アファイン変換群における連結固有対の分類問題

東京大学大学院数理科学研究科 宮内俊輔 *

Shunsuke Miyauchi†

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

1 序

リー群 G に対してその閉部分群の対 (L, H) を考える．変換群論の観点から，与えられた閉部分群の対 (L, H) の固有性を判定する効果的な方法を見つけることは重要な問題である (固有性判定問題の創始者の視点からの解説 [7] を参照されたい)．ここで，対 (L, H) が固有であるとは，群作用 $L \curvearrowright G/H$ が固有であること，または同値なことであるが，群作用 $H \curvearrowright G/L$ が固有であることをいう．部分群 L, H の少なくとも一方がコンパクトな場合は必ずその対は固有となるが，一般に L, H がいずれも非コンパクトな場合，対の固有性を判定することは難しい．

最初の判定法は小林 [4] によるもので，G, L, H がすべて簡約の場合に固有性判定法が証明された．その後，Benoist [2], 小林 [6] によって G が簡約で L, H が必ずしも簡約部分群とは限らない場合についても固有性判定法が一般化された (事実 5.1)．

また，Lipsman [9] は簡約群における固有性判定法 [4, 5] のアナロジーが冪零群においても成り立つかという問題を考え，「G が冪零で L, H が G の連結部分群であるとき，(CI) 条件と (L, H) が固有であることは同値である」ということを予想した．(CI) 条件 (定義 3.1) は一般に固有性より弱く，比較的確かめやすい条件である．この予想は n-step($n \leq 3$) 冪零リー群では Nasrin [10], Baklouti-Khlif [1], 吉野 [12] によって肯定的に解決されたが，$n > 3$ では吉野 [11] によって反例が与えられている．

一方で，G が簡約でも冪零でもないリー群に対しては，検証可能な判定法は見つ

---

* 本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2108 の支援を受けたものです．

† Email: miyashun@ms.u-tokyo.ac.jp

かっていない．本稿では，この点に関して以下の問を考えた (6 章).

問 1.1. 2 次アファイン変換群 $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ の連結部分群の対 (L, H) で固有なものを分類せよ.

ここで, n 次アファイン群 $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ とは以下のように定義される群である.

$$GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n \coloneqq \{(g, v) \colon g \in GL_n(\mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n\},$$
$$(g, v)(h, w) \coloneqq (gh, v + gw).$$

n 次アファイン群 $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ は簡約でも冪零でもないことに注意する．元 $(g, v) \in GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ について，g を線形部分，v を平行移動部分と呼ぶ．また，それぞれへの射影を $\mathscr{L} \colon GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n \to GL_n(\mathbb{R}), \mathscr{U} \colon GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と書く.

2 固有関係 $\pitchfork$ と同値関係 $\sim$

この章では，小林 [6] によって導入された記号 $\pitchfork, \sim$ について復習する.

定義 2.1. (小林 [6]) G を局所コンパクト群，L, L', H を G の部分集合とする.

(1) 任意のコンパクト部分集合 $S \subset G$ について共通部分 $L \cap SHS^{-1}$ が相対コンパクトとなるとき，$L \pitchfork H$ と書く.
(2) あるコンパクト部分集合 $S \subset G$ が存在して $L \subset SL'S^{-1}, L' \subset SLS^{-1}$ となるとき，$L \sim L'$ と書く.

群作用の固有性と記号 $\pitchfork, \sim$ について以下の命題が成り立つ.

命題 2.2. (小林 [6]) G を局所コンパクト群，L, L', H は G の部分集合とする.

(1) $L \sim L', L \pitchfork H$ ならば，$L' \pitchfork H$ が成り立つ.
(2) 特に L, H がともに G の閉部分群であるとき，以下の同値が成り立つ.

$$L \pitchfork H \iff \text{群作用 } L \curvearrowright G/H \text{ が固有} \iff \text{群作用 } H \curvearrowright G/L \text{ が固有}$$

命題 2.2 (2) より，固有な群作用を分類することは，二項関係 $\pitchfork$ を満たす部分群の対を分類することと同値である．また，命題 2.2 (1) から，固有性を考える上では $\sim$ の違いを無視してよく，思考の節約になる.

