

一般化フーリエ変換と Dunkl 作用素の Smooth Analogue について

東京大学大学院数理科学研究科 青山天馬
Temma Aoyama

Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo

Abstract

Segal-Shale-Weil 表現の $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times O(N)$ への制限として得られる表現の変形を考えることにより、フーリエ変換、偏微分、平行移動作用素のある種の変形が得られる。本稿では、これらに関するいくつかの計算結果を報告する。特にこれらが、普通の意味でのフーリエ変換、偏微分、平行移動作用素に類する性質を持っていること、一般化フーリエ変換の積分核が、通常のフーリエ積分核に2変数超幾何関数で表される式をかけた形をしていること、偏微分作用素の一般化にあたるものが、通常の偏微分に球面上の積分作用素を足したような形をしていて、Dunkl 作用素の smooth analogue になっていること、 $N = 1$ の場合に、一般化平行移動作用素が、普通の意味の平行移動で記述される項と、Legendre 関数を用いた積分作用素で書かれた項の和になることなどを紹介する。

1 序

N を自然数、 $b > -N/2$ を実数 とする。本稿の目的は、 \mathbb{R}^N 上のフーリエ変換、偏微分、平行移動作用素のある1パラメータ変形 $\mathcal{F}_b, D_{b,n}$ ($n = 1, \dots, N$), $e^{tD_{b,n}}$ ($n = 1, \dots, N$) の性質を報告することである。概要は以下の通りである;

- $b = 0$ の時、 $\mathcal{F}_b, D_{b,n}$ ($n = 1, \dots, N$), $e^{tD_{b,n}}$ ($n = 1, \dots, N$) は普通の意味のフーリエ変換、偏微分、平行移動作用素と一致する。
- \mathcal{F}_b の積分核は、2変数の超幾何関数を用いて具体的にかける。(Theorem 5)
- \mathcal{F}_b の反転公式が成り立つ。(Theorem 3)
- $D_{b,n}$ ($n = 1, \dots, N$) は、 $O(N)$ を連続鏡映群だとみなした、Dunkl の Differential-Difference operator [Dun89] の Smooth analogue になる。(Theorem 7)
- $D_{b,n}$ ($n = 1, \dots, N$) は互いに可換である。(Corollary 3)
- \mathcal{F}_b は、 x_n ($n = 1, \dots, N$) と $D_{b,n}$ ($n = 1, \dots, N$) を入れ替える。(Theorem 6)
- $N = 1$ のとき、 e^{tD_b} は、普通の意味の平行移動作用素と Legendre 関数を用いた積分作用素の和として書ける。(Theorem 9)

変形の手法は、Ben Saïd–Kobayashi–Ørsted [BKØ09, BKØ12] で論じられている (k, a) 一般化 Laguerre 半群論・ (k, a) 一般化フーリエ解析論に倣った。これは、一つの見方として、Segal-Shale-Weil 表現の $Mp(N, \mathbb{R}) \downarrow \widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times O(N)$ という制限に関する離散分岐則に注目した変形、ということができる。Segal-Shale-Weil 表現の $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times O(N)$ への制限は

$$L^2(\mathbb{R}^N) \cong \sum_{m=0}^{\infty} \oplus \pi_{\frac{N+2m-2}{2}} \boxtimes \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^N)$$

のように既約分解される。ここで、 π_λ は $\lambda+1$ は Lowest weight に持つ Lowest weight 表現、 $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^N)$ は m 次 spherical harmonics の空間である。本稿の結果は、この $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times O(N)$ の表現の変形であって、

$$L^2(\mathbb{R}^N) \cong \sum_{m=0}^{\infty} \oplus \pi_{b+\frac{N+2m-2}{2}} \boxtimes \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^N)$$

と既約分解されるものを基軸とした計算によって得られる。

2 フーリエ変換の一般化と \mathfrak{sl}_2 -triple

本説では、フーリエ変換のある 1 パラメータ変形について考える。変形の手法は、Segal-Shale-Weil 表現の $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times O(N)$ への制限として得られる表現を変形するというものであり、Ben Saïd–Kobayashi–Ørsted [BKØ09, BKØ12] で論じられている (k, a) 一般化 Laguerre 半群論・ (k, a) 一般化フーリエ解析論に倣っている。

2.1 K -finite vectors の構成

本小節では、 $L^2(\mathbb{R}^N)$ の直交基底の構成を行う。この基底は Subsection 2.2 で構成される $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times O(N)$ の表現の K -finite vectors の空間の基底を与える。

$L_\ell^{(\alpha)}(t) := \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(-1)^k \Gamma(\ell+\alpha+1) t^k}{\Gamma(\alpha+k+1)(\ell-k)! k!}$ ($\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \alpha > -1$) を Laguerre 多項式とする。

$\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^N)$ を m 次調和多項式の空間とする。 $\bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(S^{N-1}) : p \mapsto p|_{S^{N-1}}$ が像が稠密で単射な線形写像で、 $m \neq m'$ のとき $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^N) \perp_{L^2(S^{N-1})} \mathcal{H}^{m'}(\mathbb{R}^N)$ であるという事実に基づき、 $p_j(x)$ ($N \geq 2$ のとき $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, N = 1$ のとき $j = 0, 1$) を斉次調和多項式の列であって、 S^{N-1} 上の関数列として完全正規直交系を成し、 $\deg(p_j) \leq \deg(p_{j+1})$ となっているようなものとする。 $m_j := \deg(p_j)$ とする。

