R}^n$ 上の確率密度関数の族であって，有限次元多様体 Θ により 1 対 1 にパラメトライズされ，かつ適切な (正則性) 条件を満たすものを指すことにする．より厳密な定式化については，例えば [3] を参照されたい．

近年，古畑–井ノ口–小林 [6] ($n = 1$) および小林–大野 [10] ($n \geq 2$) によって，n 次元正規分布族 $\mathcal{N}^n$ のパラメータ空間 $\Xi^n := \mathrm{Sym}^+(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ 上に定義される Amari–Chentsov α-接続 $\nabla^{A(\alpha)}$ が，ある微分幾何学的な条件によって特徴付けられた：

命題 1.2. $\mathcal{N}^n$ を n 次元正規分布族とする．$\mathcal{N}^n$ のパラメータ空間 $\Xi^n := \mathrm{Sym}^+(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ には，アファイン群 $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{R}) := GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ が次式によって推移的に作用する．

$$(A, b) \cdot (\Sigma, \mu) = (A\Sigma A^T, A\mu + b) \quad ((A, b) \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{R}),\ (\Sigma, \mu) \in \Xi^n). \tag{1.1}$$

特にこの群作用は $\mathcal{N}^n$ の Fisher 計量 g^F に関して等長的である．(g^F, ∇) を Ξ^n 上の統計構造とする．このとき以下の二条件は互いに同値である (cf. [6, 10])．

(i) ∇ は $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$-不変である．さらに統計構造 (g^F, ∇) は共役対称性を満たす．

(ii) ある実数 α が存在して，$\nabla = \nabla^{A(\alpha)}$ が成り立つ．ただし，$\nabla^{A(\alpha)}$ は $\mathcal{N}^n$ の Amari–Chentsov α-接続である．

ただし，共役対称は次で定義される．

定義 1.3 ([11])**.** (g, ∇) を M 上の統計構造とする．(g, ∇) が共役対称であるとは，次式を満たすときを言う．

$$R = R^*.$$

ただし，R は ∇ の曲率テンソル場であり，R^* は次式によって定義されるアファイン接続 ∇^* の曲率テンソル場である．

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z) \quad (X, Y, Z \in \Gamma(TM)).$$

注意 1.4. 先行研究 [6] および [10] では，アファイン群 $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$ の閉部分群であって，パラメータ空間 Ξ^n に単純推移的に作用する群 $\mathrm{Aff}^s(n, \mathbb{R})$ に着目し，$\mathrm{Aff}^s(n, \mathbb{R})$-不変性と共役対称性によって $\nabla^{A(\alpha)}$ が特徴付けできることを示している．

本稿では，本講究録独自の用語として，有限次元リー群 G が等質に作用するパラメータ空間を持つ (適切なクラスの) 統計モデルを G-等質統計モデル，あるいは単に等質統計モデルと呼ぶことにする．命題 1.2 と同様の Amari–Chentsov α-接続の特徴付けが，別のある等質統計モデルに対しても成り立つことが，我々の先行研究によりわかっている (see [8, Theorem 6.3.1])．

素朴な疑問として，他の等質統計モデルにおいても同様な特徴付けが得られるかどうかが気になる．すなわち，(あるクラスの) G-等質統計モデル $\mathcal{P}$ において，$\mathcal{P}$ の Amari–Chentsov α-接続 $\nabla^{A(\alpha)}$ が，(Θ, g^F) 上の統計接続全体の集合の中で，G-不変性と，Fisher 計量との共役対称条件によって特徴付けできるか？という疑問である．[*2]

本稿ではこのような疑問を，平均 0 の n 次元正規分布族 $\mathcal{N}_0^n$ (パラメータ空間は $\mathrm{Sym}^+(n, \mathbb{R}) \cong GL(n, \mathbb{R})/O(n)$) の場合に検討した結果について報告する．すなわち，本稿で考える問題は次である．

[*2] 問題自体は，作用が推移的でなくても考えることができる．

問題 1.5. g^F を $\mathcal{N}_0^n$ の Fisher 計量とし，(g^F, ∇) を $\mathcal{N}_0^n$ のパラメータ空間 $\Xi_0^n := \mathrm{Sym}^+(n, \mathbb{R})$ 上の統計構造とする (特に g^F は $GL(n, \mathbb{R})$-不変である)．このとき以下の二条件は互いに同値か？

