

# Morgan's mixed Hodge structures on $p$ -filiform Lie algebras and low-dimensional nilpotent Lie algebras

大阪大学・理学研究科 下地 泰斗

Taito Shimoji

Department of Mathematics

The University of Osaka

## 1 概要

本稿は 2025 年度 RIMS 研究集会「表現論, リー理論および関連分野の進展」での [9] についての講演に基づいて作成された講究録である。

非特異複素代数多様体の (複素多様体としての) 基本群を冪零完備化することで得られるリー代数のコホモロジーに定まる混合ホッジ構造は、Morgan の混合ホッジ構造と呼ばれている。これは Deligne のホッジ理論による代数多様体のコホモロジーの混合ホッジ構造と適合する。本講演では、Morgan の混合ホッジ構造からリー代数の次数付けが得られることを説明し、そのようなリー代数の構造に関する必要十分条件を、 $p$ -filiform というクラスに対して与える。また、6 次元以下に対してはそのような次数付けを持つかどうかについて完全な分類を得たので、それについても紹介する。応用として、非特異複素代数多様体の基本群として現れない有限生成群の例を、生成元と関係式を用いて明示的に与える。

### 1.1 謝辞

講演の機会を与えてくださった世話人の龍谷大学の佐々野詠淑さんに感謝申し上げます。また、研究集会にて興味深い質問をして下さった方々にも感謝申し上げます。

## 2 背景

### 2.1 Serre の問題

非特異複素代数多様体の基本群は有限表示であることが知られている。Serre は「すべての有限群が非特異複素射影代数多様体の基本群として実現できる」ことを示し [1]、一般に「どのような有限表示群（無限群）が非特異複素代数多様体の基本群となるか？」という問題を提示した。これは **Serre の問題** と呼ばれている。

例えば自由アーベル群について考える。可換群  $\mathbb{Z}$  は複素平面から原点を除いた集合  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$  の基本群である。よって、任意の自由アーベル群  $\mathbb{Z}^n$  は  $\mathbb{C}^*$  の直積空間  $(\mathbb{C}^*)^n$  の基本群として表すことができる。

### 2.2 冪零リー群の格子に対する Serre の問題

代数多様体の基本群が捩れ自由かつ冪零な場合を考える。そこで「どのような捩れ自由な有限生成冪零群が非特異複素代数多様体の基本群となるか？」という問題を考える。以下の定理がよく知られている。

**定理 2.2.1** ([2],[7]). 任意の捩れ自由な有限生成冪零群は、ある単連結冪零リー群  $N$  の格子  $\Gamma$  と同型である。また、 $N$  の存在は同型を除いて一意である。

さらに、単連結冪零リー群  $N$  が格子  $\Gamma$  を持つことと、 $\mathfrak{n}$  のリー代数  $\mathfrak{n}$  の基底で、構造定数がすべて有理数であるものが存在することが同値である。ここで、格子とは商空間がコンパクトであるような離散部分群のことである。

この定理から、捩れ自由な有限生成冪零群が非特異複素代数多様体の基本群となるかは、単連結冪零リー群（リー代数）を用いて研究できることが示唆される。よって、捩れ自由な冪零基本群に関する Serre の問題は次の問題と同値である。

**問題 2.2.2.** どのような単連結冪零リー群の格子が非特異複素代数多様体の基本群となるか？

**例 2.2.3.** 例えば、離散ハイゼンベルグ群  $H_3(\mathbb{Z})$  を考える。これはハイゼンベルグ群  $H_3(\mathbb{R})$  のひとつの格子である。対応するリー代数  $\mathfrak{n}$  は基底  $X_1, X_2, X_3$  で  $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = 0 = [X_2, X_3]$  を満たすように取れる。また、等質空間  $M = H_3(\mathbb{Z}) \backslash H_3(\mathbb{R})$  の垂  $C(M) = H_3(\mathbb{Z}) \backslash H_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{>0}$  が非特異複素代数多様体の構造を持つことが知られている ([6])。  $C(M)$  の基本群は  $H_3(\mathbb{Z})$  であるので、離散ハイゼンベルグ群についての Serre の問題は成立する。

## 2.3 Morgan の判定法

Morgan は、非特異複素代数多様体の基本群が単連結冪零リー群の格子となるための必要条件を、対応するリー代数の次数付けとコホモロジーに関する条件を用いて記述した。非特異複素代数多様体  $X$  の基本群  $\pi_1(X, x)$  が捩れ自由な冪零群であると仮定する。 $\pi_1(X, x)$  を格子として埋め込める単連結冪零リー群を  $N$  とする。 $N$  のリー代数  $\mathfrak{n}$  に関して以下が成立する。

**定理 2.3.1** ([6]). 複素化  $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$  は次数付け  $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i \leq -1} \mathfrak{n}_i$  を持ち、以下の二条件 **(W)**, **(H)** を満たす。

