

# A $\mathbb{Z}_2$ -graded shift symmetry and trasnposed like relations between $\mathbb{Z}_2$ -graded Poisson algebras and Gerstenhaber algebras

神奈川学園中学・高等学校 多田和功\*

Yasukatsu Tada

Kanagawa Gakuen Junior and Senior High School

## 概要

$\nu$  付き Grassmann 代数上の代数的自己同型写像に対して, parity 項なる odd 元 (ある生成元に固定したときに定まる odd 元という意味) を定め, その odd deformation を考えることで  $\mathbb{Z}_2$ -graded Poisson algebra の族に対して, 括弧間に明確な関係式を述べる事ができる. 相互関係式において, odd 元にある制約をつけると  $\mathbb{Z}_2$ -graded Poisson algebra と Gerstenhaber algebra の性質を持つものに分解される.  $\mathbb{Z}_2$ -graded degree に関しての shift を考えることで, お互いの括弧式の役割を入れ替えるような (transposed like な) 関係式が成り立っていることを述べる.

**keywords** Grassmann 代数, Clifford 代数, parity 項, parity 写像, automorphisms, parity non-preserving, Poisson bracket, Gerstenhaber 代数, Transposed Poisson (super) 代数

## 1 parity 構造について

まず, 一般論から入る.

**定義 1.1.** 代数  $(A, \cdot)$  が parity 構造を持つとは, ある  $P, Q \subset A$  が存在して, 次の関係式を満たすときをいう.

$$\begin{aligned} A &= P \oplus Q \\ P \cdot P &\subset P \\ P \cdot Q &\subset Q \\ Q \cdot P &\subset Q \\ Q \cdot Q &\subset P \end{aligned}$$

次に, 代数  $(A, \cdot)$  が parity 構造を持つときに, parity が同じであることを以下のように定義する.

**定義 1.2.** 代数  $(A, \cdot)$  が, parity 構造を持つとき, 代数  $(A, \cdot)$  の代数的自己同型写像の元  $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Aut}(A, \cdot)$  に対して, parity 同値であるとは,  $\varphi_1(P) = \varphi_2(P), \varphi_1(Q) = \varphi_2(Q)$  のときをいう.

上記の定義には特に結合律の成立を仮定をしていないことは注意しておく. Grassmann 代数や, Clifford 代数の代数的自己同型写像には parity 非保存な写像が存在する. parity を固定しない所でも議論を進めるために, 上のような言葉が必要になる. どの元を odd 元と呼ぶかは生成元の選び方によるため “相対的” な議論が必要になる (cf. [3], [14]~[17], [28], [29]).

---

\* tada@kanagawa-kgs.ac.jp

## 2 Grassmann 代数, v 付き Grassman 代数, Clifford 代数

第 2 節以降, supermanifold に関しては, [3],[9],[10],[13],[31], Poisson superalgebra に関しては, [4],[7],[8],[12], 変形量子化については, [5],[6],[18],[19],[23],[24], 代数表示の変形論については, [20],[21],[22],[25],[26]などを参考にしている. 第 2 節, 第 3 節は [28] の一部を列挙したものである.

**定義 2.1.**  $(\bigwedge^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$  が  $2^{2n}$  次元実 Grassmann 代数であるとは, 次の性質を持つ  $\mathbb{R}$  係数  $2^{2n}$  次元線形空間のことである.

- $\wedge$  は結合的な積
- 生成元  $\langle e_i \rangle = \{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$  が存在し, 次の基本関係式を満たす.

$$e_i \wedge e_j + e_j \wedge e_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2n)$$

生成元の変更を行うことがあるので,  $(\bigwedge^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$  という記法で, 生成元  $\langle e_i \rangle$  を用いていることを明示的にしている. 特に混乱を生じない場合には,  $(\bigwedge^{2n}, \wedge)$  のように表す.

**定義 2.2.** Grassmann 代数  $(\bigwedge^{2n}, \wedge)$  の even part  $(\bigwedge_0^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$ , odd part  $(\bigwedge_1^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$  を次のように定義する.

$$\begin{aligned} (\bigwedge_0^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge) &= \left\{ a_{ev} = \sum_{k=0}^n \sum_{i_1 i_2 \dots i_{2k}} a^{i_1 i_2 \dots i_{2k}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_{2k}}, a^{i_1 i_2 \dots i_{2k}} \in \mathbb{R} \right\} \\ (\bigwedge_1^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge) &= \left\{ a_{od} = \sum_{k=0}^n \sum_{i_1 i_2 \dots i_{2k+1}} a^{i_1 i_2 \dots i_{2k+1}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_{2k+1}}, a^{i_1 i_2 \dots i_{2k+1}} \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

**命題 2.1.** Grassmann 代数は parity 構造を持つ ( $\mathbb{Z}_2$ -graded 代数である).

**定義 2.3.**  $Ev_{\langle e_i \rangle} : (\bigwedge^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge) \rightarrow (\bigwedge_0^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$  を even part への射影とする.

**定義 2.4.**  $Od_{\langle e_i \rangle} : (\bigwedge^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge) \rightarrow (\bigwedge_1^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$  を odd part への射影とする.

**定義 2.5.**  $B_{\langle e_i \rangle} : (\bigwedge^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge) \rightarrow (\bigwedge^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$  を次で定義する (先頭項を一番後ろへ移動する写像).

$$B_{\langle e_i \rangle}(e_p \wedge e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \wedge e_p$$

**注 2.1.** この Backward 写像を使えば, even part への射影や odd part への射影を  $Ev_{\langle e_i \rangle} = \frac{id - B_{\langle e_i \rangle}}{2}$ ,  $Od_{\langle e_i \rangle} = \frac{id + B_{\langle e_i \rangle}}{2}$  で表すことができる (ただし,  $B_{\langle e_i \rangle}(1) = 1$  とし, 和は保たれるように拡張する).  $B_{\langle e_i \rangle}$  は  $\langle e_i \rangle$  に依存するが, 項の表示, 項の入れ替え計算が可能であるならば,  $Ev_{\langle e_i \rangle}, Od_{\langle e_i \rangle}$  は Backward 写像を用いて定義できる. 有限回の操作で実現可能であることを注意しておく.

**注 2.2.**  $B_{\langle e_i \rangle}$  は  $B_{\langle e_i \rangle}^2 = id$  の性質を持つ. これより, もっと一般に  $B : (\bigwedge^{2n}, \wedge) \rightarrow (\bigwedge^{2n}, \wedge)$  において  $B^2 = id$  を満たすものを考え,  $\frac{id - B}{2}, \frac{id + B}{2}$  を用いて  $(\bigwedge^{2n}, \wedge)$  を分解することで, ある種の対称性を考えることになる. これは超対称性とは異なる対称性を扱える可能性を示唆している (idempotent symmetry とでも呼ぶべきものになるか?).

**命題 2.2.**  $Ev_{\langle e_i \rangle}, Od_{\langle e_i \rangle}$  に対して, 次の性質が成り立つ.

$$\begin{aligned} Ev_{\langle e_i \rangle} \circ Ev_{\langle e_i \rangle} &= Ev_{\langle e_i \rangle} \\ Od_{\langle e_i \rangle} \circ Od_{\langle e_i \rangle} &= Od_{\langle e_i \rangle} \\ Ev_{\langle e_i \rangle} \circ Od_{\langle e_i \rangle} &= 0 \\ Od_{\langle e_i \rangle} \circ Ev_{\langle e_i \rangle} &= 0 \end{aligned}$$

**定義 2.6.**  $\iota_{\langle e_i \rangle} : (\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge) \rightarrow (\Lambda_1^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$  なる odd part の符号を取り替える写像を

$$\iota_{\langle e_i \rangle}(a) = Ev_{\langle e_i \rangle}(a) - Od_{\langle e_i \rangle}(a)$$

で定義する.

**定義 2.7.** 左消滅作用素  $\overrightarrow{\partial}_{e_i} : (\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge) \rightarrow (\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$  を次で定義する.

- $\mathbb{R}$ -linear
- $\overrightarrow{\partial}_{e_i}(e_j) = \delta_{ij}$
- $\overrightarrow{\partial}_{e_i}(a \wedge b) = \overrightarrow{\partial}_{e_i}(a) \wedge b + \iota(\langle e_i \rangle)(a) \wedge \overrightarrow{\partial}_{e_i}(b)$

**定義 2.8.** 右消滅作用素  $\overleftarrow{\partial}_{e_i} : (\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge) \rightarrow (\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$  を次で定義する.