$b > -\frac{N}{2}$ とする。 $\ell, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、 $\Phi_{b,\ell,j}(x)$ という関数を以下のように定義する；

$$\Phi_{b,\ell,j}(x) := |x|^b e^{-\frac{1}{2}|x|^2} L_\ell^{(b+\lambda_{N,m_j})}(|x|^2) p_j(x).$$

ここで、 $\lambda_{N,m} := \frac{N-2}{2} + m$ である。また、文脈に応じて、 $p(x) \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^N)$ に対して、

$$\Phi_{b,\ell,p}(x) := |x|^b e^{-\frac{1}{2}|x|^2} L_\ell^{(b+\lambda_{N,m})}(|x|^2) p(x)$$

という記法も用いることにする。 $W_{b,alg} := \bigoplus_{\ell,j} \mathbb{C} \Phi_{b,\ell,j}(x) (\subset L^2(\mathbb{R}^N))$ と定義する。以下の Proposition 1 に示す通り、 $\Phi_{b,\ell,j}(x)$ は $L^2(\mathbb{R}^N)$ の完全直交基底を成す。

Proposition 1. 1.

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_{b,\ell,j}(x) \overline{\Phi_{b,\ell',j'}(x)} dx = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{j,j'} \frac{\Gamma(\ell+b+\lambda_{N,m_j}+1)}{2\Gamma(\ell+1)}.$$

2. $b > -\frac{N}{2}$ とする。 $W_{b,alg}$ は、 $L^2(\mathbb{R}^N)$ の稠密部分集合である。

2.2 $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times O(N)$ の表現の構成

$W_{b,alg} = \bigoplus_{\ell,j} \mathbb{C} \Phi_{b,\ell,j}(x)$ を定義域にもつ, $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の作用素

$$H_b = \Delta - \frac{b^2}{|x|^2} - \frac{2b}{|x|^2} \left(\left(\frac{N-2}{2} \right)^2 - \Delta_{S^{N-1}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

を, 以下の固有方程式で特徴付けることにする:
 $p(x) \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^N)$ に対して,

$$\frac{1}{2} (H_b - |x|^2) \Phi_{b,\ell,p}(x) = -(b + \lambda_{N,m} + 2\ell + 1) \Phi_{b,\ell,p}(x).$$

$|x|^2 W_{b,alg} \subset W_{b,alg}$ であるので, H_b が計算できることに注意する.
 ここで, 上記の固有方程式は,

$$H_b = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{N-1}} - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2b}{r^2} \left(\left(\frac{N-2}{2} \right)^2 - \Delta_{S^{N-1}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Phi_{b,\ell,p}(r\omega) = r^{b+m} e^{-\frac{1}{2}r^2} L_\ell^{(b+\lambda_{N,m})}(r^2) p(\omega)$$

と極座標表示したのち, Laguerre の微分方程式 $t \frac{d^2 L_\ell^{(\alpha)}(t)}{dt^2} + (\alpha + 1 - t) \frac{dL_\ell^{(\alpha)}(t)}{dt} + \ell L_\ell^{(\alpha)}(t) = 0$ を適用することで得られる式であり, 本稿では逆にそれを定義としている.

なお, $\left(\left(\frac{N-2}{2} \right)^2 - \Delta_{S^{N-1}} \right)^{\frac{1}{2}}$ は, $p \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^N)$ に対して $\Delta_{S^{N-1}} p(\omega) = -m(N+m-2)p(\omega)$ であることに基づき,

$$\left(\left(\frac{N-2}{2} \right)^2 - \Delta_{S^{N-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \Phi_{b,\ell,p}(x) = \left(\frac{N-2}{2} + m \right) \Phi_{b,\ell,p}(x)$$

と定義している.

H_b の定義から以下がなりたつ.

Proposition 2. $\frac{1}{2} (H_b - |x|^2)$ は本質的自己共役作用素である. とくに, 対応するユニタリ 1 パラメータ作用素 $e^{\frac{it}{2}(H_b - |x|^2)}$ が存在する.

これに加えて, 作用素 $\frac{i}{2}|x|^2, \frac{i}{2}H_b, E + \frac{N}{2}$ は, $W_{b,alg}$ に自然に作用し, \mathfrak{sl}_2 -triple を成す (Propositions 3, 4) ことが示せる. ここで, $E := \sum_{k=1}^N x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ は, Euler 作用素である.