3 (CI) 条件と固有性

本章では (CI) 条件について述べる．(CI) 条件は, 我々の主結果である $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ の連結固有対の分類について述べるうえでも用いられている．

定義 3.1. (小林 [5]) リー群 G の閉部分群の対 (L, H) が (CI) であるとは，任意の $g \in G$ について部分群 $L \cap gHg^{-1}$ がコンパクトであることをいう．

また，閉部分群の対が固有ならば (CI) でもあることが，定義 3.1 から直ちに従う．

4 $G = SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ の場合の連結固有対の分類問題

$G = SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ の場合は連結部分群の $\sim$ の意味での同値類の個数は有限個であり，分類結果は比較的単純なものとなる．$GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ の場合は同値類の個数が連続濃度で現れる．

命題 4.1. (1) $G = SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ の非自明な連結部分群は同値関係 $\sim$ の差を除いて以下の 6 つに分類され，また，以下の部分群は記号 $\sim$ の意味で互いに同値でない．

$$\mathbb{R}^2, SL_2(\mathbb{R}), S, L, M, N.$$

ここで，S, L, N, M は以下で定義される連結部分群である．

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} e^a & 0 & e \\ 0 & e^{-a} & 0 \end{pmatrix} : a, e \in \mathbb{R} \right\}, L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & e \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : b, e \in \mathbb{R} \right\},$$
$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & \frac{1}{2}b^2 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} \subset M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & e \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} : b, e \in \mathbb{R} \right\}.$$

(2) 連結部分群 $\mathbb{R}^2, SL_2(\mathbb{R}), S, L, M, N$ の任意の対の固有性は以下の表 1 の通り．ここで，表 1 では対が固有であるとき対応する成分に $\pitchfork$ を記している．

5 $G = GL_2(\mathbb{R})$ の場合の連結固有対の分類問題

まず，$G = GL_2(\mathbb{R})$ の場合における，小林-Benoist の固有性判定法について復習する．一般の簡約リー群における固有性判定法の主張は，例えば小林による概説 [7, 8] を参照されたい．

表 1: $SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ における連結部分群の対の固有性

	$SL_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^2$	S	L	M	N
$SL_2(\mathbb{R})$		$\pitchfork$			$\pitchfork$	$\pitchfork$
$\mathbb{R}^2$	$\pitchfork$					$\pitchfork$
S						$\pitchfork$
L						
M	$\pitchfork$					
N	$\pitchfork$	$\pitchfork$	$\pitchfork$			

事実 5.1. (小林-Benoist の固有性判定法 [6, 2]) L, L', H を G の部分集合とする.

(1) $L \pitchfork H \iff$ 任意の $r > 0$ について $\mu(L) \cap \bar{B}(\mu(H), r)$ が $\mathfrak{a}_+$ の有界集合になる.

(2) $L \sim L' \iff$ ある $R > 0$ について $\mu(L) \subset \bar{B}(\mu(L'), R), \mu(L') \subset \bar{B}(\mu(L), R)$ が成り立つ.

ここで, $\mathfrak{a}_+ \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq y\}$ であり, $\mathfrak{a}_+$ にはユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ から誘導される距離が入る. また, $\mu\colon GL_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{a}_+, g \mapsto (\frac{1}{2}\log\sigma_1(g), \frac{1}{2}\log\sigma_2(g))$ であり, $\sigma_i(g)$ は正定値対称行列 ${}^t gg$ の固有値である.

この事実を用いると $GL_2(\mathbb{R})$ における連結固有対を容易に分類することができる.

命題 5.2. (1) $GL_2(\mathbb{R})$ の非自明な連結部分群は, 同値関係 $\sim$ の違いを除いて以下の形に限られる. ただし, α を実定数, s, t を実数を走る変数とする.

$$Z \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \right\}, U \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix} \right\},$$

$$A(\alpha) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{(\alpha+1)t} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha-1)t} \end{pmatrix} \right\} \subset B(\alpha) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{(\alpha+1)t} & 0 \\ s & e^{(\alpha-1)t} \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) $GL_2(\mathbb{R})$ における連結部分群の対の固有性は以下の表 2 の通り. 実定数 α, β の条件が付された成分は, 対応する対が固有となるための必要十分条件を与える.