- $\mathbb{R}$ -linear
- $(e_j) \overleftarrow{\partial}_{e_i} = \delta_{ij}$
- $(a \wedge b) \overleftarrow{\partial}_{e_i} = a \wedge (b) \overleftarrow{\partial}_{e_i} + (a) \overleftarrow{\partial}_{e_i} \wedge \iota(\langle e_i \rangle)(b)$

**命題 2.3.** 次のことが成り立つ.

- $\overrightarrow{\partial}_{e_i} \overrightarrow{\partial}_{e_j} = -\overrightarrow{\partial}_{e_j} \overrightarrow{\partial}_{e_i}$
- $\overleftarrow{\partial}_{e_i} \overleftarrow{\partial}_{e_j} = -\overleftarrow{\partial}_{e_j} \overleftarrow{\partial}_{e_i}$
- $(\overrightarrow{\partial}_{e_i} f) \overleftarrow{\partial}_{e_j} = \overrightarrow{\partial}_{e_i} (f \overleftarrow{\partial}_{e_j})$
- $\overrightarrow{\partial}_{e_i} f = -\iota(\langle e_i \rangle)(f) \overleftarrow{\partial}_{e_j}$

**定義 2.9.**  $p(\langle e_i \rangle) : (\Lambda^{2n}, \wedge) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  を次で定義する.

$$\begin{aligned} p(\langle e_i \rangle)(f_{ev}) &= 0 \\ p(\langle e_i \rangle)(f_{od}) &= 1 \end{aligned}$$

$(\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$  の元と常に可換であるような形式的 parameter  $\nu$  を用意する.

**定義 2.10.**  $(\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle)[[\nu]], \wedge)$  が  $\nu$  付き Grassmann 代数であるとは,  $(\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$  の  $\mathbb{R}[[\nu]]$  による中心拡大  $\nu$  として得られる結合的代数のことである.

**定義 2.11.**  $a, b \in (\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle)[[\nu]], \wedge)$  が  $a = b$  であるとは,  $a = \sum_m \nu^m a_m, b = \sum_l \nu^l b_l$  と表したとき,  $a_n = b_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) が成り立つことである.

**定義 2.12.** Grassmann 代数  $(\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$  の元に対して,  $\langle e_i \rangle$  に関する degree が  $k$  次であるとは, 異なる  $k$  個の生成元の積

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$$

の線形和で書かれているときをいう。また、 $\nu$  は 2 次の元として定義すると、この定義は  $(\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle) \llbracket \nu \rrbracket, \wedge)$  の場合にも適用できる。

**注 2.3.**  $(\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge), \forall \varphi \in \text{Aut}(\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge)$  に対して、

- $(\Lambda^{2n}(\langle \varphi_i \rangle), \wedge) = (\Lambda_0^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge) \oplus \varphi((\Lambda_1^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge))$
- $\Lambda_0^{2n} \wedge \Lambda_0^{2n} \subset \Lambda_0^{2n}$
- $\Lambda_0^{2n} \wedge \varphi(\Lambda_1^{2n}) \subset \varphi(\Lambda_1^{2n})$
- $\varphi(\Lambda_1^{2n}) \wedge \Lambda_0^{2n} \subset \varphi(\Lambda_1^{2n})$
- $\varphi(\Lambda_1^{2n}) \wedge \varphi(\Lambda_1^{2n}) \subset \Lambda_0^{2n}$

である。一般に、 $\varphi(\Lambda_0^{2n}) = \Lambda_0^{2n}$  であるが  $\varphi(\Lambda_1^{2n}) \neq \Lambda_1^{2n}$  である。Grassmann 代数の項の次数は、odd part の取り方に依存する。ゆえに parity という概念は絶対的な概念ではない (表示の問題を持つことになる)。

**定義 2.13.**  $\nu$  付き Grassmann 代数  $(\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle) \llbracket \nu \rrbracket, \wedge)$  上の生成元  $\langle e_i \rangle$  に依存する Poisson 括弧を次の式で (暫定的) 定義をする。

$$\{\cdot, \cdot\} = \sum_{i=1}^n \left( \overleftarrow{\partial}_{e_i} \wedge \overrightarrow{\partial}_{e_{i+n}} + \overleftarrow{\partial}_{e_{i+n}} \wedge \overrightarrow{\partial}_{e_i} \right)$$

**定義 2.14.**  $\nu$  付き Grassmann 代数  $(\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle) \llbracket \nu \rrbracket, \wedge)$  上の Moyal \* 積を次の式で定義する ([6] 参照)。

$$* = \exp \frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^n \left( \overleftarrow{\partial}_{e_i} \wedge \overrightarrow{\partial}_{e_{i+n}} + \overleftarrow{\partial}_{e_{i+n}} \wedge \overrightarrow{\partial}_{e_i} \right)$$

次のように略記することもある。

$$\exp \frac{\nu}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} \overleftarrow{\partial}_{e_i} \delta_{ij+n} \overrightarrow{\partial}_{e_j} \quad (\text{この場合 mod } 2n \text{ で考える})$$

上で定義した Moyal \* 積を用いると、次の関係式が得られる。

**命題 2.4.** 次の関係式が成り立つ。

$$e_i * e_j + e_j * e_i = \nu \delta_{ij+n} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2n)$$

**命題 2.5.** \* 積は associativity を持つ。

**命題 2.6.**  $(\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle) \llbracket \nu \rrbracket, *) \cong Cl(n, n, \mathbb{R})$  が成り立つ。

**注 2.4.** 上記の命題を確かめるには、Hadamard 行列 (その高次元版) を用いる。

$(\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle) \llbracket \nu \rrbracket, *)$  上に逆 Moyal 積  $*^{-1}$  を次のように定義することができる (Weyl 代数で成立していることのアナロジーである。[24] 参照)。

$$*^{-1} = \exp \left( -\frac{\nu}{2} \sum_{i=1}^{2n} \left( \overleftarrow{\partial}_{e_i} * \overrightarrow{\partial}_{e_{i+n}} + \overleftarrow{\partial}_{e_{i+n}} * \overrightarrow{\partial}_{e_i} \right) \right)$$

このとき、次の命題が成り立つ。

**命題 2.7.**  $((\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle) \llbracket \nu \rrbracket, *)^{-1}) \cong (\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle) \llbracket \nu \rrbracket, \wedge)$  が成り立つ。

### 3 代数的自己同型写像のなす群について

**定義 3.1.**  $\varphi : (\bigwedge^{2n}, \wedge) \rightarrow (\bigwedge^{2n}, \wedge)$  が Grassmann 代数の代数的自己同型写像であるとは、 $\mathbb{R}$ -linear であり、全単射であって、 $\wedge$  に関して、準同型な写像のことである。

**定義 3.2.**  $\varphi : (\bigwedge^{2n} [\nu], \wedge) \rightarrow (\bigwedge^{2n} [\nu], \wedge)$  が  $\nu$  付き Grassmann 代数の代数的自己同型写像であるとは、 $\mathbb{R}$ -linear であり、 $\nu$  を保ち、全単射であって、 $\wedge$  に関して、準同型な写像のことである。

**定義 3.3.**  $\psi : (\bigwedge^{2n} [\nu], *) \rightarrow (\bigwedge^{2n} [\nu], *)$  が Clifford 代数の代数的自己同型写像であるとは、 $\mathbb{R}$ -linear であり、 $\nu$  を保ち、全単射であって、 $*$  に関して、準同型な写像のことである。

次の定理は重要である。生成元の基本関係式で代数的自己同型であるということが特徴付けられるためである。

**定理 3.1.**  $\varphi : (\bigwedge^{2n}, \wedge) \rightarrow (\bigwedge^{2n}, \wedge)$  が Grassmann 代数の代数的自己同型であるということと、次の性質を持つことは同値である。

- $\mathbb{R}$ -linear
- $\varphi(e_i) = \sum_{p=1}^{2n} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq 2n} a_i^{j_1 j_2 \dots j_p} e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_p}$  と表示したとき、行列  $(a_i^j)$  は逆行列を持つ。
- $\varphi(e_i) \wedge \varphi(e_j) + \varphi(e_j) \wedge \varphi(e_i) = 0$

**注 3.1.**  $\nu$  付き Grassmann 代数の代数的自己同型写像についても、 $\tilde{\varphi}(\nu) = \nu$  を条件に加えれば、同様の議論ができる。

Clifford 代数の代数的自己同型写像についても、上と同様な定理が成り立つ。

**定理 3.2.**  $\psi : (\bigwedge^{2n} [\nu], *) \rightarrow (\bigwedge^{2n} [\nu], *)$  が Clifford 代数の代数的自己同型であるということと、次の性質を持つことは同値である。

- $\mathbb{R}$ -linear
- $\psi(\nu) = \nu$
- $\psi(e_i) * \psi(e_j) + \psi(e_j) * \psi(e_i) = \nu \delta_{ij+n}$

以下、代数的自己同型写像のなす群について考察をするために、次のような記法を用意する。

群	定義
$Aut(\bigwedge^{2n}, \wedge)$	Grassmann 代数の代数的自己同型写像の全体
$Aut_0(\bigwedge^{2n}, \wedge)$	$\left\{ \varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{2n} a_i^j e_j, a_i^j \in \mathbb{R} \right\}$
$Aut_E(\bigwedge^{2n}, \wedge)$	$\left\{ \varphi(e_i) = e_i + \sum_{p=2} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq 2n} a_i^{j_1 j_2 \dots j_p} e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_p}, a_i^{j_1 j_2 \dots j_p} \in \mathbb{R} \right\}$
$Aut_{E,\ell}(\bigwedge^{2n}, \wedge)$	$\left\{ \varphi(e_i) = e_i + \sum_{p \geq \ell} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq 2n} a_i^{j_1 j_2 \dots j_p} e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_p}, a_i^{j_1 j_2 \dots j_p} \in \mathbb{R} \right\}$

**注 3.2.**  $\nu$  付き Grassmann 代数の代数的自己同型写像を考える場合には,  $Aut\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle, \wedge\right)$  を  $Aut\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[\nu], \wedge\right)$  と表記し,  $\mathbb{R}$  係数を  $\mathbb{R}[\nu]$  係数にして考えればよい. 以下では,  $Aut\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle, \wedge\right)$  などを  $Aut\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle, \wedge\right)$  のように表記することがある (表示がくどいため).