Proposition 3. $p(x) \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^N)$ に対して,

$$\frac{H_b - |x|^2}{2} \Phi_{b,\ell,p}(x) = -(b + \lambda_{N,m} + 2\ell + 1) \Phi_{b,\ell,p}(x)$$

$$\left(E + \frac{N}{2} - \frac{H_b + |x|^2}{2} \right) \Phi_{b,\ell,p}(x) = 2(\ell + 1) \Phi_{b,\ell+1,p}(x)$$

$$\left(E + \frac{N}{2} + \frac{H_b + |x|^2}{2} \right) \Phi_{b,\ell,p}(x) = -2(b + \lambda_{N,m} + \ell) \Phi_{b,\ell-1,p}(x)$$

Proof. Laguerre 多項式の満たす漸化式

$$\begin{aligned} t \frac{d^2 L_\ell^{(\alpha)}(t)}{dt^2} + (\alpha + 1 - t) \frac{dL_\ell^{(\alpha)}(t)}{dt} + \ell L_\ell^{(\alpha)}(t) &= 0 \\ t L_\ell^{(\alpha)}(t) &= -(\ell + 1) L_{\ell+1}^{(\alpha)}(t) + (2\ell + \alpha + 1) L_\ell^{(\alpha)}(t) - (\ell + \alpha) L_{\ell-1}^{(\alpha)}(t) \\ t \frac{dL_\ell^{(\alpha)}(t)}{dt} &= \ell L_\ell^{(\alpha)}(t) - (\ell + \alpha) L_{\ell-1}^{(\alpha)}(t) \end{aligned}$$

から計算ができる. □

Proposition 4. $\frac{i}{2}|x|^2, \frac{i}{2}H_b, E + \frac{N}{2}$ は $\text{End}(W_{b,alg})$ の元として, \mathfrak{sl}_2 -triple をなす. すなわち,

$$\begin{aligned} \left[E + \frac{N}{2}, \frac{i}{2}|x|^2 \right] &= i|x|^2 \\ \left[E + \frac{N}{2}, \frac{i}{2}H_b \right] &= -iH_b \\ \left[\frac{i}{2}|x|^2, \frac{i}{2}H_b \right] &= E + \frac{N}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ.

Idea for proof.

$$\begin{aligned} \left[E + \frac{N}{2}, b^2 + 2b \left(\left(\frac{N-2}{2} \right)^2 - \Delta_{S^{N-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] &= 0 \\ \left[|x|^2, b^2 + 2b \left(\left(\frac{N-2}{2} \right)^2 - \Delta_{S^{N-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] &= 0. \end{aligned}$$

□

Remark 1. Proposition 4 に基づき, 以下では, $\frac{i}{2}|x|^2$ を $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\frac{i}{2}H_b$ を $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E + \frac{N}{2}$ を $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と対応させて記述する.

Propositions 2, 4 に基づき, $W_{b,alg}$ 上に $(\mathfrak{g}, \tilde{K})$ -加群 ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, $\tilde{K} = \widetilde{SO(2)}$, $\widetilde{SO(2)}$ は $SO(2)$ の普遍被覆) を定義することができる. この表現を ω_b と書く.

ω_b は, $SL_2(\mathbb{R})$ の普遍被覆群 $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ の unitary 表現に持ち上げることができる.

Theorem 1. $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ の $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の unitary 表現 Ω_b であって, 任意の $v \in W_{b,alg}$ に対して,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Omega_b(e^{tX})v = \omega_b(X)v$$

かつ任意の $k \in \tilde{K}$ に対して

$$\Omega_b(k) = \omega_b(k)$$

となるものが一意的に存在する.

$O(N)$ の $L^2(\mathbb{R}^N)$ への自然な作用により定まる表現を ρ とする. Ω_b の作用と ρ の作用は可換であるから, $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})} \times O(N)$ の表現 $\Omega_b \boxtimes \rho$ が定まる.

Theorem 2. $(\Omega_b \boxtimes \rho, L^2(\mathbb{R}^N))$ は $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})} \times O(N)$ の表現として

$$W_{b,alg} \cong \sum_{m=0}^{\infty} \oplus \pi_{b+\lambda_{N,m}} \boxtimes \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^N)$$

と分解する.

ここで π_λ は作用素 $-\frac{1}{2}(H_b - |x|^2)$ についての *weight* 分解に関する, *Lowest wight* $\lambda+1$ を持つ *Lowest wight* 表現で, $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^N)$ は m 次の球面調和関数の空間である.

この表現の Smooth vectors の空間は明示的に記述できる.

Proposition 5. $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ の表現 $(\Omega_b, L^2(\mathbb{R}^N))$ の *smooth vectors* の空間 $W_{b,smooth}$ は, $|x|^b \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ と一致する.

2.3 一般化フーリエ変換の定義

Definition 1. 一般化されたフーリエ変換を以下のように定義する.

$$\mathcal{F}_b := i^{b+\frac{N}{2}} \Omega_b \left(e^{\frac{\pi i}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = i^{b+\frac{N}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}(H_b - |x|^2)}$$

ここで $i := e^{\frac{\pi i}{2}}$ である.

Remark 2. \mathcal{F}_b は, $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ の *Weyl* 群の生成元に対応する作用素である.

$H_b - |x|^2$ のスペクトル分解から, 以下がわかる.

Theorem 3. 1.

$$\mathcal{F}_b \Phi_{b,\ell,p}(x) = i^{-(2\ell+m)} \Phi_{b,\ell,p}(x)$$

である. ここで, $p(x) \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^N)$ である.

2. 以下の反転公式などが成り立つ;

$$\mathcal{F}_b^2 f(x) = f(-x) \quad \text{特に} \quad \mathcal{F}_b^4 = 1,$$

$$\mathcal{F}_b \overline{\mathcal{F}_b} = \overline{\mathcal{F}_b} \mathcal{F}_b = 1.$$

2.4 複素解析半群への拡張

Ben Saïd–Kobayashi–Ørsted [BKØ12, Section 3.8] に倣って, Ω_b の複素解析半群への拡張を考える. $G = SL_2(\mathbb{R})$, $G_{\mathbb{C}} = SL_2(\mathbb{C})$, $\tilde{G} = \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ とする.