表 2: $GL_2(\mathbb{R})$ における連結部分群の対の固有性

	Z	$A(\beta)$	U	$B(\beta)$
Z		$\pitchfork$	$\pitchfork$	$\pitchfork$
$A(\alpha)$	$\pitchfork$	$\lvert\alpha\rvert \neq \lvert\beta\rvert$	$\pitchfork$	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$
U	$\pitchfork$	$\pitchfork$		$\pitchfork$
$B(\alpha)$	$\pitchfork$	$\lvert\alpha\rvert < \lvert\beta\rvert$	$\pitchfork$	

6 $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ の場合の連結固有対の分類

G が簡約であるときを超えたテストケースとして，$G = GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ を考える．小林 [5] は $H = GL_2(\mathbb{R})$ のときに $L \pitchfork H$ in G なる連結部分群 L の分類を行った．我々は小林の設定を拡張し，G における固有な連結部分群の対 (L, H) を分類した．以下の表 3 は，線形部分 $\mathscr{L}(L), \mathscr{L}(H)$ についての場合分けに基づいて，固有性の判定方法を示したものである．

ここで $Z, U, A(\alpha), B(\alpha)$($\alpha$ は実数) は 5 章で定義した $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群で，その次元はそれぞれ $1,1,1,2$ である．D, B' は以下で定義される $GL_2(\mathbb{R})$ の連結部分群である．

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^s \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}, B' := \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ s & e^t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

また，部分群 N は 4 章で定義した $SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ の 1 次元の部分群であり，$L(D, 1)$ は以下で定義される部分群である．$\mathscr{L}(L(D, 1)) = D$ であることに注意する．

$$L(D, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{t+s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t-s} & u \end{pmatrix} : s, t, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

表 3 中の条件 ◎, (**A**), (**B**) について説明する．条件 **(C)** については後の章で述べる．条件 **(A),(B)** はいずれも連結部分群の分類を用いて，それぞれの場合について二項関係 $\pitchfork$ の定義を直接確かめることによって証明される．

◎　命題 5.2 ($GL_2(\mathbb{R})$ の場合) および命題 6.1 を用いることで判定ができる．

表 3: 線形部分に対応した固有性の判定条件

$\mathscr{L}(H)$ ＼ $\mathscr{L}(L)$	$GL_2(\mathbb{R})$	D or B'	$SL_2(\mathbb{R})$ に含まれる	Z	$A(\beta)$	U	$B(\beta)$
$GL_2(\mathbb{R})$	小林 [5] による分類						
D or B'	-	この場合固有対は $(N, L(D,1))$ のみ					
$SL_2(\mathbb{R})$ に含まれる	-	-	表 1	表 1 と 命題 6.2 を用いる			
Z	-	-	-	$\not\pitchfork$	◎	◎	◎
$A(\alpha)$	-	-	-	-	**(A)**	◎	**(C)**
U	-	-	-	-	-	$\not\pitchfork$	◎
$B(\alpha)$	-	-	-	-	-	-	**(B)**

(A)　固有性と (CI) 条件が同値になる．

(B)　対 (L, H) が固有であるならば，少なくとも一方は $L(B(-3), 3)$ または $L(B(-3), 6)$．さらに，H がそのいずれかなら

$$L \pitchfork H \iff (L, H) \text{ は (CI) かつ } |\alpha| < 3.$$

ここで，$L(B(-3), 3), L(B(-3), 6)$ は以下で定義される部分群である．ただし，s, t, u は実数を走る変数とする．

$$L(B(-3), 3) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & s \\ se^{-2t} & e^{-4t} & \frac{1}{2}s^2 \end{pmatrix} \right\} \subset L(B(-3), 6) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & s \\ se^{-2t} & e^{-4t} & u \end{pmatrix} \right\}.$$

表 3 や条件 ◎ で述べた命題 6.1, 命題 6.2 について以下で説明する．これらの命題は一般の次元 n で成り立つ．

命題 6.1. L, H は $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ の閉部分群で，$\mathscr{L}(L), \mathscr{L}(H) \subset GL_n(\mathbb{R})$ も閉部分群と仮定する．もし $\mathscr{L}(L) \pitchfork \mathscr{L}(H)$ in $GL_n(\mathbb{R})$ であり，かつ対 $(L, \mathbb{R}^n), (H, \mathbb{R}^n)$ の少なくとも一方が (CI) であるならば，$L \pitchfork H$ in $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ が成り立つ．