(i) ∇ は Ξ_0^n 上 $GL(n, \mathbb{R})$-不変である．さらに統計構造 (g^F, ∇) は共役対称性を満たす．

(ii) ある実数 α が存在して，$\nabla = \nabla^{A(\alpha)}$ が成り立つ．ただし，$\nabla^{A(\alpha)}$ は $\mathcal{N}_0^n$ の Amari–Chentsov α-接続である．

本稿では，$\mathcal{A}(M)$ によって，多様体 M 上のアファイン接続全体の集合を表す．また，リー群 G が等長作用しているリーマン多様体 (M, g) に対し，$\mathcal{A}_{\mathrm{CS}}^G(M, g)$ によって，M 上の G-不変アファイン接続であって，g との組で共役対称統計構造となるもの全体の集合を表す．すなわち，

$$\mathcal{A}_{\mathrm{CS}}^G(M, g) := \{\nabla \in \mathcal{A}(M) \mid \ \nabla \text{ は } M \text{ 上 } G\text{-不変，} (g, \nabla) \text{ は共役対称統計構造 } \}$$

とする．上記の問題 1.5 は次のように書き換えられる．

問題 1.6. 次の等号は成立するか？

$$\mathcal{A}_{\mathrm{CS}}^{GL(n,\mathbb{R})}(\Xi_0^n, g^F) \overset{?}{=} \{\nabla^{A(\alpha)} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}. \tag{1.2}$$

本稿では，上記の問題 1.6 に関連して，次の定理を紹介する．

定理 1.7 ([9])**.** $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする．集合 $\mathcal{A}_{\mathrm{CS}}^{GL(n,\mathbb{R})}(\Xi_0^n, g^F)$ と実係数の n 変数 3 次斉次対称多項式の成す実線型空間 $\mathcal{SP}_n^3$ の間に次を満たす全単射 Φ が存在する：

$$\Phi(\nabla^{A(\alpha)}) = \alpha(x_1^3 + \cdots + x_n^3).$$

また，一般にあるクラスのリーマン対称空間 G/K 上の G-不変共役対称統計接続全体の集合が，ある対称性を持つ実係数の 3 次斉次多項式の集合と同一視できるということも紹介したい (see Section 3.1).

対称多項式の理論より，定理 1.7 に登場する $\mathcal{SP}_n^3$ は，次の三つの 3 次斉次多項式

$$f_1 := \sum_{i=1}^n x_i^3, \qquad f_2 := \sum_{i,j=1}^n x_i^2 x_j, \qquad f_3 := \sum_{i,j,k=1}^n x_i x_j x_k \tag{1.3}$$

によって張られることが分かる．従って，次の系 (問題 1.6 に対する回答) が得られる．

系 1.8. 式 (1.2) の等号は $n = 1$ の場合のみ成立する．

さらに，本稿ではリーマン多様体 (Ξ_0^n, g^F) 上の $GL(n, \mathbb{R})$-不変双対平坦接続 (g^F との組で $GL(n, \mathbb{R})$-不変ヘッセ構造となる Ξ_0^n 上のアファイン接続) の分類についても紹介する (see Section 3.2).

本稿は，2025 年 6 月に開催された RIMS 共同研究「表現論，リー理論および関連分野の進展」における著者の講演内容に基づいて作成した講究録である．このような貴重な発表の機会を賜りました龍谷大学の佐々野詠淑先生に，心より深謝申し上げます．

2　等質空間上の不変統計構造

本節では，主として統計接続の集合の構造と等質統計多様体の定義および具体例について紹介する．

本節を通して (M, g) をリーマン多様体，G をリー群とする．

2.1　統計接続

$\mathcal{A}(M)$ によって，M 上のアファイン接続全体の集合を表す．また，$\mathcal{A}_{\mathrm{Stat}}(M, g)$ によって M 上の統計接続全体の集合を表す．すなわち，

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Stat}}(M, g) := \{\nabla \in \mathcal{A}(M) \mid \nabla \text{ はねじれなし，} \nabla g \text{ は全対称 } \}.$$

また，$S^3(T^*M)$ を M 上の $(0,3)$-対称テンソル場の成す線型空間とする．リーマン計量の非退化性から次が成り立つ．

命題 2.1. 次の写像は全単射である．

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Stat}}(M, g) \ni \nabla \longmapsto \nabla g \in S^3(T^*M). \tag{2.1}$$