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}; a^2 + bc \leq 0, b \geq c \right\}$$

とする. このとき, $X \in W \iff i\omega_b(X) \leq 0$ となる. $\Gamma(W) := G \text{Exp}(iW)$ とすると, これは $G_{\mathbb{C}}$ の部分半群になる. $\Gamma(W)$ をその普遍被覆とする. このとき, $\Gamma(W) = \widetilde{G} \text{Exp}(iW) \underset{\text{Homeo}}{\cong} \tilde{G} \times W$

になる. $\Gamma(W)$, $\widetilde{\Gamma(W)}$ は Olshanski 半群と呼ばれる, 内点において複素解析的な半群である. $W = \{0\} \cup \text{Ad}(G)\mathbb{R}_{>0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cup \text{Ad}(G) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるから,

$$\widetilde{\Gamma(W)} = \widetilde{G} \cup \widetilde{G} \text{Exp} \left(i\mathbb{R}_{>0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \widetilde{G} \cup \widetilde{G} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{G}$$

になる. $\widetilde{\Gamma(W)}$ の内点全体の集合 $\widetilde{\Gamma(W)}_0$ は, $\widetilde{G} \text{Exp} \left(i\mathbb{R}_{>0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \widetilde{G}$ と一致する.

Theorem 4. ユニタリ表現 $\Omega_b : SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^N))$ は, Olshanski 半群の連続表現 $\Omega_b : \widetilde{\Gamma(W)} \rightarrow \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^N))$ に拡張でき (同じ記号を用いる), 以下の性質を持つ:

1. 任意の $\gamma \in \widetilde{\Gamma(W)}$ に対して, $\|\Omega_b(\gamma)\|_{op} \leq 1$.
2. 任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ に対して, $\widetilde{\Gamma(W)}_0 \mapsto \mathbb{C} : \gamma \mapsto (\Omega_b(\gamma)f, f)$ は複素解析的である.
3. $\gamma \in \widetilde{\Gamma(W)}_0$ のとき, $\Omega_b(\gamma)$ は Hilbert-Schmidt 作用素である.

2.5 積分核の記述

本小節では, 積分核を用いた Ω_b の作用の記述について述べる. またこれにより, 一般化フーリエ積分核の明示公式も得られる.

\mathbb{C}^+ を実部が非負の複素数全体の集合とする. Schwartz の核定理を用いた議論により, $t \in \mathbb{C}^+ \setminus 2\pi i\mathbb{Z}$, $f(y) \in W_{b,smooth} = |y|^b \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ に対して,

$$\Omega_b(e^{ti} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}) f(x) = e^{\frac{t}{2}(H_b - |x|^2)} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{b+N/2}} \frac{\Gamma(N/2)\pi^b}{\Gamma(b+N/2)} |x|^b \int_{\mathbb{R}^N} \Lambda_b(x, y; t) f(y) |y|^b dy$$

となるような積分核 $\Lambda_b(x, y; t)$ の存在を示すことができる.

これを用いて $B_b(x, y) := i^{b+N/2} \Lambda_b(x, y; \frac{\pi}{2})$ とする. このとき, $f(y) \in |y|^b \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ に対して,

$$\mathcal{F}_b f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{b+N/2}} \frac{\Gamma(N/2)\pi^b}{\Gamma(b+N/2)} |x|^b \int_{\mathbb{R}^N} B_b(x, y) f(y) |y|^b dy$$

となる.

また, $h_b(x, y; t)$ を, $t \in \mathbb{C}^+$, $f(y) \in |y|^b \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ に対して,

$$\Omega_b(e^{ti} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}) f(x) = e^{\frac{t}{2}H_b} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{b+N/2}} \frac{\Gamma(N/2)\pi^b}{\Gamma(b+N/2)} |x|^b \int_{\mathbb{R}^N} h_b(x, y; t) f(y) |y|^b dy$$

となるような積分核とする.

$F_{0,1,1} \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{matrix}; \frac{X}{Y} \right) := \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_{m+n}}{(\gamma)_n (\delta)_{m+n}} \frac{X^m Y^n}{m! n!}$ とすると, $\Lambda_b(x, y; t)$, $B_b(x, y)$, $h_b(x, y; t)$ は以下のよう具体的にかける.

Theorem 5. 1. $t \in \mathbb{C}^+ \setminus 2\pi i\mathbb{Z}$ に対して,

$$\Lambda_b(x, y; t) = \frac{1}{\sinh(t)^{b+N/2}} e^{-\frac{|x|^2+|y|^2}{2\sinh(t)} + \frac{\langle x, y \rangle}{\sinh(t)}} F_{0,1,1} \left(\begin{matrix} b+\frac{1}{2} & b \\ 2b+1 & b+\frac{N}{2} \end{matrix}; \frac{|x||y| - \langle x, y \rangle}{\sinh(t)} \right).$$

となる.