**(W)**: 誘導される次数付け  $H^j(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{k \geq 0} H_k^j$  について以下が成立する。

$$H^1(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = H_1^1 \oplus H_2^1$$

$$H^2(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = H_2^2 \oplus H_3^2 \oplus H_4^2.$$

**(H)**:  $k, l \in \mathbb{Z}, j = 1, 2$  に対し、部分空間たち  $\mathfrak{n}_{2k+1}, H_{2l+1}^j$  の次元が偶数である。

条件 **(W)** は代数多様体の実係数コホモロジーの情報から従い、**(H)** は混合ホッジ構造の条件を用いたものである。上の定理から次が従う。

**系 2.3.2.** 有理リー代数の拡大として書ける冪零  $\mathbb{R}$ -リー代数  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$  の複素化が条件 **(W)**, **(H)** を満たす次数付けを持たなければ、対応する単連結冪零リー群  $N$  の格子  $\Gamma$  は非特異複素代数多様体の基本群とならない。

よって、非特異複素代数多様体の基本群となる単連結冪零リー群の格子の判定が、リー代数のコホモロジーと次数付けの計算で可能になる。

## 3 主定理

**定義 3.0.1.** 冪零リー代数  $\mathfrak{n}$  が  $p$ -filiform であるとは降中心列  $\{C^i \mathfrak{n}\}$  について、すべての  $1 \leq i \leq \dim \mathfrak{n} - p$  に対し

$$\dim C^i \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{n} - p - i$$

が成立するときをいう。特に  $p = 1$  のとき *filiform* と呼ばれている。また、 $p = \dim \mathfrak{n} - 1$  であることと  $\mathfrak{n}$  が可換リー代数であることが同値である。

以下が主定理である。

**定理 3.0.2** ([9]).  $p$ -filiform リー代数  $\mathfrak{n}$  が条件 (W), (H) を満たすような次数付けを持つための必要十分条件は

$$\dim \mathfrak{n} < p + 3$$

が成り立つこと。つまり、 $p = \dim \mathfrak{n} - 1$  または  $\dim \mathfrak{n} - 2$  となり、 $\mathfrak{n}$  は可換リー代数または 2-ステップ冪零リー代数と同型である。

**系 3.0.3.**  $N$  を単連結冪零リー群とし、 $N$  のリー代数が  $p$ -filiform であると仮定する。このとき、非特異複素代数多様体  $X$  の基本群  $\pi_1(X, x)$  が  $N$  の格子ならば、 $\pi_1(X, x)$  は 2-ステップ冪零群または可換群である。

**例 3.0.4.**  $n$  次元リー代数  $\mathfrak{n} = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$  を  $[X_1, X_i] = X_{i+1}$  ( $2 \leq i \leq n-1$ )、他の  $j < k$  に対して  $[X_j, X_k] = 0$  を満たすものとする。これは filiform であり、有理リー代数の拡大となっているので、対応する単連結冪零リー群  $N$  は格子  $\Gamma$  を持つ。上の定理より、条件 (W), (H) を満たす次数付けを持つためには  $n = 3$  であることが必要十分条件である。また、定理 2.2.3 から  $\Gamma$  がある非特異複素代数多様体の基本群となるための必要十分条件は  $n = 3$  であることが従う。また、群の表示を用いた明示的な反例

$$L_n := \left\langle x_1, \dots, x_n \left| \begin{array}{l} [x_1, x_i] = x_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ 1 = [x_1, x_n] = [x_j, x_k] \quad (2 \leq j < k \leq n) \end{array} \right. \right\rangle \text{ for } n \geq 4$$

を得る。

さらに、Morgan の判定法を 6 次元以下の冪零リー代数に対して与えた。

**定理 3.0.5** ([9]).  $\Gamma$  を単連結冪零リー群  $N$  の格子とする。  $N$  のリー代数  $\mathfrak{n}$  が以下のリー代数と同型とする：

$$\begin{aligned} \text{filiform} &: L_{4,3}, L_{5,a} \quad (a = 6, 7), L_{6,b} \quad (14 \leq b \leq 18) \\ \text{2-filiform} &: L_{4,3} \oplus \mathbb{C}, L_{5,5}, L_{5,a} \oplus \mathbb{C}, L_{6,c} \quad (11 \leq c \leq 13) \\ \text{3-filiform} &: L_{4,3} \oplus \mathbb{C}^2, L_{5,5} \oplus \mathbb{C}, L_{6,10} \\ \text{otherwise} &: L_{5,8}, L_{6,19}(-1), L_{6,20}, L_{6,23}, L_{6,d} \quad (25 \leq d \leq 28). \end{aligned}$$