命題 6.2. $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ の連結閉部分群 L, H が

$$L \subset SL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n, H \not\subset SL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$$

を満たしていると仮定する．このとき, 以下の同値が成り立つ.

$$L \pitchfork H \text{ in } GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n \iff L \pitchfork (H \cap SL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n) \text{ in } SL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

7 表 3 (C) (即ち，$\mathscr{L}(L) = A(\alpha), \mathscr{L}(H) = B(\beta)$) の場合

本章では表 3 中の **(C)** の場合について説明する．この場合は連結部分群の対が固有であるための（簡潔な）必要十分条件は見つかっておらず，分類は複雑である．

まず，同値関係 $\sim$ による $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ の連結部分群の分類について述べる．この分類は本質的に Chapovskyi-Koval-Zhur [3] によって行われた.

事実 7.1. (Chapovskyi-Koval-Zhur [3]) L, H を $GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ の連結部分群とする.

(1) $\mathscr{L}(L) = A(\alpha)$ のとき，L は同値関係 $\sim$ の違いを除いて以下のいずれかの形に一致する．ただし，s, t, u はそれぞれ実数を走る変数で，α は実定数である.

$$L(A(\alpha),1) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{(\alpha+1)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(\alpha-1)t} & 0 \end{pmatrix} \right\}, L(A(1),2) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} \right\},$$
$$L(A(\alpha),3) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{(\alpha+1)t} & 0 & s \\ 0 & e^{(\alpha-1)t} & 0 \end{pmatrix} \right\}, L(A(1),4) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & s \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} \right\},$$
$$L(A(\alpha),5) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{(\alpha+1)t} & 0 & s \\ 0 & e^{(\alpha-1)t} & u \end{pmatrix} \right\}.$$

(2) $\mathscr{L}(H) = B(\beta)$ のとき，H は同値関係 $\sim$ 違いを除いて以下のいずれかの形に一致

する．ただし，s, t, u, v はそれぞれ実数を走る変数で，β は実定数である．

$$
\begin{aligned}
L(B(\beta),1) &\coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{(\beta+1)t} & 0 & 0 \\ s & e^{(\beta-1)t} & 0 \end{pmatrix} \right\}, L(B(1),2) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ s & 1 & t \end{pmatrix} \right\}, \\
L(B(-3),3) &\coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & s \\ e^{-2t}s & e^{-4t} & \frac{1}{2}s^2 \end{pmatrix} \right\}, L(B(\beta),4) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{(\beta+1)t} & 0 & 0 \\ s & e^{(\beta-1)t} & u \end{pmatrix} \right\}, \\
L(B(-1),5) &\coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ s & e^{-t} & u \end{pmatrix} \right\}, \qquad L(B(-3),6) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & s \\ e^{-2t}s & e^{-4t} & u \end{pmatrix} \right\}, \\
L(B(\beta),7) &\coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} e^{(\beta+1)t} & 0 & u \\ s & e^{(\beta-1)t} & v \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}
$$

注 7.2. $L(A(\alpha), i)$ と $L(B(\beta), j)$ の包含関係は，下の図 1 の通りである．ハッセ図中の順序は，あるパラメータ α, β の取り方により（同値関係 $\sim$ による同一視を許して）包含関係が実現することを表す．