2. $t \in \mathbb{C}^+$ に対して,

$$h_b(x, y; t) = \frac{1}{t^{b+N/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} F_{0,1,1} \left(\begin{matrix} b+\frac{1}{2} & b \\ 2b+1 & b+\frac{N}{2} \end{matrix}; \begin{matrix} \frac{|x||y|-\langle x,y \rangle}{t} \\ -\frac{2|x||y|}{t} \end{matrix} \right).$$

3.

$$B_b(x, y) = e^{-i\langle x,y \rangle} F_{0,1,1} \left(\begin{matrix} b+\frac{1}{2} & b \\ 2b+1 & b+\frac{N}{2} \end{matrix}; \begin{matrix} -i(|x||y|-\langle x,y \rangle) \\ 2i|x||y| \end{matrix} \right)$$

Sketch of proof. まず $\operatorname{Re}(t) > 0$ なる t に対して

$$|x|^b |y|^b \Lambda_b(x, y; t) = \sum_{l,j=0}^{\infty} e^{-t(b+\lambda_{N,m_j}+2l+1)} \frac{\Phi_{b,l,j}(x) \overline{\Phi_{b,l,j}(y)}}{\langle \Phi_{b,l,j}, \Phi_{b,l,j} \rangle}$$

を計算する. その後, $\operatorname{Re}(t) \rightarrow 0$ とすることで 1 を得る. 3 は 1 からの帰結である. 2 は Ω_b の共役作用で 1 を変換したものの極限として得られる. \square

Remark 3. $N = 1$ の場合には, 3つの積分核はそれぞれ

$$\Lambda_b(x, y; t) = \Gamma(b+1/2) \frac{1}{\sinh(t)^{b+1/2}} e^{-\frac{|x|^2+|y|^2}{2\sinh(t)}} \left(\tilde{I}_{b-\frac{1}{2}} \left(\frac{xy}{\sinh(t)} \right) + \frac{xy}{2\sinh(t)} \tilde{I}_{b+\frac{1}{2}} \left(\frac{xy}{\sinh(t)} \right) \right)$$

$$h_b(x, y; t) = \Gamma(b+1/2) \frac{1}{t^{b+1/2}} e^{-\frac{|x|^2+|y|^2}{2t}} \left(\tilde{I}_{b-\frac{1}{2}} \left(\frac{xy}{t} \right) + \frac{xy}{2t} \tilde{I}_{b+\frac{1}{2}} \left(\frac{xy}{t} \right) \right)$$

$$B_b(x, y) = \Gamma(b+1/2) \left(\tilde{J}_{b-\frac{1}{2}}(xy) - i \frac{xy}{2} \tilde{J}_{b+\frac{1}{2}}(xy) \right).$$

となる. ここで $\tilde{J}_\nu(u) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (u/2)^{2m}}{\Gamma(\nu+m+1)m!}$ は *Normalized Bessel* 関数, $\tilde{I}_\nu(u) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(u/2)^{2m}}{\Gamma(\nu+m+1)m!}$ は *Normalized I-Bessel* 関数である.

Remark 4. $\widetilde{\Gamma(W)}$ の任意の元の作用は, 以下に示す通り, *Theorem 5* と簡単な手計算により求められる.

$\tilde{G} := \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, $\tilde{K} := \widetilde{SO(2)} = \{ \exp t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \}$, $\tilde{K}_{\mathbb{C}^+} := \{ \exp it \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{C}_+ \}$, $Z(G) = M := \{ \exp m\pi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; m \in \mathbb{Z} \}$, $A := \{ \exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R} \}$, $N := \{ \exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; b \in \mathbb{R} \}$, $N_{\mathbb{C}^+} := \{ \exp \begin{pmatrix} 0 & ib \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; b \in \mathbb{C}^+ \}$, $\overline{N_{\mathbb{C}^+}} := \{ \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -ib & 0 \end{pmatrix}; b \in \mathbb{C}^+ \}$ $P = MAN$, $w_0 := \exp \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

Iwasawa 分解により $\tilde{G} = \tilde{K}AN$, *Bruhat* 分解により $\tilde{G} = P \cup Pw_0P$ である. $\widetilde{\Gamma(W)} = \tilde{G} \cup \tilde{G} \exp(i\mathbb{R}_{>0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}) \tilde{G} \cup \tilde{G} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{G}$ であったので, $\widetilde{\Gamma(W)}$ は

$$\widetilde{\Gamma(W)} = \tilde{K}AN \cup (AN)K_{\mathbb{C}^+}(AN) \cup (PN_{\mathbb{C}^+}P \cup Pw_0N_{\mathbb{C}^+}P \cup PN_{\mathbb{C}^+}w_0P \cup P\overline{N_{\mathbb{C}^+}}P)$$

と分解できる.

$w_0, K_{\mathbb{C}^+} \setminus Z(G), \overline{N_{\mathbb{C}^+}}$ は *Theorem 5* から計算でき, $Z(G) = M, A, N_{\mathbb{C}^+} \supset N, P = MAN$ の作用は以下の通り簡明に書ける:

$$\Omega_b(e^{m\pi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}})f(x) = e^{-m\pi i(b+N/2)} f((-1)^m x)$$

$$\Omega_b(e^{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}})f(x) = e^{\frac{tN}{2}} f(e^t x)$$

$$\Omega_b(e^{\begin{pmatrix} 0 & it \\ 0 & 0 \end{pmatrix}})f(x) = e^{-\frac{t|x|^2}{2}} f(x).$$

以上を組み合わせて, Ω_b の作用が計算できる.

Theorem 5 から積分核の不等式評価も得られる.