M 上の $(0,3)$-対称テンソル場 C に対して，$C(X, Y, Z) = -2(\nabla_X Y - \nabla^g_X Y, Z)$ を満たすようにアファイン接続 ∇ を定めると，この対応が (2.1) の逆写像を与える．ただし，∇^g は g の Levi-Civita 接続である．本稿では，リーマン計量 g と $(0,3)$-対称テンソル場 C の組 (g, C) もまた M 上の統計構造と呼ぶことにする．また，(g, C) が M 上の統計構造のとき，1 対 1 対応 (2.1) によって得られる (M, g) 上の統計接続を $\nabla^{(g,C)}$ と書く．

定義 2.2. (g, ∇) を多様体 M 上の統計構造とする．∇ が平坦のとき，(g, ∇) を双対平坦構造と呼ぶ．

双対平坦構造は，ヘッセ構造と等価である (see [13])．

注意 2.3. 双対平坦構造は共役対称である．

定義 2.4. リー群 G がリーマン多様体 (M, g) に等長作用しているとする．$\mathcal{A}^G_{\mathrm{DF}}(M, g)$ によって，M 上の G-不変アファイン接続であって，g との組で双対平坦構造となるもの全体の集合を表す．すなわち，

$$\mathcal{A}^G_{\mathrm{DF}}(M, g) := \{\nabla \in \mathcal{A}(M) \mid \nabla \text{ は } M \text{ 上 } G\text{-不変，} (g, \nabla) \text{ は統計構造，} \nabla \text{ は平坦 } \}$$

とする．

2.2　等質統計多様体

定義 2.5. (g, C) を M 上の統計構造とする．また，リー群 G が M になめらかに作用しているとする．統計構造 (g, C) が G-不変であるとは，g，C 共に M 上 G-不変であるときをいう．

G-等質空間 M と M 上の G-不変統計構造 (g, C) に対して，組 (M, g, C) を $(G$-$)$ 等質統計多様体と呼ぶ ([6, 7])．等質統計多様体の代表例は，多次元正規分布族の統計多様体である：

例 2.6. $\mathcal{N}^n$ を n 次元正規分布族とする．すなわち，$\mathcal{N}^n$ は次式で表される $\mathbb{R}^n$ 上の確率密度関数の族である：

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^n := \left\{ p(x;\mu,\Sigma) := \tfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right) \;\middle|\; \mu \in \mathbb{R}^n,\ \Sigma \in \mathrm{Sym}^+(n,\mathbb{R}) \right\}.$$

ただし，$\mathrm{Sym}^+(n,\mathbb{R})$ は n 次正定値対称行列全体の空間である．パラメータ空間 $\Xi^n := \mathrm{Sym}^+(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ 上には，次式によってリーマン計量 g^F と $(0,3)$-対称テンソル場 $C^{A(\alpha)}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ が定まる．

$$\begin{aligned} g^F_{\hat{\xi}}(X,Y) &:= \int_{x\in\mathbb{R}^n} (X \log p(x;\xi))(Y \log p(x;\xi)) p(x;\hat{\xi}) dx, \\ C^{A(\alpha)}_{\hat{\xi}}(X,Y,Z) &:= \alpha \int_{x\in\mathbb{R}^n} (X \log p(x;\xi))(Y \log p(x;\xi))(Z \log p(x;\xi)) p(x;\hat{\xi}) dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

g^F および $C^{A(\alpha)}$ は，それぞれ $\mathcal{N}^n$ の Fisher 計量，$\mathcal{N}^n$ の Amari–Chentsov α-テンソル場と呼ばれる．また，命題 2.1 の 1 対 1 対応によって誘導される $\mathcal{A}_{\mathrm{Stat}}(\Xi^n, g^F)$ の元を $\mathcal{N}^n$ の Amari–Chentsov α-接続といい，$\nabla^{A(\alpha)}$ と表す．パラメータ空間 Ξ^n は式 (1.1) の群作用によって $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{R})$-等質空間である．また，三つ組 $(\Xi^n, g^F, C^{A(\alpha)})$ は $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{R})$-等質統計多様体である．

