(k,a)-一般化 Fourier 変換に伴う $\mathfrak{sl}_2$-三対の収縮

東京大学大学院数理科学研究科 樋川達郎
Tatsuro Hikawa
Graduate School of Mathematical Sciences,
the University of Tokyo

概要

Ben Saïd–Kobayashi–Ørsted (2009, 2012) は，$\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 上の微分差分作用素の $\mathfrak{sl}_2$-三対 $\mathbb{H}_{k,a}$, $\mathbb{E}^+_{k,a}$, $\mathbb{E}^-_{k,a}$ を導入し，これを用いて (k,a)-一般化 Fourier 変換 $\mathscr{F}_{k,a}$ を定義した．これは，Dunkl パラメータ k と変形パラメータ $a > 0$ で添字付けられた，古典的な Fourier 変換 $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{0,2}$ の変形族である．筆者は，この $\mathfrak{sl}_2$-三対について，変形パラメータ a を 0 に近づける極限を考察した．この極限においては，Lie 代数 $\mathfrak{g}_{k,a} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbb{H}_{k,a}, \mathbb{E}^+_{k,a}, \mathbb{E}^-_{k,a}\} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ は 3 次元可換 Lie 代数 $\mathfrak{g}_{k,0}$ に収縮し，そのスペクトルの性質は異なったものになる．本稿では，$\mathfrak{g}_{k,0}$ やその解析的性質に関する結果を紹介する．

目次

1 序

極小表現は，単純 Lie 群の無限次元既約ユニタリ表現の中で最小の Gelfand–Kirillov 次元をもつ，「小さい」表現である．ところが逆に，群が作用する空間から見れば，極小表現は「その空間の対称性が大きく現れている」表現だと考えられ，極小表現がその空間における大域解析をよく統制することが期待される．これが，小林俊行によって創始された「**極小表現の大域解析**」のアイデアである（詳しくは，サーベイ [Pev25] を参照のこと）．

極小表現の大域解析の観点からは，Euclid 空間上の古典的な Fourier 変換は，Weil 表現の

L^2 モデル（これは，メタプレクティック群 $Mp(N,\mathbb{R})$ の $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上のユニタリ表現であり，二つの既約成分に分解され，その各々が極小表現である）に現れるユニタリ反転作用素だと解釈できる．この解釈を推し進めると，Euclid 空間以外の多様体における調和解析として，Fourier 変換に相当する作用素を自然に定義できる場合がある．この視点に基づいて，Kobayashi–Mano [KM05, KM07a, KM07b, KM11] は，不定値直交群 $O(p,q)$ の極小表現の L^2 モデルに現れるユニタリ反転作用素として「**光錐上の Fourier 変換**」を導入し，新しい調和解析の理論を形成した．特に，$(p,q)=(N+1,2)$ のとき表現空間は $L^2(\mathbb{R}^N,|x|^{-1}\,dx)$ となり，この場合は Kobayashi–Mano [KM05, KM07a] で詳しく調べられている．

その後, Ben Saïd–Kobayashi–Ørsted [BKØ09, BKØ12] は, $\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ 上の微分差分作用素の $\mathfrak{sl}_2$-三対 $\mathbb{H}_{k,a}$, $\mathbb{E}^+_{k,a}$, $\mathbb{E}^-_{k,a}$ を導入し，これらを用いて **(k,a)-一般化 Laguerre 半群**（(k,a)-generalized Laguerre semigroup）

$$\mathscr{I}_{k,a}(z)=\exp\Bigl(\frac{z}{i}(\mathbb{E}^-_{k,a}-\mathbb{E}^+_{k,a})\Bigr)\qquad(\operatorname{Re}z\geq 0)$$

およびその特殊値である **(k,a)-一般化 Fourier 変換**（(k,a)-generalized Fourier transform）

$$\mathscr{F}_{k,a}=e^{\frac{i\pi}{2}\frac{2\langle k\rangle+a+N-2}{a}}\mathscr{I}_{k,a}\left(\frac{i\pi}{2}\right)$$

を定義した（注意 2.4 も参照のこと）．ここで，k は Dunkl 理論から来るパラメータであり，$a>0$ は変形パラメータである．(k,a)-一般化 Fourier 変換は，次の変換を特殊な場合として含む．