Corollary 1. 1. $b \geq 0$ のとき,

$$|B_b(x, y)| \leq 1.$$

2. $b \geq 0, t > 0$ のとき,

$$0 \leq h_b(x, y; t) \leq t^{-(b+N/2)} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}.$$

Sketch of proof. $b > 0$ において

$$e^{wt} F_{0,1,1} \left(\begin{matrix} b+\frac{1}{2} & b \\ 2b+1 & b+\frac{N}{2} \end{matrix}; \begin{matrix} w-wt \\ -2w \end{matrix} \right) = \frac{b\Gamma(b+N/2)}{\Gamma(N/2)} \int_0^1 (1-u)^{N/2-1} u^{b-1} e^{w(1-u)t} \tilde{I}_b(uw) du.$$

$$|\tilde{I}_b(w)| \leq \frac{e^{|\operatorname{Re}(w)|}}{\Gamma(b+1)}$$

が成り立つことから従う. □

3 偏微分, 平行移動の一般化

本説では, 偏微分の一般化 $D_{b,n}$ と平行移動の一般化 $e^{tD_{b,n}}$ ($n = 1, \dots, N$) を定義し, 多項式 x_n と併せて 2.1 節で考えた一般化されたフーリエ解析との関係を観察する.

3.1 $D_{b,n}$ の定義

$W_{b,smooth} = |x|^b \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ を定義域にもつ, $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の作用素 $D_{b,n}$ ($n = 1 \dots N$) を次のように定義する.

$$D_{b,n} := \frac{1}{2} [H_b, x_n]$$

定義より $D_{b,n}W_{b,alg} \subset W_{b,alg}$, $D_{b,n}W_{b,smooth} \subset W_{b,smooth}$ である.

$x_n, D_{b,n}$ の $W_{b,alg}$ への作用は以下の通りである.

Proposition 6. $p(x) \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^N)$ に対して,

$$\frac{x_n + D_{b,n}}{2} \Phi_{b,\ell,p} = -\Phi_{b,\ell-1,x_n} p^{-\frac{1}{2\lambda_{N,m}}|x|^2} \frac{\partial p}{\partial x_n} + (b + \lambda_{N,m} + \ell) \Phi_{b,\ell, \frac{1}{2\lambda_{N,m}}} \frac{\partial p}{\partial x_n}$$

$$\frac{x_n - D_{b,n}}{2} \Phi_{b,\ell,p} = \Phi_{b,\ell,x_n} p^{-\frac{1}{2\lambda_{N,m}}|x|^2} \frac{\partial p}{\partial x_n} - (\ell + 1) \Phi_{b,\ell+1, \frac{1}{2\lambda_{N,m}}} \frac{\partial p}{\partial x_n}$$

Proof. $p(x)$ を m 次の調和多項式とする.

$$x_n p(x) = \left(x_n p(x) - \frac{1}{2\lambda_{N,m}} |x|^2 \frac{\partial p}{\partial x_n}(x) \right) + \frac{1}{2\lambda_{N,m}} |x|^2 \frac{\partial p}{\partial x_n}(x)$$

と分解でき, $x_n p(x) - \frac{1}{2\lambda_{N,m}} |x|^2 \frac{\partial p}{\partial x_n}(x)$ は $m+1$ 次の調和多項式, $\frac{\partial p}{\partial x_n}(x)$ は, $m-1$ 次の調和多項式になる. これと, Laguerre 多項式の漸化式

$$\begin{aligned} L_\ell^{(\alpha+1)}(t) - L_{\ell-1}^{(\alpha+1)}(t) &= L_\ell^{(\alpha)}(t) \\ tL_\ell^{(\alpha+1)}(t) &= -(\ell+1)L_{\ell+1}^{(\alpha)}(t) + (\ell+\alpha+1)L_\ell^{(\alpha)}(t) \end{aligned}$$

から示すことができる. □

3.2 $D_{b,n}$ と \mathcal{F}_b の関係

Theorem 3 と Proposition 6 から以下がわかる.

Theorem 6.

$$\mathcal{F}_b D_{b,n} \mathcal{F}_b^{-1} = i x_n, \quad \mathcal{F}_b x_n \mathcal{F}_b^{-1} = i D_{b,n},$$

Theorem 6 から以下が示せる.

Corollary 2. $iD_{b,n}$ は本質的自己共役作用素である.

Corollary 3. 1. $m, n = 1, \dots, N$ に対して,

$$[D_{b,m}, D_{b,n}] = 0.$$

2. sl_2 -triple $\{\frac{i}{2}|x|^2, \frac{i}{2}H_b, E + \frac{N}{2}\}$ は, 作用素の 2 次元空間 $\{x_n, iD_{b,n}\}_{\mathbb{R}}$ ($n = 1, \dots, N$) に標準表現として作用する. より詳しく,

$$\begin{aligned} \left[\frac{i}{2}|x|^2, x_n \right] &= 0 & \left[\frac{i}{2}|x|^2, iD_{b,n} \right] &= x_n \\ \left[E + \frac{N}{2}, x_k \right] &= x_n & \left[E + \frac{N}{2}, iD_{b,n} \right] &= -iD_{b,n} \\ \left[\frac{i}{2}H_b, x_n \right] &= iD_{b,n} & \left[\frac{i}{2}H_b, iD_{b,n} \right] &= 0 \end{aligned}$$

という関係式が成り立つ.