本稿で着目する平均 0 の多次元正規分布族もまた，等質統計多様体の例である．

例 2.7. $\mathcal{N}^n_0 := \{p(x;0,\Sigma) \mid \Sigma \in \mathrm{Sym}^+(n,\mathbb{R})\}$ とする．パラメータ空間 $\Xi^n_0 := \mathrm{Sym}^+(n,\mathbb{R})$ 上には，例 2.6 と同様の式によって，$\mathcal{N}^n_0$ の Fisher 計量および Amari–Chentsov α-テンソル場が定義できる．$GL(n,\mathbb{R})$ の Ξ^n_0 への作用を以下で定めると，三つ組 $(\Xi^n_0, g^F, C^{A(\alpha)})$ は $GL(n,\mathbb{R})$-等質統計多様体となる．

$$A \cdot \Sigma = A \Sigma A^T \qquad (A \in GL(n,\mathbb{R}),\ \Sigma \in \Xi^n_0).$$

注意 2.8. g^F および $C^{A(\alpha)}$ をそれぞれ，$\mathcal{N}^n_0$ の Fisher 計量，$\mathcal{N}^n_0$ の Amari–Chentsovα-テンソル場とする．線型同型

$$\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}) \ni X \longmapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (I_n + tX) \in T_{I_n}\Xi^n_0 \tag{2.2}$$

を通して，$g^F_{I_n}$ および $C^{A(\alpha)}_{I_n}$ を $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ 上のテンソルとみなしたとき，以下のように表せる (see [12, 14])．

$$g^F_{I_n}(X,Y) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY), \qquad C^{A(\alpha)}_{I_n}(X,Y,Z) = \alpha \cdot \mathrm{tr}(XYZ). \tag{2.3}$$

パラメータ空間 Ξ^n_0 は $\mathcal{N}^n_0$ と自然に同一視できる．本稿では断りのない限り，この同一視を用いることにする．例 2.7 より，$\mathcal{N}^n_0$ はリーマン対称空間

$$GL(n,\mathbb{R})/O(n)$$

としての構造をもつ．一般に，リーマン対称空間 G/K 上の G-不変統計構造は，常に共役対称となる．

補題 2.9 ([9]). G をリー群，K を G のコンパクト部分群とする．また，リー代数の対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ が対称対であるとする．このとき，$N := G/K$ 上の任意の G-不変統計構造は共役対称である．

注意 2.10. 一般に，等質空間 G/H 上の G-不変統計構造は共役対称であるとは限らないことに注意したい．例えば，3 次元ハイゼンベルグ群上の左不変統計構造は，自明なもの (すなわち左不変リーマン計量とその Levi-Civita 接続の組) を除いて，いずれも共役対称ではない (see [7] and also [8]).

3 主定理

本節では，$\mathcal{N}_0^n$ 上の $GL(n,\mathbb{R})$-不変統計構造の分類と，リーマン多様体 $(\mathcal{N}_0^n, g^F)$ 上の $GL(n,\mathbb{R})$-不変双対平坦接続の分類について紹介する．

3.1 $GL(n,\mathbb{R})$-不変統計構造の分類

本小節では，次の定理について紹介する．定理 1.7 はこの定理から直ちに従う．

定理 3.1. g を $\Xi_0^n = \mathrm{Sym}^+(n,\mathbb{R})$ 上の $GL(n,\mathbb{R})$-不変リーマン計量とする．また，$\mathcal{SP}_n^3$ を実係数の n 変数 3 次斉次対称多項式の成す線型空間とする．このとき次式を満たす全単射写像 $\Phi : \mathcal{A}_{\mathrm{CS}}^{GL(n,\mathbb{R})}(\Xi_0^n, g) \to \mathcal{SP}_n^3$ が存在する．

$$\Phi(\nabla^{A(\alpha)}) = \alpha(x_1^3 + \cdots + x_n^3).$$

上記の定理は，今まで登場してきたいくつかの補題，等質空間上の同変ベクトル束の不変断面に関する一般論，および線型同型 $S^3(\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})^*)^{O(n)} \cong S^3((\mathbb{R}^n)^*)^{\mathfrak{S}_n}$ (Chevally の制限定理からの帰結) を組み合わせることによって証明できる．

Proof. $G = GL(n,\mathbb{R})$，$K := O(n)$ とおく．補題 2.9 より，次の等式が成り立つ．

$$\mathcal{A}_{\mathrm{CS}}^G(\Xi_0^n, g) = \mathcal{A}_{\mathrm{Stat}}^G(\Xi_0^n, g).$$