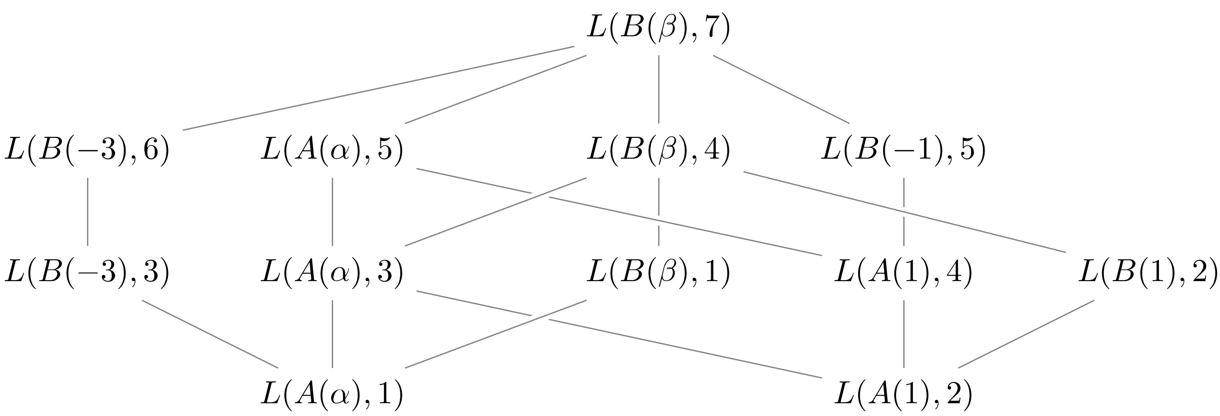

図 1: 部分群 $L(A(\alpha), i), L(B(\beta), j)$ の間の包含関係

命題 7.3. 表 3 **(C)** の場合の連結部分群の対の固有性は以下の表 4 の通り．ここで，実定数 α, β の条件が書かれている成分は，対応する対が固有となるための必要十分条件を表している．

表 4: 表 3 (C) における固有対の分類

$L \backslash H$	$L(B(\beta),1)$	$L(B(1),2)$	$L(B(-3),3)$	$L(B(\beta),4)$	$L(B(-1),5)$	$L(B(-3),6)$	$L(B(\beta),7)$
$L(A(\alpha),1)$	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$	$\lvert\alpha\rvert \geq 1$	$\lvert\alpha\rvert \neq 3$	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$	$\alpha \neq 0$	$\lvert\alpha\rvert \neq 3$	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$
$L(A(1),2)$	$\pitchfork$		$\pitchfork$	$-1 \leq \beta < 1$		$\pitchfork$	$1 > \lvert\beta\rvert$
$L(A(\alpha),3)$	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$	$\lvert\alpha\rvert > 1$	$\lvert\alpha\rvert \neq 3$				
$L(A(1),4)$	$\pitchfork$		$\pitchfork$				
$L(A(\alpha),5)$	$\lvert\alpha\rvert > \lvert\beta\rvert$	$\lvert\alpha\rvert > 1$	$\lvert\alpha\rvert > 3$				

謝辞

本稿は 2025 年度 RIMS 共同研究 (公開型)「表現論，リー理論および関連分野の進展」（2025 年 6 月 24 日（火）- 6 月 27 日（金））の講究録です．発表の機会をくださいました世話人の佐々野詠淑氏に深く感謝申し上げます．

参考文献

[1] A. Baklouti and F. Khlif. Proper actions and some exponential solvable homogeneous spaces. *Internat. J. Math.*, 16(9):941–955, 2005.

[2] Y. Benoist. Actions propres sur les espaces homogènes réductifs. *Ann. of Math. (2)*, 144(2):315–347, 1996.

[3] Y. Y. Chapovskyi, S. D. Koval, and O. Zhur. Subalgebras of lie algebras. example of sl(3,r) revisited, Preprint, arXiv:2403.02554.

[4] T. Kobayashi. Proper action on a homogeneous space of reductive type. *Math. Ann.*, 285(2):249–263, 1989.

[5] T. Kobayashi. Discontinuous groups acting on homogeneous spaces of reductive type. In *Representation theory of Lie groups and Lie algebras (Fuji-Kawaguchiko, 1990)*, pages 59–75. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.

[6] T. Kobayashi. Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups. *J. Lie Theory*, 6(2):147–163, 1996.

[7] T. Kobayashi. Discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces. In *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, pages 723–747. Springer, Berlin, 2001.

[8] T. Kobayashi. Proper actions and representation theory, Preprint, arXiv:2506.15616.

[9] R. L. Lipsman. Proper actions and a compactness condition. *J. Lie Theory*, 5(1):25–39, 1995.

[10] S. Nasrin. Criterion of proper actions for 2-step nilpotent Lie groups. *Tokyo J. Math.*, 24(2):535–543, 2001.

[11] T. Yoshino. A counterexample to Lipsman's conjecture. *Internat. J. Math.*, 16(5):561–566, 2005.

[12] T. Yoshino. Criterion of proper actions for 3-step nilpotent Lie groups. *Internat. J. Math.*, 18(7):783–795, 2007.