3. 以下の関係式が成り立つ.

$$\begin{aligned} |x|^2 &= \sum_{n=1}^N x_n^2 \\ E + \frac{N}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \{D_{b,n}, x_n\} \\ H_b &= \sum_{n=1}^N D_{b,n}^2 \end{aligned}$$

Remark 5. $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ の Weyl 群の生成元に対応する作用素であった (Remark 2). Corollary 3 の 2 に基づくと, Theorem 6 は Weyl 群が weight vectors を入れ替えるという性質に対応していることが観察できる.

逆に, Corollary 3 の 2 を先に示して, その後に表現論を用いて, Theorem 6 を導くこともできる.

3.3 $D_{b,n}$ の明示公式

$\tilde{D}_{b,n} := |x|^{-b} D_{b,n} |x|^b$ とおく.

Theorem 7. $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ に対して,

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{b,n}f(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) + \frac{2b}{|x| \operatorname{vol}(S^{N-1})} \int_{|x|=|y|} \frac{x_n - y_n}{|x - y|^N} (f(x) - f(y)) dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) + \frac{b}{\operatorname{vol}(S^{N-1})} \int_{S^{N-1}} \xi_n \frac{f(x) - f(\sigma_\xi(x))}{\langle \xi, x \rangle} d\xi.\end{aligned}$$

となる. ここで $d\mu$ は S^{N-1} 上の回転不変測度である.

Remark 6. \mathcal{R} を Root 系, \mathfrak{C} を \mathcal{R} の鏡映群とする. k を \mathfrak{C} 不変な \mathcal{R} 上の関数とする. Dunkl の Differential-Difference operator [Dun89] とは,

$$T_n f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi} k(\alpha) \alpha_n \frac{f(x) - f(\sigma_\alpha(x))}{\langle \alpha, x \rangle}$$

のように定義される作用素のことである. $\tilde{D}_{b,n}$ は, $\mathfrak{C} = O(N)$, $\mathcal{R} = S^{N-1}$ とみなした, Dunkl 作用素の Smooth Analogue になっている.

4 一般化平行移動

4.1 一般化平行移動作用素の定義と性質

Definition 2. $D_{b,n}$ ($n = 1 \dots N$) に対応するユニタリ 1 パラメータ作用素を $e^{tD_{b,n}}$ を一般化平行移動作用素と呼ぶ.

波動方程式のエネルギー法 ([Eva98, Section 2.4, Theorem 6] など参照.) に倣えば, 一般化平行移動作用素について動径方向に関する有限伝播性を示すことができる.

Theorem 8. $f(y), g(y) \in |y|^b \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ とする. $|x| - |t| < |y| < |x| + |t|$ において, $f(y) = g(y)$ ならば,

$$e^{tD_{b,n}} f(x) = e^{tD_{b,n}} g(x)$$

が成り立つ.

Corollary 4. $e^{tD_{b,v}}$ は $|x|^b C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 上の半群に拡張される.

4.2 $N = 1$ の場合の明示公式

$N = 1, b > -\frac{1}{2}$ とする. $D_{b,1}$ を D_b, x_1 を x と省略して書く. Theorem 7 から,

$$D_b f(x) = \frac{df}{dx}(x) - \frac{b}{x} f(-x)$$

である. $\tilde{D}_b f(x) = (|x|^{-b} D_b |x|^b) f(x) = \frac{df}{dx}(x) + b \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ は, 鏡映群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に関する Dunkl の Differential-Difference operator [Dun89] である.

$N = 1$ の場合には、以下の Theorem 9 により、一般化された平行移動 e^{tD_b} を具体的に記述できる。
第一種、第二種 Legendre 関数を

$$P_\nu(w) := {}_2F_1\left(-\nu, \nu + 1; \frac{1-w}{2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_m (\nu + 1)_m}{m! m!} \left(\frac{1-w}{2}\right)^m \quad (-1 < w \leq 1)$$

$$\begin{aligned} Q_\nu(w) &:= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1)}{2^{\nu+1} \Gamma(\nu + 3/2)} \frac{1}{w^{\nu+1}} {}_2F_1\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu+2}{2}; \frac{1}{w^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2} + m) \Gamma(\frac{\nu+2}{2} + m)}{\Gamma(\nu + 3/2 + m) m!} w^{-2m-\nu-1} \quad (1 < w) \end{aligned}$$

をおよびその解析接続により定義する。

$P_\nu(w)$, $Q_\nu(w)$ を用いて、関数 $\Phi_\nu(u)$ を

$$\Phi_\nu(u) := \frac{-1}{2\pi i} (Q_\nu(u + i0) - Q_\nu(u - i0)) = \begin{cases} -\frac{\sin(b\pi)}{\pi} Q_\nu(-u) & (-\infty < u < -1) \\ \frac{1}{2} P_\nu(u) & (-1 < u < 1) \\ 0 & (1 < u < \infty) \end{cases}$$

と定義する。 $\Phi_\nu(u)$ を用いて、積分核 $K_b(x, y; t)$ を

$$K_b(x, y; t) = \operatorname{sgn}(t) \left\{ \operatorname{sgn}(xy) \Phi_b\left(\frac{x^2 + y^2 - t^2}{2|x||y|}\right) - \Phi_{b-1}\left(\frac{x^2 + y^2 - t^2}{2|x||y|}\right) \right\}$$