ただし右辺はリーマン多様体 (Ξ_0^n, g) 上の G-不変統計接続全体の集合である．補題 2.1 より，次の写像は全単射である．

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Stat}}^G(\Xi_0^n, g) \ni \nabla \longmapsto \nabla g \in S^3(T^*\Xi_0^n)^G.$$

ただし，$S^3(T^*\Xi_0^n)^G$ は Ξ_0^n 上の G-不変 $(0,3)$-対称テンソル場全体の空間である．Ξ_0^n は G-等質空間より，写像 $S^3(T^*\Xi_0^n)^G \ni C \longmapsto C_{I_n} \in S^3(T_{I_n}^*\Xi_0^n)^K$ は線型同型である．また，K-同変な線型同型 (2.2) より，$S^3(T_{I_n}^*\Xi_0^n)^K \cong S^3(\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})^*)^K$ を得る．ただし，$\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ 上の K-表現は $k \cdot X := kXk^T$ で与えられる．$D \subset \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ を対角行列のなす n 次元部分空間とし，包含写像を $\iota : D \hookrightarrow \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ と書くと，制限写像 $S^3(\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})^*) \ni C \longmapsto \iota^*C \in S^3(D^*)$ は次の線型同型

$$S^3(\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})^*)^K \cong S^3(D^*)^{\mathfrak{S}_n}$$

を誘導する (see, for example, [16, Section 2.1.5])．$C \in S^3(D^*)^{\mathfrak{S}_n}$ に対して D 上の多項式関数 $q_C(X) := C(X,X,X)$ を対応させることで，$S^3(D^*)^{\mathfrak{S}_n}$ と D 上の n 変数 3 次斉次対称多項式関数の

空間 $\mathcal{P}^3(D)^{\mathfrak{S}_n}$ は線型同型である．さらに同一視 $\mathcal{P}^3(D)^{\mathfrak{S}_n} \cong \mathcal{SP}_n^3$ を行えば，式 (2.3) より $\iota^* C^{A(\alpha)}$ は多項式 $\sum_{i=1}^n x_i^3$ と一致することがわかる．以上より証明が完了する． □

観察 3.2. 同様な議論を行うことで，同型 $S^3(\mathfrak{p}^*)^K \to S^3(\mathfrak{a}^*)^W$ が成り立つ他のリーマン対称空間 G/K についても，上記のような G-不変共役対称統計接続の 3 次斉次多項式による特徴付けが得られることがわかる．ただし，$\mathfrak{p}$ は Cartan 対合の -1 固有空間，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間，W は $\mathfrak{a}$ に関するワイル群である．

式 (1.3) の各多項式に対応する Ξ_0^n 上の $GL(n,\mathbb{R})$-不変 $(0,3)$-対称テンソル場は，それぞれ次のようにかける．

命題 3.3. Ξ_0^n 上の $GL(n,\mathbb{R})$-不変 $(0,3)$-対称テンソル場 C_1, C_2, C_3 を，それぞれ

$$\Phi(C_i) = f_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

を満たすものとする．このとき，次が成り立つ．

$$C_1|_{I_n}(X,Y,Z) := \mathrm{tr}(XYZ), \tag{3.1}$$
$$C_2|_{I_n}(X,Y,Z) := \tfrac{1}{3}\big(\mathrm{tr}(XY)\mathrm{tr}(Z) + \mathrm{tr}(YZ)\mathrm{tr}(X) + \mathrm{tr}(ZX)\mathrm{tr}(Y)\big), \tag{3.2}$$
$$C_3|_{I_n}(X,Y,Z) := \mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(Y)\,\mathrm{tr}(Z). \tag{3.3}$$

ここで，同型写像 (2.2) により $T_{I_n}\Xi_0^n \cong \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ と同一視している．

注意 3.4. 共役対称な $GL(n,\mathbb{R})$-等質統計多様体 $(\mathcal{N}_0^n, g^F, C_2)$ は，割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体 ([15]) となっている．この統計多様体のクラスは，統計接続の測地的完備性や測地的連結性の文脈で重要なクラスであり，最近研究が行われている (see [15])．