このとき  $\Gamma$  はどんな非特異複素代数多様体の基本群とも同型にならない。

ここでリー代数  $L_{\bullet, \bullet}$  は以下の冪零リー代数の分類 ([5] 参照) の表記を用いた。

## 4 今後の展望

Morgan の判定条件は混合ホッジ構造から由来している。判定法を混合ホッジ構造 (二重次数付け) の言葉で書き直す。次数付けのときと同様に、非特異複素代数多様体  $X$  の基本群  $\pi_1(X, x)$  が捩れ自由な冪零群であると仮定し、 $\pi_1(X, x)$  を格子として埋め込める単連結冪零リー群を  $N$  とする。また、 $N$  のリー代数を  $\mathfrak{n}$  とする。

TABLE 1 Classification of  $\mathbb{C}$ -nilpotent Lie algebras in dimension up to 5

		Lie brackets
dim= 1	$L_{1,1} = \mathbb{C}$	abelian
dim= 2	$L_{2,1} = \mathbb{C}^2$	abelian
dim= 3	$L_{3,1} = \mathbb{C}^3$ $L_{3,2}$	abelian $[X_1, X_2] = X_3$
dim= 4	$L_{4,1} = \mathbb{C}^4$ $L_{4,2} = L_{3,2} \oplus \mathbb{C}$ $L_{4,3}$	abelian $[X_1, X_2] = X_3, [Y_4, X_i] = 0$ for all $i$ $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4$
dim= 5	$L_{5,1} = \mathbb{C}^4$ $L_{5,2} = L_{3,2} \oplus \mathbb{C}^2$ $L_{5,3} = L_{4,3} \oplus \mathbb{C}$ $L_{5,4}$ $L_{5,5}$ $L_{5,6}$ $L_{5,7}$ $L_{5,8}$ $L_{5,9}$	abelian $[X_1, X_2] = X_3, [Y_4, X_i] = 0 = [Y_5, X_i] = [Y_4, Y_5]$ for all $i$ $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [Y_5, X_i] = 0$ for all $i$ $[X_4, X_1] = X_5, [X_2, X_3] = X_5$ $[X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [X_3, X_2] = X_5$ $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [X_2, X_3] = X_5$ $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5$ $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_4] = X_5$ $[X_1, X_2] = X_3, [X_2, X_3] = X_4, [X_1, X_3] = X_5$

TABLE 3 Classification of  $\mathbb{C}$ -nilpotent Lie algebras in dimension 6

	Lie brackets
$L_{6,1} = \mathbb{C}^6$	abelian
$L_{6,2} = L_{3,2} \oplus \mathbb{C}^3$	$[X_1, X_2] = X_3, [Y_4, X_i] = 0 = [Y_5, X_i] = [Y_6, X_i] = [Y_j, Y_k]$ for all $i, 4 \leq j < k \leq 6$
$L_{6,3} = L_{4,3} \oplus \mathbb{C}^2$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [Y_5, X_i] = 0 = [Y_6, X_i]$ for all $i$
$L_{6,4} = L_{5,4} \oplus \mathbb{C}$	$[X_4, X_1] = X_5, [X_2, X_3] = X_5, [Y_6, X_i] = 0$ for all $i$
$L_{6,5} = L_{5,5} \oplus \mathbb{C}$	$[X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5 = [X_3, X_2], [Y_6, X_i] = 0$ for all $i$
$L_{6,6} = L_{5,6} \oplus \mathbb{C}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5 = [X_2, X_3], [Y_6, X_i] = 0$ for all $i$
$L_{6,7} = L_{5,7} \oplus \mathbb{C}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [Y_6, X_i] = 0$ for all $i$
$L_{6,8} = L_{5,8} \oplus \mathbb{C}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_4] = X_5, [Y_6, X_i] = 0$ for all $i$
$L_{6,9} = L_{5,9} \oplus \mathbb{C}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_2, X_3] = X_4, [X_1, X_3] = X_5, [Y_6, X_i] = 0$ for all $i$
$L_{6,10}$	$[X_2, X_3] = X_4, [X_5, X_1] = X_6 = [X_2, X_4]$
$L_{6,11}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_5, [X_1, X_5] = X_6 = [X_2, X_3] = [X_2, X_4]$
$L_{6,12}$	$[X_2, X_3] = X_4, [X_2, X_4] = X_5, [X_3, X_1] = X_6 = [X_2, X_5]$
$L_{6,13}$	$[X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5 = [X_3, X_2], [X_1, X_5] = X_6 = [X_4, X_2]$
$L_{6,14}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5 = [X_2, X_3], [X_2, X_5] = X_6 = [X_4, X_3]$
$L_{6,15}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5 = [X_2, X_3], [X_2, X_5] = X_6 = [X_2, X_4]$
$L_{6,16}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [X_2, X_5] = X_6 = [X_4, X_3]$
$L_{6,17}$	$[X_2, X_1] = X_3, [X_2, X_3] = X_4, [X_2, X_4] = X_5, [X_1, X_3] = X_6 = [X_2, X_5]$
$L_{6,18}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [X_1, X_5] = X_6$
$L_{6,19}(-1)$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_4] = X_5, [X_2, X_5] = X_6 = [X_4, X_3]$
$L_{6,20}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_4] = X_5, [X_1, X_5] = X_6 = [X_2, X_3]$
$L_{6,21}(-1)$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_2, X_3] = X_4, [X_1, X_3] = X_5, [X_1, X_4] = X_6 = [X_2, X_5]$
$L_{6,22}(0)$	$[X_2, X_4] = X_5, [X_4, X_1] = X_6 = [X_2, X_3]$
$L_{6,22}(1)$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_4, X_5] = X_6$
$L_{6,23}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_4] = X_5, [X_1, X_5] = X_6 = [X_4, X_2]$
$L_{6,24}(0)$	$[X_1, X_3] = X_4, [X_3, X_4] = X_5, [X_1, X_4] = X_6 = [X_3, X_2]$
$L_{6,24}(1)$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_2, X_3] = X_5 = [X_2, X_4], [X_1, X_3] = X_6$
$L_{6,25}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_5] = X_6$
$L_{6,26}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_2, X_4] = X_5, [X_1, X_4] = X_6$
$L_{6,27}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_2, X_5] = X_6$
$L_{6,28}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_2, X_3] = X_4, [X_1, X_3] = X_5, [X_1, X_5] = X_6$