群	定義
$Aut\left(\bigwedge^{2n}[\nu], *\right)$	Clifford 代数の代数的自己同型写像全体
$Aut_0\left(\bigwedge^{2n}[\nu], *\right)$	$\left\{ \psi(e_i) = \sum_{j=1}^{2n} a_i^j e_j, a_i^j \in \mathbb{R}[\nu] \right\}$
$Aut_E\left(\bigwedge^{2n}[\nu], *\right)$	$\left\{ \psi(e_i) = e_i + \sum_{p=2} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq 2n} a_i^{j_1 j_2 \dots j_p} e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_p}, a_i^{j_1 j_2 \dots j_p} \in \mathbb{R}[\nu] \right\}$
$Aut_{E,\ell}\left(\bigwedge^{2n}[\nu], *\right)$	$\left\{ \psi(e_i) = e_i + \sum_{p \geq \ell} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq 2n} a_i^{j_1 j_2 \dots j_p} e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_p}, a_i^{j_1 j_2 \dots j_p} \in \mathbb{R}[\nu] \right\}$

このとき, 次の命題が成り立つ.

**命題 3.1.**

$$Aut\left(\bigwedge^{2n}[\nu], *\right) = Aut_0\left(\bigwedge^{2n}[\nu], *\right) \rtimes Aut_E\left(\bigwedge^{2n}[\nu], *\right)$$

**命題 3.2.**

$$Aut\left(\bigwedge^{2n}[\nu], *\right) \triangleright Aut_{E,\ell}\left(\bigwedge^{2n}[\nu], *\right)$$

**命題 3.3.**  $Aut_0\left(\bigwedge^{2n}[\nu], *\right) \cong \left\{ X \in M(2n, \mathbb{R}) \mid {}^t X \begin{pmatrix} O & E_n \\ E_n & O \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} O & E_n \\ E_n & O \end{pmatrix} \right\}$

**命題 3.4.**  $Aut_0\left(\bigwedge^{2n}[\nu], *\right)$  は Lie 群である.

**命題 3.5.**  $Aut_{E,k}\left(\bigwedge^{2n}[\nu], *\right) / Aut_{E,l}\left(\bigwedge^{2n}[\nu], *\right)$  ( $k < l$ ) は有限次元 Lie 群である.

以上の議論より, 次の定理を得る.

**定理 3.3.**  $Aut\left(\bigwedge^{2n}[\nu], *\right)$  は有限次元 Lie 群の射影極限である.

## 4 線形項が単位行列である代数的自己同型写像の決定, parity 項の定義

この節では, 線形項が単位行列になる Grassmann 代数, Clifford 代数それぞれの代数的自己同型写像の形を決定する. 生成元の像の parity が非保存な部分の項が, 代数的自己同型写像の合成を利用して, odd deformation の考察の際に必要な parity 項の定義を行う.

まず, 線形項が単位行列の Grassmann 代数の代数的自己同型写像を調べる.

$$\varphi(e_i) = e_i + \omega_A^i + \omega_B^i \quad (\omega_A^i : \text{even}, \omega_B^i : \text{odd}), \quad \varphi \in Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[\nu], \wedge\right)$$

と表されたとする.  $\omega_A^i, \omega_B^i$  の  $\mathbb{R}$ -係数の記載は省略している.  $\omega_A^i, \omega_B^i$  の元に制限がかかるかどうかを調べる. Grassmann 代数の基本関係式が成り立つこと, 低次の項から考え, 元の偶奇性に気を付ければ,

$$\omega_A^i = e_i \wedge \eta + \omega_B^i \wedge \eta, \quad \left( \exists \eta \in \left( \bigwedge_1^{2n}\langle e_i\rangle, \wedge \right) \right)$$

が得られる. 元の表示に代入すれば

$$\varphi(e_i) = (e_i + \omega_B^i) \wedge (1 + \eta)$$

を得る ( $e_i \wedge \eta$  の部分の計算については [31] 参照). さらに, Clifford 代数の代数的自己同型写像の Grassmann 代数への射影に関しては  $\omega_A^i, \omega_B^i$  にさらなる制限がかかる. 次の定理が成立する.

**定理 4.1.** 線形項の係数が単位行列で書かれる, Clifford 代数の代数的自己同型写像の Grassmann 代数への射影から得られる Grassmann 代数の代数的自己同型写像は, 次の形で書かれる.

$$\begin{aligned} \varphi_\psi(e_i) &= (e_i + \omega_B^i) \wedge (1 + \eta) \\ \{\eta, \eta\} &= 0, \quad \{\omega_B^i, \omega_B^j\} = 0, \quad \vec{\partial}_{i+n}\omega_B^j + \vec{\partial}_{j+n}\omega_B^i = 0 \end{aligned}$$

ただし  $\psi \in \text{Aut}_E(\wedge^{2n}(\langle e_i \rangle) [[\nu]], *)$ ,  $\varphi_\psi$  は  $\psi$  の Grassmann 射影,  $\eta, \omega_B^i$  は odd 元.

証明: 逆 Moyal  $*$  積を用いて  $\varphi_\psi(e_i) = (e_i + \omega_B^i) \exp^{-\frac{\nu}{2}(\overleftarrow{\partial} * \vec{\partial})} (1 + \eta) = (1 - \eta) \exp^{-\frac{\nu}{2}(\overleftarrow{\partial} * \vec{\partial})} (e_i + \omega_B^i)$  等とし  $*$  積の結合性を利用すれば

$$\varphi_\psi(e_i) * \varphi_\psi(e_j) + \varphi_\psi(e_j) * \varphi_\psi(e_i) = \left( \nu \delta_{ij+n} + \sum_{\text{cyclic } i,j} (e_i * \omega_B^j + \omega_B^i * e_j + \omega_B^i * \omega_B^j) \right) * (1 - \eta * \eta)$$

を得る. これより,  $\{\eta, \eta\}=0$  である.  $\nu$  の 1 次部分に注目し, Grassmann 射影を考えることを実行すれば

$$\{\omega_B^i, \omega_B^j\} + \vec{\partial}_{i+n}\omega_B^j + \vec{\partial}_{j+n}\omega_B^i = 0$$

が得られる.  $\omega_B^i$  は  $e_{i+n}$  を含まないので (少し議論がいる),  $\vec{\partial}_{i+n}$  と  $e_{i+n}$  を順に左から作用させれば Clifford 代数の代数的自己同型の場合につく付帯条件が得られる. 代数的自己同型写像の合成を考えると, parity 非保存な部分は, even 項をくぐり抜ける形で “重み” として積として累積される. Clifford 代数の場合には付帯条件があるために, 計算の複雑さが少々緩和される ( $\omega_B^i \wedge \omega_B^j = 0$  が付帯条件から得られる).

$\text{Aut}_E(\wedge [[\nu]], \wedge)$  の 2 つの代数的自己同型写像の間に, 次のような項を定義する.

**定義 4.1.** (parity map, parity 項の定義)  $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Aut}_E(\wedge [[\nu]], \wedge)$  に対して,  $\Pi : \text{Aut}_E(\wedge [[\nu]], \wedge) \times \text{Aut}_E(\wedge [[\nu]], \wedge) \rightarrow \text{Aut}_E(\wedge [[\nu]], \wedge)$  を次のように定める.

$$\Pi \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} (e_i) := \left( \exp \frac{1}{2} (\overleftarrow{\partial} - \vec{\partial}) \varphi_2 \circ \varphi_1 (e_i) \right) \frac{1}{2} (\overleftarrow{\partial} + \vec{\partial}) (\varphi_2 \circ \varphi_1 (e_i))$$

これを parity map と呼ぶことにする (混乱が生じない場合には  $(e_i)$  を省略する). 特に,  $\text{Aut}_E(\wedge [[\nu]], \wedge)$  の 2 つの元のうち, 少なくとも一方に恒等写像が含まれる場合に,

$$\Pi(\varphi)(e_i) := \Pi \begin{pmatrix} \varphi \\ id \end{pmatrix} = -\Pi \begin{pmatrix} id \\ \varphi \end{pmatrix}$$

と定める. これを  $\text{Aut}_E(\wedge [[\nu]], \wedge)$  の元  $\varphi$  に対しての parity 項と呼ぶ.