3.2 $(\mathcal{N}_0^n, g^F)$ 上の $GL(n,\mathbb{R})$-不変双対平坦接続の分類

定理 3.5. g^F を $\mathcal{N}_0^n$ の Fisher 計量とする．次の等式が成り立つ．

$$\mathcal{A}_{\mathrm{DF}}^{GL(n,\mathbb{R})}(\Xi_0^n, g^F) = \begin{cases} \{\nabla^{A(+1)},\ \nabla^{A(-1)},\ \nabla^{(g^F, C')},\ \nabla^{(g^F, -C')}\} & (n \geq 3), \\ \{\nabla^{A(+1)},\ \nabla^{A(-1)}\} & (n = 2), \\ \{\nabla^{A(\alpha)} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} & (n = 1). \end{cases}$$

ただし，C' は以下で定義される Ξ_0^n 上の $GL(n,\mathbb{R})$-不変 $(0,3)$-対称テンソル場である．

$$C' = C_1 - \frac{6}{n}C_2 + \frac{4}{n^2}C_3.$$

命題 3.6. Ξ_0^n 上の自己微分同相写像 σ_1, σ_2 を以下で定義する．

$$\sigma_1(\Sigma) = \Sigma^{-1}, \qquad \sigma_2(\Sigma) = \det(\Sigma)^{-\frac{2}{n}}\Sigma.$$

σ_1 および σ_2 は共に $\mathcal{N}_0^n$ の Fisher 計量 g^F に関して等長的である (see [5])．このとき，以下が成り

立つ.

$$\sigma_1^* \nabla^{A(+1)} = \nabla^{A(-1)}, \qquad \sigma_1^* \nabla^{(g^F, C')} = \nabla^{(g^F, -C')},$$
$$\sigma_2^* \nabla^{A(+1)} = \nabla^{(g^F, C')}.$$

参考文献

[1] S. Amari and H. Nagaoka. *Methods of Information Geometry*, vol. 191. Amer. Math. Soc., 2000.

[2] N. Ay, J. Jost, H. V. Lê, and L. Schwachhöfer. *Information Geometry*, vol. 64 of *Ergeb. Math. Grenzgeb. (3)*. Springer, Cham, 2017.

[3] O. Calin and C. Udrişte. *Geometric Modeling in Probability and Statistics*. Springer, Cham, 2014.

[4] N. N. Čencov. *Statistical Decision Rules and Optimal Inference*, vol. 53 of *Transl. Math. Monogr.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982.

[5] A. Dolcetti and D. Pertici. Differential properties of spaces of symmetric real matrices. *Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino*, 77(1):25–43, 2019.

[6] H. Furuhata, J. Inoguchi, and S.-P. Kobayashi. A characterization of the alpha-connections on the statistical manifold of normal distributions. *Inf. Geom.*, 4(1):177–188, 2021.

[7] J. Inoguchi and Y. Ohno. Homogeneous statistical manifolds. *Inf. Geom.*, 8(2):285–341, 2025.

[8] H. Kobayashi, Y. Ohno, T. Okuda, and H. Tamaru. The moduli spaces of left-invariant statistical structures on Lie groups. arXiv:2510.04442, 2025.

[9] H. Kobayashi and T. Okuda. On Invariant Conjugate Symmetric Statistical Structures on the Space of Zero-Mean Multivariate Normal Distributions. In *Geometric Science of Information, Part I*, vol. 16033 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pp. 65–72. Springer, Cham, 2026.

[10] S.-P. Kobayashi and Y. Ohno. A characterization of the alpha-connections on the statistical manifold of multivariate normal distributions. *Osaka J. Math.*, 62(2):329–349, 2025.

[11] S. L. Lauritzen. Statistical manifolds. In *Differential Geom. Stat. Inference*, vol. 10, pp. 163–216, 1987.

[12] A. F. S. Mitchell. The information matrix, skewness tensor and α-connections for the general multivariate elliptic distribution. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 41(2):289–304, 1989.

[13] H. Shima. *The Geometry of Hessian Structures*. World Sci., Singapore, 2007.

[14] L. T. Skovgaard. A Riemannian geometry of the multivariate normal model. *Scand. J. Statist.*, 11(4):211–223, 1984.

[15] R. Ueno. Geodesic connectedness on statistical manifolds with cubic forms divisible by the metric. *Inf. Geom.*, 2025.

[16] G. Warner. *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups. I*, vol. 188 of *Grundlehren Math. Wiss.* Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1972.