と定義する。

Theorem 9. $b > -\frac{1}{2}$, $f(y) \in |y|^b \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ とする。

1. $x(x+t) > 0$ のとき、

$$e^{tD_b} f(x) = f(x+t) + b \int_{||x|-|y|| < |t|} p.v.y \left(\frac{1}{x+t-y}\right) K_b(x, y; t) f(y) dy$$

2. $x(x+t) < 0$ のとき、

$$e^{tD_b} f(x) = f(x+t) \cos(b\pi) + b \int_{||x|-|y|| < |t|} p.v.y \left(\frac{1}{x+t-y}\right) K_b(x, y; t) f(y) f(y) dy$$

となる。ここで、 $p.v.y$ は y に関する Cauchy の主値積分を表す記号である。

$K_b(x, y; t)$ や $\Phi_b(u)$ を介さずに、Legendre 関数 $P_\nu(w)$, $Q_\nu(w)$ によって e^{tD_b} を直接記述すると以下
のようになる：

$|t| < |x|$ のとき,

$$\begin{aligned}
e^{tD_b} f(x) &= f(x+t) \\
&+ \frac{b}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{P_b\left(\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right) - P_{b-1}\left(\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right)}{x+t-y} f(y) dy \\
&+ \frac{b}{2} \int_{-x-t}^{-x+t} \frac{-P_b\left(\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right) - P_{b-1}\left(\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right)}{x+t-y} f(y) dy.
\end{aligned}$$

$|x| < |t|$, $\text{sgn}(xt) > 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
e^{tD_b} &= f(x+t) \\
&+ \frac{b}{2} \int_{-x+t}^{x+t} \frac{P_b\left(\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right) - P_{b-1}\left(\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right)}{x+t-y} f(y) dy \\
&- \frac{b \sin(b\pi)}{\pi} \int_0^{-x+t} \frac{Q_b\left(-\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right) + Q_{b-1}\left(-\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right)}{x+t-y} f(y) dy \\
&- \frac{b \sin(b\pi)}{\pi} \int_{x-t}^0 \frac{-Q_b\left(-\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right) + Q_{b-1}\left(-\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right)}{x+t-y} f(y) dy \\
&+ \frac{b}{2} \int_{-x-t}^{x-t} \frac{-P_b\left(\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right) - P_{b-1}\left(\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right)}{x+t-y} f(y) dy.
\end{aligned}$$

$|x| < |t|$, $\text{sgn}(xt) < 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
e^{tD_b} &= f(x+t) \cos(b\pi) \\
&+ \frac{b}{2} \int_{x+t}^{-x+t} \frac{-P_b\left(\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right) - P_{b-1}\left(\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right)}{x+t-y} f(y) dy \\
&- \frac{b \sin(b\pi)}{\pi} \int_0^{x+t} \frac{-Q_b\left(-\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right) + Q_{b-1}\left(-\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right)}{x+t-y} f(y) dy \\
&- \frac{b \sin(b\pi)}{\pi} \int_{-x-t}^0 \frac{Q_b\left(-\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right) + Q_{b-1}\left(-\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right)}{x+t-y} f(y) dy \\
&+ \frac{b}{2} \int_{x-t}^{-x-t} \frac{P_b\left(\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right) - P_{b-1}\left(\frac{x^2+y^2-t^2}{2|x||y|}\right)}{x+t-y} f(y) dy.
\end{aligned}$$

ただし, $y = x+t$ においては, Cauchy の主値積分を用いている.

References

- [AS64] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume No. 55 of *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*. U. S. Government Printing Office, Washington, DC, 1964. For sale by the Superintendent of Documents.

- [BKØ09] Salem Ben Saïd, Toshiyuki Kobayashi, and Bent Ørsted. Generalized Fourier transforms $\mathcal{F}_{k,a}$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(19-20):1119–1124, 2009.
- [BKØ12] Salem Ben Saïd, Toshiyuki Kobayashi, and Bent Ørsted. Laguerre semigroup and Dunkl operators. *Compos. Math.*, 148(4):1265–1336, 2012.
- [Dun89] Charles F. Dunkl. Differential-difference operators associated to reflection groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 311(1):167–183, 1989.
- [Eva98] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [GR15] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, eighth edition, 2015. Translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Daniel Zwillinger and Victor Moll.
- [HN00] Joachim Hilgert and Karl-Hermann Neeb. Positive definite spherical functions on Ol'shanskii domains. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(3):1345–1380, 2000.
- [Kob98] Toshiyuki Kobayashi. Discrete decomposability of the restriction of $A_q(\lambda)$ with respect to reductive subgroups. II. Micro-local analysis and asymptotic K -support. *Ann. of Math. (2)*, 147(3):709–729, 1998.
- [Kob00] Toshiyuki Kobayashi. Discretely decomposable restrictions of unitary representations of reductive Lie groups—examples and conjectures. In *Analysis on homogeneous spaces and representation theory of Lie groups, Okayama–Kyoto (1997)*, volume 26 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 99–127. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2000.
- [Sze75] Gábor Szegő. *Orthogonal polynomials*, volume Vol. XXIII of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, fourth edition, 1975.
- [Wat44] G. N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press, Cambridge; The Macmillan Company, New York, 1944.