**定理 4.2.**  $\psi_1, \psi_2 \in \text{Aut}_{E,Cl}(\wedge^{2n}[[\nu]], *)$  の Grassmann 射影である  $\varphi_{\psi_1}, \varphi_{\psi_2} \in \text{Aut}(\wedge^{2n}[[\nu]], \wedge)$  に対して, 次の二つの事柄は同値である.

$$\Pi(\varphi_{\psi_1}) = \Pi(\varphi_{\psi_2}) \Leftrightarrow \varphi_{\psi_1} = \varphi_{\psi_2}$$

幾何学的には, parity 項は異なる odd part のパッチワークの規則に対しての情報を与えるものである.

## 5 Poisson 対・共通部分

この節では odd deformation の計算を行う際に必要になる odd 元の使用ならびに性質について述べる。 $G = \left( \bigwedge_1^{2n} ((e_i)), \wedge \right)$  と略記する。

**定義 5.1.** 元  $e_i \in G_1 (\forall i = 1, 2, \dots, 2n)$  に対して, 元  $e_{i+n} \in G_1$  を Poisson 対と呼ぶ。

Poisson 対は Grassmann 代数の代数的自己同型写像が Clifford 代数の代数的自己同型になり得るかという quantization condition に関わる。異なる odd 元に対して,  $\{\eta, \xi\} \neq 0$  のときには, 量子的な相互作用があることを示唆している。Clifford 代数の代数的自己同型写像を考えると登場する条件  $\{\eta, \eta\} = 0$  は, 自己量子的効果はないという条件と読み取れる。

**定義 5.2.** 集合  $G_1 [p]$  を次で定義する。

$$G_1 [p] = \{ \eta = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \cdots \wedge e_{i_p} \wedge \tilde{\eta} \mid \tilde{\eta} \in G_{p+1((p+1 \bmod 2))} \}$$

このとき  $G_1 [1] \supseteq \cdots \supseteq G_1 [2n]$  が成り立つ。今後の議論で使うのは  $G_1 [1]$  と  $G_1 [2]$  である。

**定義 5.3.** 集合  $G_1 [p, nil]$  を次で定義する。

$$G_1 [p, nil] = \{ \eta \in G_1 [p] \mid \eta = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \cdots \wedge e_{i_p} \wedge \tilde{\omega} \mid \tilde{\omega} \in G_{p+1((p+1 \bmod 2))}, \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = 0 \}$$

$\eta \in G_1 [p, nil]$  であるとき,

$$\eta \wedge \{ \eta, f \} = 0, \quad \forall f \in G$$

が成り立つ。実際  $\eta = e_p \wedge \tilde{\omega}$ ,  $\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = 0$  と表すと

$$\begin{aligned} \eta \wedge \{ \eta, f \} &= e_p \wedge \tilde{\omega} \wedge \{ e_p \wedge \tilde{\omega}, f \} \\ &= e_p \wedge \tilde{\omega} \wedge e_p \wedge \{ \tilde{\omega}, f \} + e_p \wedge \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} \wedge \{ e_p, f \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

**定義 5.4.** 集合  $G_1 [p, nil]$  の部分集合  $N_1 [p]_{\{\cdot, \cdot\}}$  を次で定義する。

$$N_1 [p]_{\{\cdot, \cdot\}} = \{ f \in G_1 [p] \mid f = e_{i_1 \dots i_p} \wedge \tilde{\omega}, \tilde{\omega} \wedge \{ \tilde{\omega}, \cdot \} = 0 \}$$

集合  $N_1 [p]_{\{\cdot, \cdot\}}$  の元は odd 元や Poisson 括弧  $\{\cdot, \cdot\}$  の混在する計算の場面での 0 になり易さを表している (nilpotent potentiality)。

odd 元  $\eta$  に対して次のことが成り立つ。

**命題 5.1.**  $\eta \in G_1 [1, nil]$  であるならば  $\eta \wedge \overleftarrow{\partial}_i = 0 (\forall i = 1, 2, \dots, 2n)$  が成り立つ。

証明:  $\eta = e_p \wedge \tilde{\omega}$  とする。このとき

$$\begin{aligned} \eta \wedge \overleftarrow{\partial}_i &= (e_p \wedge \tilde{\omega}) \wedge (e_p \wedge \tilde{\omega}) \overleftarrow{\partial}_i \\ &= e_p \wedge \tilde{\omega} \wedge \left( \delta_{pi} \tilde{\omega} + e_p \wedge \tilde{\omega} \overleftarrow{\partial}_p \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

**注 5.1.** 逆は成り立たない. 実際  $\eta \wedge \overleftarrow{\partial}_i = 0$  ( $\forall i = 1, 2, \dots, 2n$ ) のとき  $\eta = \widehat{\eta}(i) + \eta(i)$  と分解しておく ( $\widehat{\eta}(i)$  は  $e_i$  を含まない項,  $\eta(i)$  は  $e_i$  を含む項). このとき

$$\begin{aligned} \left( \widehat{\eta}(i) + \eta(i) \right) \wedge \left( \widehat{\eta}(i) + \eta(i) \right) \overleftarrow{\partial}_i &= 0 \\ \left( \widehat{\eta}(i) + \eta(i) \right) \wedge \eta(i) \overleftarrow{\partial}_i &= 0 \end{aligned}$$

となるが, ここで  $e_i$  を右からかけることにより

$$\widehat{\eta}(i) \wedge \eta(i) = 0$$

が得られる. 特に  $i \neq j$  で  $p, q, r$  は相異なるとし,

$$\begin{aligned} \widehat{\eta}(i) &= e_j \wedge e_p \wedge e_q + e_j \wedge e_q \wedge e_r + e_j \wedge e_r \wedge e_p \\ \eta(i) &= e_i \wedge e_p \wedge e_q + e_i \wedge e_q \wedge e_r + e_i \wedge e_r \wedge e_p \end{aligned}$$

を考えると, 各項の取り出しにおいた項に共通部分があれば (全体に渡って共通部分が存在しないくてもよい)  $\widehat{\eta}(i) \wedge \eta(i) = 0$  が成り立つ.

odd 元  $\eta$  が  $\{\eta, \eta\} = 0$  を満たすための条件を考える. そのために次の補題を準備する.

**補題 5.1.**  $\omega \in G_0$  に関して,  $\omega \wedge \omega = 0$  と  $\omega \wedge \{\omega, \cdot\} = 0$  とは同値である.

証明:  $\omega \wedge \omega = 0$  のとき,  $\overleftarrow{\partial}_i$  を作用させ適当に和をとれば, 直ちに  $\omega \wedge \{\omega, \cdot\} = 0$  が得られる. 逆は  $\omega \wedge \{\omega, e_{i+n}\} = 0$  の計算から  $\omega \wedge \overleftarrow{\partial}_i = 0$  が得られる. このとき  $e_i$  の積を作用させればよい.

**命題 5.2.**  $\{\eta, \eta\} = 0$  が成り立つことと, 次のいずれかが成り立つこととは同値である.

- 各項 (自分自身も含む) の中に対となる部分が存在しない.
- $\eta \in G_1[1, nil]$

証明:  $\{\eta, \eta\} = 0$  を丁寧に書けば

$$\eta \overleftarrow{\partial}_1 \overrightarrow{\partial}_{n+1} \eta + \eta \overleftarrow{\partial}_2 \overrightarrow{\partial}_{n+2} \eta + \dots + \eta \overleftarrow{\partial}_n \overrightarrow{\partial}_{2n} \eta = 0$$

である. 各項の微分のされ方に気を付ければ

$$\eta \overleftarrow{\partial}_i \overrightarrow{\partial}_{i+n} \eta = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2n)$$

となることと同値になる. 最初の条件がこれを満たすことは明らかである. 各項の中に対となる部分があるときの考察をする.  $\eta = e_i \wedge \tilde{\omega}$  と表されたする (ここで  $\tilde{\omega}$  は even 元である). このとき

$$\begin{aligned} \{e_i \wedge \tilde{\omega}, e_i \wedge \tilde{\omega}\} &= e_i \overleftarrow{\partial} \wedge \tilde{\omega} \wedge \overrightarrow{\partial} e_i \wedge \tilde{\omega} - e_i \overleftarrow{\partial} \wedge \tilde{\omega} \wedge e_i \wedge \overrightarrow{\partial} \tilde{\omega} \\ &\quad + e_i \wedge \tilde{\omega} \overleftarrow{\partial} \wedge \overrightarrow{\partial} e_i \wedge \tilde{\omega} - e_i \wedge e_i \wedge \tilde{\omega} \overleftarrow{\partial} \wedge \overrightarrow{\partial} \tilde{\omega} \\ &= 2e_i \wedge \tilde{\omega} \wedge \{\tilde{\omega}, e_i\} \end{aligned}$$

である. 補題より  $\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = 0$  であればよいことが分かる.

実は次の命題が成り立つ.

**命題 5.3.**  $G_1[1, nil] = N_1[1]_{\{\cdot, \cdot\}}$  ( $p$  が偶数の場合は  $G_1[p, nil] \supseteq N_1[p]_{\{\cdot, \cdot\}}$ )

**命題 5.4.**  $\{\eta, \cdot\} \wedge \{\eta, \cdot\} = 0$  という条件は,  $\overrightarrow{\partial_{e_i}} \eta \wedge \overrightarrow{\partial_{e_j}} \eta = 0$  と同値である. この条件を満たす  $\eta$  は

- $\eta$  は  $e_1, e_2, \dots, e_{2n}$  の部分の共通部分を 2 つ以上含む. すなわち  $\eta \in G_1[2]$
- $e_i$  を含むとき,  $e_{i+n}$  を含まない.