**定理 4.0.1** ([6]). 複素化  $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$  は混合ホッジ構造の二重次数付け  $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p,q \leq 0, p+q \leq -1} \mathfrak{n}_{p,q}$  を持ち、以下の条件 **(W)** を満たす。

**(W):** 誘導される二重次数付け  $H^j(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{s,t \geq 0, s+t \geq j} H_{s,t}^j$  ( $j = 1, 2$ ) について以下が成立する。

$$H^1(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = H_{1,0}^1 \oplus H_{0,1}^1 \oplus H_{1,1}^1$$

$$H^2(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = H_{2,0}^2 \oplus H_{1,2}^2 \oplus H_{0,2}^2 \oplus H_{1,2}^2 \oplus H_{2,1}^2 \oplus H_{2,2}^2.$$

がともに混合ホッジ構造の二重次数付けである。つまり、 $\overline{H_{p,q}^j} = H_{q,p}^j \bmod \bigoplus_{s+t < p+q} H_{s,t}^j$

**注意 4.0.2.** 上の設定の下で  $\mathfrak{n}_i := \bigoplus_{p+q=i} \mathfrak{n}_{p,q}$  とおくと、定理 2.3.1 は定理 4.0.1 の必要条件であることがすぐに従う。

今後の展望として以下の問題を考える。

**問題 4.0.3.** 定理 4.0.1 を満たす冪零リー代数に関する必要十分条件を求めよ。また、リー代数の条件に関する（何かしらの）幾何的または組み合わせ論的特徴付けを与えよ。

**問題 4.0.4.** 定理 4.0.1 を満たす冪零リー代数に対応する単連結冪零リー群が格子  $\Gamma$  を持つとする。このとき、 $\Gamma$  を基本群に持つ非特異複素代数多様体を構成せよ。

## 参考文献

- [1] J.-P. Serre, *Sur la topologie des varietes algebriques en caracteristique p*, *Symposium Internacional de Topologia Algebraica, Universidad Nacional Autonoma de Mexico*, 1958, pp. 2453.
- [2] A. I. Malcev *On a class of homogeneous spaces. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 13. 1949.
- [3] E.Hakavuori, V.Kivioja, T.Moisala F.Tripaldi, Gradings for nilpotent Lie algebras *Journal of Lie Theory* 32 (2022), 383–412.
- [4] J.M. Cabezas, J.R. Gómez and A.Jimenez-Merchán. *Family of p-filiform Lie algebras . Algebra and Operator Theory, Proceedings of the Colloquium in Tashkent.* 93-102,1997.
- [5] J.M. Ancochea-Bermudez and M. Goze. *Classification des algèbres de Lie nilpotent complexes de dimension 7 . Arch. Math.,* 52(2):157-185,1989.

- [6] J.W. Morgan *The algebraic topology of smooth algebraic varieties. Inst. Étautes Etudes Sci.* Publ.Math. No. **48** (1978), 137-204.
- [7] M. S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups. Springer-verlag.* New York, 1972.
- [8] P. Deligne, Théorie de Hodge. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. **40** (1971), 5–57.
- [9] T. Shimoji, Gradings on nilpotent Lie algebras associated with the nilpotent fundamental groups of smooth complex algebraic varieties. arXiv:25804.08571 (2025).