という性質を持つ.

ここで定義した集合に関して, 次の包含関係が成立する.

$$G_1 \supset G_1[1] \supset G_1[1, nil] = N_1[1]_{\{\cdot, \cdot\}} \supset G_1[2]$$

上記の odd 元全体の集合に関する階層構造を利用し,  $\mathbb{Z}_2$ -graded Poisson 括弧の odd deformation で得られた “ずれ” の特徴について考察する.

## 6 Poisson 括弧の odd 変形・Gerstenhaber 代数

この節では,  $\mathbb{Z}_2$ -graded Poisson algebra の parity 非保存な代数的自己同型写像による odd 変形を計算する. odd 変形に伴って得られる項は, Gerstenhaber 代数の性質を持つ. odd 方向の変形には Grassmann 代数版の Hochschild cohomology (cf.[11]) を準備する (写像  $Odd(\cdot)$  は生成元の選び方に依存している).

**定義 6.1.**  $X : \left(\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge\right) \times \left(\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge\right) \rightarrow \left(\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge\right)$  を  $\mathbb{R}$ -bilinear map とする (以下,  $G = \left(\Lambda^{2n}(\langle e_i \rangle), \wedge\right)$  と略記する).

$\tilde{\delta}_\eta : Map(G, G)$  を次の式で定義する (ただし,  $\eta \in G_1, f, g \in G$  とする).

ここで  $X = \{\cdot, \cdot\}$  とし, 計算を進めると

$$\tilde{\delta}_\eta X(f, g) = Od(f) \wedge \{\eta, g\} - \{f, \eta\} \wedge Od(g)$$

が得られる. この式を括弧式であることを強調する場合は  $[[f, g]]_-$  と表すこともある.

**定義 6.2.**  $\eta \in G_1[1, nil]$  の odd 元  $\eta$  に対して  $\delta_\eta \in Map(A, A)$  を次で定義する.

$$\delta_\eta = \exp \tilde{\delta}_\eta - 1$$

この写像を利用し, 定義 4.1 で定義した Clifford 代数の代数的自己同型写像の Grassmann 射影に対しての parity 項を用いて,  $\mathbb{Z}_2$ -graded Poisson 括弧の odd 変形は次式で得られる.

**定理 6.1.** 任意の Clifford 代数の代数的自己同型写像  $\psi$  に対して,

$$: \{, \} :_\psi = \exp \left( \delta_{\Pi(\varphi_{\psi_E})} \right) \{, \}$$

により,  $\mathbb{Z}_2$ -graded Poisson 括弧の代数的自己同型写像による表示が与えられる.

[29] の例で示していた式は

**例 6.1.**  $\varphi_\eta(e_i) = e_i + e_i \wedge \eta$  に対して ( $\eta \in \left(\Lambda_1^{2n}(\langle e_i \rangle) [[\nu]], \wedge\right)$  とおく)

$$\sum_{ij=1}^{2n} \overleftarrow{\partial_{\varphi_i}} \delta_{ij+n} \overrightarrow{\partial_{\varphi_j}} = \sum_{ij=1}^{2n} \overleftarrow{\partial_{e_i}} \left( \delta_{ij+n} - (1 + \eta) \{e_{ij}, \eta\} - \sum_{k=1}^{2n} \{e_{k+n}, \eta\} \{e_{ijk}, \eta\} \right) \overrightarrow{\partial_{e_j}}$$

であった. ここで右辺を展開して各項の意味を考えると

$$\underbrace{\sum_{ij} \overleftarrow{\partial}_{e_i} \delta_{ij+n} \overrightarrow{\partial}_j}_{\mathbb{Z}_2\text{-graded Poisson}} - \underbrace{\sum_{ij} \overleftarrow{\partial}_{e_i} \{e_{ij}, \eta\} \overrightarrow{\partial}_j}_{\text{Gerstenhaber part}} - \underbrace{\sum_{ij} \overleftarrow{\partial}_{e_i} (\deg \eta + 1) \eta \{e_{ij}, \eta\} \overrightarrow{\partial}_j}_{\text{obstruction}} - \underbrace{\sum_{ij} \overleftarrow{\partial}_{e_i} e_{ij} \{\eta, \eta\} \overrightarrow{\partial}_j}_{\text{Clifford automorphisms}}$$

となる. この変換式を得るためには, Grassmann 代数の元を成分に持つ行列の計算が必要になる.

odd 元に適当な条件をつけると次の命題が成立する.

**命題 6.1.**  $\eta \in G_1, \eta \wedge \{\eta, *\} = 0$  のとき

$$\sum_{ij=1}^{2n} \overleftarrow{\partial}_{\varphi_i} \delta_{ij+n} \overrightarrow{\partial}_{\varphi_j} = \underbrace{\sum_{ij} \overleftarrow{\partial}_{e_i} \delta_{ij+n} \overrightarrow{\partial}_j}_{\mathbb{Z}_2\text{-graded Poisson}} - \underbrace{\sum_{ij} \overleftarrow{\partial}_{e_i} \{e_{ij}, \eta\} \overrightarrow{\partial}_j}_{\text{Gerstenhaber part}}$$

である.  $\sum_{ij} \overleftarrow{\partial}_{e_i} \{e_{ij}, \eta\} \overrightarrow{\partial}_j$  は Gerstenhaber 代数の性質を持つ (Poisson pencil のような括弧式になっている).

odd deformation による “ずれ” がどのような形で残っていくのかを以下の表にまとめた.

	$-\sum_{ij=1}^{2n} \overleftarrow{\partial}_i \{c_{ij}, \eta\} \overrightarrow{\partial}_j$	$-\sum_{ijk=1}^{2n} \overleftarrow{\partial}_i K \eta \wedge \{c_{ij}, \eta\} \overrightarrow{\partial}_j$	$-\sum_{ijk=1}^{2n} \overleftarrow{\partial}_i c_{ij} \wedge \{\eta, \eta\} \overrightarrow{\partial}_j$
Grassmann automorphisms	*	*	*
Clifford automorphisms $\{\eta, \eta\} = 0$	*	*	0
$\eta \wedge \{\eta, \cdot\} = 0, \tilde{\omega} \wedge \{\tilde{\omega}, \cdot\} \neq 0$	*	$0, [[f, [g, h]_-]_- \neq 0$	0
$\eta \wedge \{\eta, \cdot\} = 0, \tilde{\omega} \wedge \{\tilde{\omega}, \cdot\} = 0$	*	$0, [[f, [g, h]_-]_- = 0$	0
$\mathbb{Z}_2$ -graded parity preserving	0	0	0

ただし  $K = e_k \overrightarrow{\partial}_k + 1$  とおいた.

この等式については [30] における antibracket についての持つ代数的性質に関する記述や supersymmetry よりも広い対称性を持つことを提唱していた [15] における metasympetry に関する記述が念頭にあった. 文献 [14]~[17] や最近の [27] にある mixed bracket との関係を理解することは興味のある問題である.

証明:  $\{f, g\}_G = \sum_{ij=1}^{2n} \overleftarrow{\partial}_i \{e_{ij}, \eta\} \overrightarrow{\partial}_j$  とし, まず Gerstenhaber 代数の skew 性と Leibniz 則の証明を行う. 記号を簡略化するために  $p_{ij} = \{e_{ij}, \eta\}$  とおく. 歪対称性  $p_{ij} = -p_{ji}$  が成り立つ. Gerstenhaber の意味での skew 性は

$$\begin{aligned} \{f, g\}_G &= \sum_{ij=1}^{2n} f \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} \overrightarrow{\partial}_j g \\ &= \sum_{i<j} \left( f \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} \overrightarrow{\partial}_j g + f \overleftarrow{\partial}_j (-p_{ij}) \overrightarrow{\partial}_i g \right) \\ &= \sum_{i<j} (-1)^{f+1} (-1)^{(f+1)(g+1)} (p_{ij}) \left( \overrightarrow{\partial}_j g f \overleftarrow{\partial}_i - \overrightarrow{\partial}_i g f \overleftarrow{\partial}_j \right) \\ &= \sum_{i<j} (-1)^{f+1} (-1)^{(f+1)(g+1)} (-1)^{g+1} \\ &\quad \left( (-1)^{g+1} (-1)^{f+1} g \overleftarrow{\partial}_j (-p_{ji}) \overrightarrow{\partial}_i f - (-1)^{g+1} (-1)^{f+1} g \overleftarrow{\partial}_i (p_{ij}) \overrightarrow{\partial}_j f \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i < j} (-1)^{(f+1)(g+1)} \left( g \overleftarrow{\partial}_j (-p_{ji}) \overrightarrow{\partial}_i f - g \overleftarrow{\partial}_i (p_{ij}) \overrightarrow{\partial}_j f \right) \\
&= (-1)^{(f+1)(g+1)+1} \{g, f\}_G
\end{aligned}$$

Leipniz 則に関しては

$$\begin{aligned}
\{f, g \wedge h\}_G &= \sum_{ij=1}^{2n} f \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} \overrightarrow{\partial}_j (g \wedge h) \\
&= \sum_{ij=1}^{2n} f \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} \overrightarrow{\partial}_j g \wedge h + (-1)^g \sum_{ij=1}^{2n} f \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} g \wedge \overrightarrow{\partial}_j h \\
&= \sum_{ij=1}^{2n} f \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} \overrightarrow{\partial}_j g \wedge h + (-1)^{(f+1)g} (-1)^g (-1)^g g \wedge \sum_{ij=1}^{2n} f \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} \wedge \overrightarrow{\partial}_j h \\
&= \{f, g\}_G \wedge h + (-1)^{(f+1)g} g \wedge \{f, h\}_G
\end{aligned}$$

で確認できる.  $\mathbb{R}$ -bilinear は明らか. Jacobi identity の成立を以下に調べる. 次の補題が成り立つ.

**補題 6.1.**  $\eta \in G_1$  が量子化条件  $\{\eta, \eta\} = 0$  を満たすものとする.  $p_{ij} = \{e_{ij}, \eta\}$  とおくと  $p_{ij} \wedge \overrightarrow{\partial}_j p_{kl} + p_{kj} \wedge \overrightarrow{\partial}_j p_{li} + p_{lj} \wedge \overrightarrow{\partial}_j p_{ik} = 0$  が成り立つ.

証明：直接的な計算で示す.

$$\begin{aligned}
&p_{ij} \wedge \overrightarrow{\partial}_j p_{kl} + p_{kj} \wedge \overrightarrow{\partial}_j p_{li} + p_{lj} \wedge \overrightarrow{\partial}_j p_{ik} \\
&= \{e_{ij}, \eta\} \wedge \overrightarrow{\partial}_j \{e_{kl}, \eta\} + \{e_{kj}, \eta\} \wedge \overrightarrow{\partial}_j \{e_{li}, \eta\} + \{e_{lj}, \eta\} \wedge \overrightarrow{\partial}_j \{e_{ik}, \eta\} \\
&= (e_i \wedge \{e_j, \eta\} - e_j \wedge \{e_i, \eta\}) \wedge \overrightarrow{\partial}_j \{e_{kl}, \eta\} + (e_k \wedge \{e_j, \eta\} - e_j \wedge \{e_k, \eta\}) \wedge \overrightarrow{\partial}_j \{e_{li}, \eta\} \\
&\quad + (e_l \wedge \{e_j, \eta\} - e_j \wedge \{e_l, \eta\}) \wedge \overrightarrow{\partial}_j \{e_{ik}, \eta\} \\
&= \left( e_i \wedge \eta \overleftarrow{\partial}_{j+n} - e_j \wedge \overrightarrow{\partial}_{i+n} \eta \right) \wedge \overrightarrow{\partial}_j \{e_{kl}, \eta\} + \left( e_k \wedge \eta \overleftarrow{\partial}_{j+n} - e_j \wedge \overrightarrow{\partial}_{k+n} \eta \right) \wedge \overrightarrow{\partial}_j \{e_{li}, \eta\} \\
&\quad + \left( e_l \wedge \eta \overleftarrow{\partial}_{j+n} - e_j \wedge \overrightarrow{\partial}_{l+n} \eta \right) \wedge \overrightarrow{\partial}_j \{e_{ik}, \eta\} \\
&= e_i \wedge \{\eta, \{e_{kl}, \eta\}\} - e_j \wedge \overrightarrow{\partial}_{i+n} \eta \wedge \overrightarrow{\partial}_j \{e_{kl}, \eta\} + e_k \wedge \{\eta, \{e_{li}, \eta\}\} - e_j \wedge \overrightarrow{\partial}_{k+n} \eta \wedge \overrightarrow{\partial}_j \{e_{li}, \eta\} \\
&\quad + e_l \wedge \{\eta, \{e_{ik}, \eta\}\} - e_j \wedge \overrightarrow{\partial}_{l+n} \eta \wedge \overrightarrow{\partial}_j \{e_{ik}, \eta\} \\
&= -e_j \wedge \overrightarrow{\partial}_j \wedge \left( \overrightarrow{\partial}_{i+n} \eta \wedge \{e_{kl}, \eta\} + \overrightarrow{\partial}_{k+n} \eta \wedge \{e_{li}, \eta\} + \overrightarrow{\partial}_{l+n} \eta \wedge \{e_{ik}, \eta\} \right) \\
&= -\{e_i, \eta\} \wedge e_j \wedge \overrightarrow{\partial}_j \left( (e_k \wedge \{e_l, \eta\} - e_l \wedge \{e_k, \eta\}) \right) \\
&\quad - \{e_k, \eta\} \wedge e_j \wedge \overrightarrow{\partial}_j \left( (e_l \wedge \{e_i, \eta\} - e_i \wedge \{e_l, \eta\}) \right) \\
&\quad - \{e_l, \eta\} \wedge e_j \wedge \overrightarrow{\partial}_j \left( (e_i \wedge \{e_k, \eta\} - e_k \wedge \{e_i, \eta\}) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

この補題を利用すると

$$\begin{aligned}
&\{f, \{g, h\}_G\}_G \\
&= \sum_{ij=1}^{2n} f \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} \overrightarrow{\partial}_j \left( \sum_{kl=1}^{2n} g \overleftarrow{\partial}_k p_{kl} \overrightarrow{\partial}_l h \right) \\
&= \sum_{ijkl=1}^{2n} \left( f \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} \overrightarrow{\partial}_j g \overleftarrow{\partial}_k p_{kl} \overrightarrow{\partial}_l h + (-1)^{g+1} f \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} g \overleftarrow{\partial}_k \overrightarrow{\partial}_j p_{kl} \overrightarrow{\partial}_l h + (-1)^g f \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} g \overleftarrow{\partial}_k p_{kl} \overrightarrow{\partial}_j \overrightarrow{\partial}_l h \right)
\end{aligned}$$

が成立するので

$$\begin{aligned}
& \sum_{f,g,h:\text{cyclic}} (-1)^{(f+1)(h+1)} \{f, \{g, h\}_G\}_G \\
= & \underbrace{\sum_{ijkl=1}^{2n} (-1)^{fh+f+h+1} f \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} \overrightarrow{\partial}_j g \overleftarrow{\partial}_k p_{kl} \overrightarrow{\partial}_l h}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\sum_{ijkl=1}^{2n} (-1)^{fh+f+h+1+g+1} f \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} g \overleftarrow{\partial}_k \overrightarrow{\partial}_j p_{kl} \overrightarrow{\partial}_l h}_{\star} \\
& + \underbrace{\sum_{ijkl=1}^{2n} (-1)^{fh+f+h+1+g} f \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} g \overleftarrow{\partial}_k p_{kl} \overrightarrow{\partial}_j \overrightarrow{\partial}_l h}_{\textcircled{2}} \\
& + \underbrace{\sum_{ijkl=1}^{2n} (-1)^{gf+g+f+1} g \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} \overrightarrow{\partial}_j h \overleftarrow{\partial}_k p_{kl} \overrightarrow{\partial}_l f}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\sum_{ijkl=1}^{2n} (-1)^{gf+g+f+1+h+1} g \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} h \overleftarrow{\partial}_k \overrightarrow{\partial}_j p_{kl} \overrightarrow{\partial}_l f}_{\star} \\
& + \underbrace{\sum_{ijkl=1}^{2n} (-1)^{gf+g+f+1+h} g \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} h \overleftarrow{\partial}_k p_{kl} \overrightarrow{\partial}_j \overrightarrow{\partial}_l f}_{\textcircled{3}} \\
& + \underbrace{\sum_{ijkl=1}^{2n} (-1)^{hg+h+g+1} h \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} \overrightarrow{\partial}_j f \overleftarrow{\partial}_k p_{kl} \overrightarrow{\partial}_l g}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\sum_{ijkl=1}^{2n} (-1)^{hg+h+g+1+f+1} h \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} f \overleftarrow{\partial}_k \overrightarrow{\partial}_j p_{kl} \overrightarrow{\partial}_l g}_{\star} \\
& + \underbrace{\sum_{ijkl=1}^{2n} (-1)^{hg+h+g+1+f} h \overleftarrow{\partial}_i p_{ij} f \overleftarrow{\partial}_k p_{kl} \overrightarrow{\partial}_j \overrightarrow{\partial}_l g}_{\textcircled{1}} \\
= & 0
\end{aligned}$$

が得られる (①,②,③の部分が打ち消し合う.★の部分は先の補題により 0).

以上の議論によって, 命題の主張が証明された.

## 7 Jacobi identity の $\mathbb{Z}_2$ -graded shift duality, Transposed like な関係式

$\mathbb{Z}_2$ -graded Poisson 括弧について Jacobi identity が成立する.

$$\sum_{\text{cyclic}:f,g,h} (-1)^{fh} \{f, \{g, h\}\} = 0$$

特に  $f = g = \eta$  ( $\eta$  は odd 元) とおくと

$$(-1)^{1 \cdot h} \{\eta, \{\eta, h\}\} + (-1)^{1 \cdot 1} \{\eta, \{h, \eta\}\} + (-1)^{h \cdot 1} \{h, \{\eta, \eta\}\} = 0$$

であり, 整理整頓すると

$$\{\eta, \{\eta, h\}\} = -\frac{1}{2} \{h, \{\eta, \eta\}\}$$

である. このことから, Clifford 代数の代数的自己同型になるための quantization condition  $\{\eta, \eta\} = 0$  が成り立てば

$$\{\eta, \{\eta, \cdot\}\} = 0$$

がいえ。  $\mathbb{Z}_2$ -graded shift symmetry といえるような関係式が成り立つというならば、当然 Gerstenhaber 代数側でも同様のことが成り立ってほしい。これを以下に確かめる。

Gerstenhaber 代数版の Jacobi identity は

$$\sum_{cyclic:f,g,h} (-1)^{(f+1)(h+1)} \{f, \{g, h\}_G\}_G = 0$$

特に  $f = g = \omega$  ( $\omega$  は even 元) とおくと

$$(-1)^{(0+1)(h+1)} \{\omega, \{\omega, h\}_G\}_G + (-1)^{(0+1)(0+1)} \{\omega, \{h, \omega\}_G\}_G + (-1)^{(h+1)(0+1)} \{h, \{\omega, \omega\}_G\}_G = 0$$

である。先と同様に整理整頓すれば

$$\{\omega, \{\omega, h\}_G\}_G = -\frac{1}{2} \{h, \{\omega, \omega\}_G\}_G$$

である。右辺をみると Gerstenhaber 代数における quantization condition に対応するのは  $\{\omega, \omega\}_G = 0$  であると推測される。この条件が成り立てば

$$\{\omega, \{\omega, \cdot\}_G\}_G = 0$$

が成り立つ (括弧式の入れ替えと odd 元と even 元の入れ替えがきれいに対応している)。一般には  $\{\omega, \omega\}_G \neq 0$  であるが、我々が考えている  $\{f, g\}_G = \sum_{ij=1}^{2n} \overleftarrow{\partial}_i \{e_{ij}, \eta\} \overrightarrow{\partial}_j$  であれば、

$$\begin{aligned} \{\omega, \omega\}_G &= \sum_{ij=1}^{2n} \omega \overleftarrow{\partial}_i \{e_{ij}, \eta\} \overrightarrow{\partial}_j \omega \\ &= (\deg \omega) \omega \wedge \{\eta, \omega\} - (\deg \omega) \{\omega, \eta\} \wedge \omega \\ &= 2 (\deg \omega) \{\eta, \omega\} \wedge \omega \end{aligned}$$

が成り立つ。これより  $\omega \wedge \{\omega, \cdot\} = 0$ , または  $\{\eta, \omega\} = 0$  が成立していれば  $\{\omega, \omega\}_G = 0$  が成り立つ。

最近, Transposed Poisson algebra についての研究が進められている ([1], [2])。大雑把に言えば、代数における積とその上で定義されている Poisson 括弧による積の役割を交換する理論である。そこでこの考え方を拡大解釈し、代数上の二項演算に対して、お互いの演算の役割を入れ替える関係があるときに transposed であるとする、 $\{\eta, \cdot\}$  が  $\{\cdot, \cdot\}_G$  の、 $\{\eta, \cdot\}_G$  が  $\{\cdot, \cdot\}$  の微分の性質等を持つか調べてみると次の等式が成り立つ。

**命題 7.1.** 微分に関する次の計算公式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \{\eta, \{f, g\}_G\} &= \frac{\deg f}{\deg \eta + \deg f - 2} \{\{\eta, f\}, g\}_G + (-1)^{f+1} \frac{\deg g}{\deg \eta + \deg g - 2} \{f, \{\eta, g\}_G\} \\ \eta \in G_1[1, nil] \text{ のとき } \{ \eta, \{f, g\}_G \} &= \{ \{\eta, f\}_G, g \} + \{ f, \{\eta, g\}_G \} \end{aligned}$$

証明：最初の等式については

$$\begin{aligned} \{\eta, \{f, g\}_G\} &= \eta \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \left( \sum_{ij=1}^{2n} f \overleftarrow{\partial}_i \{e_{ij}, \eta\} \overrightarrow{\partial}_j g \right) \\ &= \sum_{ij=1}^{2n} \eta \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} (\deg f) f \wedge \{\eta, g\} + \sum_{ij=1}^{2n} (-1)^f (\deg f) f \wedge \underbrace{\{\eta, \{\eta, g\}_G\}}_{=0} \\ &\quad - \sum_{ij=1}^{2n} \underbrace{\{\eta, \{f, \eta\}_G\}}_{=0} \wedge (\deg g) g - \sum_{ij=1}^{2n} (-1)^{f+1} \{f, \eta\} \wedge \{\eta, (\deg g) g\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\{\eta, f\}, g\}_G &= (\deg f + \deg \eta - 2) \{\eta, f\} \wedge \{\eta, g\} - \{\{\eta, f\}, \eta\} \wedge (\deg g) g \\
&= (\deg f + \deg \eta - 2) \{\eta, f\} \wedge \{\eta, g\} \\
\{f, \{\eta, g\}\}_G &= (\deg f) f \wedge \{\eta, \{\eta, g\}\} - \{f, \eta\} \wedge (\deg \eta + \deg g - 2) \{\eta, g\} \\
&= -(\deg \eta + \deg g - 2) \{f, \eta\} \wedge \{\eta, g\}
\end{aligned}$$

からいえる。後半の式については

$$\begin{aligned}
\{\eta, \{f, g\}\}_G &= (\deg \eta) \eta \wedge \{\eta, \{f, g\}\} - \underbrace{\{\eta, \eta\}}_{=0} \wedge (\deg f + \deg g - 2) \{f, g\} \\
&= (\deg \eta) \eta \wedge \{\eta, \{f, g\}\} \\
\{\{\eta, f\}_G, g\} &= (\deg \eta) \eta \wedge \{\{\eta, f\}, g\} + (\deg \eta) (-1)^{f+1} \{\eta, f\} \wedge \{\eta, g\} \\
&= (\deg \eta) \eta \wedge \{\{\eta, f\}, g\} + (\deg \eta) \{f, \eta\} \wedge \{\eta, g\} \\
\{f, \{\eta, g\}_G\} &= \{f, (\deg \eta) \eta \wedge \{\eta, g\} - \{\eta, \eta\} \wedge (\deg g) g\} \\
&= (\deg \eta) \{f, \eta\} \wedge \{\eta, g\} + (\deg \eta) \eta \wedge (-1)^f \{f, \{\eta, g\}\}
\end{aligned}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}
&\{\eta, \{f, g\}\}_G - \{\{\eta, f\}_G, g\} - \{f, \{\eta, g\}_G\} \\
&= (\deg \eta) \eta \wedge \left( \{\eta, \{f, g\}\} - \{\{\eta, f\}, g\} - (-1)^f \{f, \{\eta, g\}\} \right) - 2(\deg \eta) \{f, \eta\} \wedge \{\eta, g\} \\
&= -(\deg \eta) \eta \wedge \underbrace{\sum_{\text{cyclic}} (-1)^{\eta f} \{\eta, \{f, g\}\}}_{\text{Jacobi identity}} - 2(\deg \eta) \{f, \eta\} \wedge \{\eta, g\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

を得る。

次に、 $\{\omega, \cdot\}$  が  $\{\cdot, \cdot\}_G$  の  $\{\omega, \cdot\}_G$  が  $\{\cdot, \cdot\}$  の微分の性質を持つかどうかを調べる。

$$\begin{aligned}
\{\omega, \{f, g\}_G\} &= \{\omega, (\deg f) f \wedge \{\eta, g\} - \{f, \eta\} \wedge (\deg g) g\} \\
&= (\deg f) \{\omega, f \wedge \{\eta, g\}\} - (\deg g) \{\omega, \{f, \eta\} \wedge g\} \\
&= (\deg f) \{\omega, f\} \wedge \{\eta, g\} + (\deg f) f \wedge \{\omega, \{\eta, g\}\} \\
&\quad - (\deg g) \{\omega, \{f, \eta\}\} \wedge g - (\deg g) \{f, \eta\} \wedge \{\omega, g\} \\
\{\{\omega, f\}, g\}_G &= (\deg \omega + \deg f - 2) \{\omega, f\} \wedge \{\eta, g\} - \{\{\omega, f\}, \eta\} \wedge (\deg g) g \\
\{f, \{\omega, g\}\}_G &= (\deg f) f \wedge \{\eta, \{\omega, g\}\} - \{f, \eta\} \wedge (\deg \omega + \deg g - 2) \{\omega, g\}
\end{aligned}$$

と計算される。

**補題 7.1.** odd 元  $\eta$ , even 元  $\omega$  に対して  $\{f, \eta\} \wedge \{\omega, g\} + \{f, \omega\} \wedge \{\eta, g\} = 0$  ( $\forall f, g \in G$ )  $\Rightarrow \{\eta, \omega\} = 0$

証明：  $f = e_{p+n}, g = e_p$  とし  $p = 1, 2, \dots, n$  までの総和を取ればよい。

Jacobi 恒等式より、 $\{\eta, \omega\} = 0$  と  $\{\omega, \{\eta, \cdot\}\} - \{\eta, \{\omega, \cdot\}\} = 0$  であることは同値であるから、次の命題を得る。

**命題 7.2.** odd 元  $\eta$ , even 元  $\omega$  に対して  $\{f, \eta\} \wedge \{\omega, g\} + \{f, \omega\} \wedge \{\eta, g\} = 0$  ならば、任意の  $f, g \in G$  に対して

$$\{\omega, \{f, g\}_G\} = \{\{\omega, f\}, g\}_G + \{f, \{\omega, g\}\}_G$$

が成り立つ。

次の補題が成立する.

**補題 7.2.** 任意の  $f, g \in G$ , odd 元  $\eta$ , even 元  $\omega$  に対して  $\{f, \eta\} \wedge \{\omega, g\} - \{f, \omega\} \wedge \{\eta, g\} = 0 \Rightarrow \{\eta, \omega\} = 0$

証明:  $f = e_{p+n}, g = e_p$  とすると  $\eta \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_{p+n} \omega = 0$  が成り立つので  $p = 1, 2, \dots, 2n$  までの総和を取ればよい.

上記の補題と

$$\begin{aligned} \{\omega, \{f, g\}\}_G &= (\deg \omega) \omega \wedge \{\eta, \{f, g\}\} - \{\omega, \eta\} \wedge (\deg f + \deg g - 2) \{f, g\} \\ \{\{\omega, f\}_G, g\} &= \{(\deg \omega) \omega \wedge \{\eta, f\} - \{\omega, \eta\} \wedge (\deg f) f, g\} \\ &= (\deg \omega) \omega \wedge \{\{\eta, f\}, g\} + (\deg \omega) \{\eta, f\} \wedge \{\omega, g\} \\ &\quad - (\deg f) \{\omega, \eta\} \wedge \{f, g\} - (-1)^f (\deg f) f \wedge \{\{\omega, \eta\}, g\} \\ \{f, \{\omega, g\}_G\} &= \{f, (\deg \omega) \omega \wedge \{\eta, g\} - \{\omega, \eta\} \wedge (\deg g) g\} \\ &= (\deg \omega) \{f, \omega\} \wedge \{\eta, g\} + (\deg \omega) \{f, \{\eta, g\}\} \wedge \omega \\ &\quad - (\deg g) \{f, \{\omega, \eta\}\} \wedge g - (-1)^g (\deg g) \{f, g\} \wedge \{\omega, \eta\} \end{aligned}$$

を用いて  $\{\omega, \{f, g\}\}_G - \{\{\omega, f\}_G, g\} - (-1)^f \{f, \{\omega, g\}_G\}$  の計算を実行すれば, 先と同様な議論により次の命題を得る.

**命題 7.3.** odd 元  $\eta$ , even 元  $\omega$  が  $\{f, \eta\} \wedge \{\omega, g\} + \{f, \omega\} \wedge \{\eta, g\} = 0 (\forall f, g \in G)$  を満たすならば, 任意の  $f, g \in G$  に対して

$$\{\omega, \{f, g\}\}_G = \{\{\omega, f\}_G, g\} + (-1)^f \{f, \{\omega, g\}_G\}$$

が成り立つ.

以上の議論から我々が見つけた Gerstenhaber 括弧は  $\mathbb{Z}_2$ -graded Poisson 括弧との間に transposed like な関係式が成立していて  $\mathbb{Z}_2$ -graded shift の観点から眺めると非常に興味深い. これは [2] にある open problem 39 に関わる内容である.

**注 7.1.** 上記では, 二つの括弧式に関しての transposed like な関係式について議論をしたが, 純粋に代数的な観点からは Gerstenhaber 括弧に対しての transposed Poisson algebra を考える場面では, 積は super commutative ではなくて super skew commutative な積を用いた代数で考えればよい (用語の定義は [17] 参照). 成り立つべき関係式は [1] の内容について  $\mathbb{Z}_2$ -grading を 1 だけ shift して関係式を作り直すことで直ちに得られる.

## 8 謝辞

This work was supported by the Ressearch Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

長年に渡り, 大森英樹先生には温かい励ましとご助言を頂きました. また吉岡朗先生, 慶應義塾大学の宮崎直哉氏には有益なコメントを頂きました. この場をお借りしてお礼を申し上げます. 今回, 発表の機会を与えて下さった, 龍谷大学の佐々野詠淑先生には沢山のご厚意を賜りました. この場をかりてお礼申し上げます.

## 参考文献

- [1] V.Abramov and O.Liivapuu, *Transposed Poisson superalgebra*.arxiv:2311.02604(2023) .
- [2] P.D.Beites , B.L.Macedo , F.I.Kaygorodov, *Transposed Poisson structures*. arXiv:2207.00281
- [3] F.A.Berezin.*Introduction to superanalysis*,  
Math Phys and Applied Math.Vol.9,D.Reidel Publ Comp.Dordrecht-Boston-Lancaster-Tokyo(1987).
- [4] F.A.Berezin and M.S.Marinov.*Particle spin dynamics as Grassmann variant classical mechanics*.  
Ann.Phys.104(1977), pp336-362.
- [5] F.Bayen,M.Flato,C.Fronsdal,A.Lichnerowicz and D.Sternheimer, *Deformation theory and quantization I*.Ann.Phys.111(1978),pp61-110.
- [6] F.Bayen,M.Flato,C.Fronsdal,A.Lichnerowicz and D.Sternheimer.*Deformation theory and quantization 2*. Ann.Phys.111(1978),pp111-151.
- [7] F.Cantrijn and Ibort.*Introduction to Poisson supermanifolds*.  
Diff.Geom.and its Appli.1(1991),pp133-152.
- [8] R.Casalbuoni.*On the quantization of systems with anticommuting variables*. Il Nuovo Cimento Vol33 A N.1(1976),pp.115-125.
- [9] B.S.DeWitt *Supermanifolds*. Cambridge Univ.Press London(1984)
- [10] A.Inoue and Y.Maeda.*Foundations of Calculus on super Euclidean space  $R^{m|n}$  based on a Fréchet-Grassmann algebra*, Kodai.Math.J.14(1991),pp.72-112.
- [11] S.MacLane.*Homology*. Berlin Springer(1963)
- [12] N.Cantarini and V.G.Kac. *Classification of linearly compact simple Jordan and generalized Poisson superalgebras*. arXiv:math.QA/0608390v1 15 Aug 2006
- [13] D.A.Leites.*Introduction to the Theory of Supermanifolds*. Russian Math.surveys 35:1(1980),pp1-64.
- [14] D.A.Leites.*Selected problems of supermanifold theory*.  
Duke Math.J.Vol.54(1987),pp-649-656.
- [15] D.A.Leites,V.Serganova.*Metasymmetry and Volichenko algebras*, Phys.letters B 252.
- [16] D.A.Leites.*The Schrodinger equation,Supplement3,Quantization and supermanifolds*.  
Kluwer Dordrecht(1991)
- [17] D.A.Leites.*Odd Parameters in geometry*. arXiv:2210.17096
- [18] H.Omori,Y.Maeda and A.Yoshioka.*Weyl manifolds and deformation quantization*. Adv.in Math.85(1991), pp224-255.
- [19] H.Omori,Y.Maeda and A.Yoshioka.*A construction of a deformation quantization of a Poisson algebras*. Proceedings of Workshop on Gem.and its Appli. in Honor of Morio Obata,World Scientific(1993),pp.201-218.
- [20] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Deformation of expressions for elements of algebras (I), (Jacobi's theta functions and \* -exponential functions)*. arXiv:1104.2109
- [21] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Deformation of expressions for elements of algebras (II), -(Weyl algebra of 2m-generators)*. arXiv:1105.1218
- [22] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Deformation of expressions for elements of algebras*

- bras (III)*, *Generic product formula for \*-exponentials of quadratic forms*. arXiv:1107.2474
- [23] 大森 英樹, 一般力学系と場の幾何学, 裳華房 (1991)
  - [24] 大森 英樹, 数学の中の物理学, 東京大学出版会 (2004)
  - [25] 大森 英樹, 演算子的に見た微分・積分の代数 I 表示変形論, 導入編, 現代数学社 (2018)
  - [26] 大森 英樹, 演算子的に見た微分・積分の代数 II 表示変形論, 応用編, 現代数学社 (2019)
  - [27] F.Toppan: *Volichenko-type metasymmetry of braided Majorana qubits*. arXiv:2406.0087
  - [28] 多田 和功, *Clifford 代数の無限小自己同型写像の準古典化* (1996), 東京理科大学修士論文
  - [29] 多田 和功,  $\mathbb{Z}_2$ -graded parity 非保存な Poisson 括弧 (2024) 北海道大学講究録 186 : 第 20 回数学総合若手研究集会 : 数学の交叉点
  - [30] E.Witten ,*A note on the antibracket formalism*.Mod.Phys.Lett.A 5 (1990) 487.
  - [31] K.Yagi. *Super differential calculus*. Osaka J.Math.25(1988),pp243-257.