- $(k,a)=(0,2)$ の場合，$\mathscr{F}_{0,2}$ は古典的な Fourier 変換である．
- $(k,a)=(0,2)$ の場合，$\mathscr{F}_{0,1}$ は $(p,q)=(N+1,2)$ に対する光錐上の Fourier 変換である．
- k が一般で $a=2$ の場合，$\mathscr{F}_{k,2}$ は Dunkl 変換 [Dun92] である．

微分差分作用素 $\mathbb{H}_{k,a}$, $\mathbb{E}^+_{k,a}$, $\mathbb{E}^-_{k,a}$ は，Dunkl パラメータ k と $a\neq 0$ に対して定義されている．これに対して，筆者 [Hik25] は，k を固定して a を 0 に近づける極限を考察した．この極限においては，Lie 代数 $\mathfrak{g}_{k,a}=\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbb{H}_{k,a},\mathbb{E}^+_{k,a},\mathbb{E}^-_{k,a}\}\cong\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ は 3 次元可換 Lie 代数 $\mathfrak{g}_{k,0}$ に収縮し，そのスペクトルの性質は異なったものになる．本稿では，$\mathbb{H}_{k,a}$, $\mathbb{E}^+_{k,a}$, $\mathbb{E}^-_{k,a}$ の定義と基本的な性質を見たあと，$\mathfrak{g}_{k,0}$ やその解析的性質に関する結果を紹介する．

なお，本稿では，Dunkl 理論については詳しく述べない．この方面については，たとえば，Rösler [Rös03] を参照のこと．

2 (k,a)-一般化 Fourier 変換に伴う $\mathfrak{sl}_2$-三対

微分差分作用素 $\mathbb{H}_{k,a}$, $\mathbb{E}^+_{k,a}$, $\mathbb{E}^-_{k,a}$ の定義は，次のとおりである．ここで，$E_x=\sum_{j=1}^N x_j\frac{\partial}{\partial x_j}$ は $\mathbb{R}^N$ 上の Euler 作用素であり，Δ_k は Dunkl ラプラシアン（$k=0$ のとき，これは古典的なラプラシアン Δ に一致する）である．

定義 2.1（[BKØ12, (3.3)]） 重複度関数 k と $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して，$\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 上の微分差分作用素 $\mathbb{H}_{k,a}$, $\mathbb{E}^+_{k,a}$, $\mathbb{E}^-_{k,a}$ を，

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}_{k,a} &= \frac{2}{a} E_x + \frac{2\langle k \rangle + a + N - 2}{a}, \\
\mathbb{E}^+_{k,a} &= \frac{i}{a} |x|^a, \\
\mathbb{E}^-_{k,a} &= \frac{i}{a} |x|^{2-a} \Delta_k
\end{aligned}$$

と定める．

命題 2.2（[BKØ12, Theorem 3.2]） 任意の重複度関数 k と $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して，微分差分作用素 $\mathbb{H}_{k,a}$, $\mathbb{E}^+_{k,a}$, $\mathbb{E}^-_{k,a}$ は，$\mathfrak{sl}_2$-三対をなす．すなわち，

$$[\mathbb{H}_{k,a}, \mathbb{E}^+_{k,a}] = 2\mathbb{E}^+_{k,a}, \qquad [\mathbb{H}_{k,a}, \mathbb{E}^-_{k,a}] = -2\mathbb{E}^-_{k,a}, \qquad [\mathbb{E}^+_{k,a}, \mathbb{E}^-_{k,a}] = \mathbb{H}_{k,a}.$$

が成り立つ．

Ben Saïd–Kobayashi–Ørsted は，この $\mathfrak{sl}_2$-三対について，次の定理を示した．ここで，$w_{k,a}$ は適当な重み関数であり，$k = 0$ のときは $w_{0,a}(x) = |x|^{a-2}$ である．

定理 2.3（[BKØ12, Theorem 3.30, 3.31]） k を非負の重複度関数，$a > 0$ とし，これらは $\frac{2\langle k \rangle + N - 2}{a} > -1$ を満たすとする．このとき，$\mathfrak{sl}_2$-三対 $\mathbb{H}_{k,a}$, $\mathbb{E}^+_{k,a}$, $\mathbb{E}^-_{k,a}$ は，$SL(2, \mathbb{R})$ の普遍被覆 Lie 群 $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ の Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^N, w_{k,a}(x)\, dx)$ 上のユニタリ表現に（適当な意味で）一意に持ち上がる．このユニタリ表現は，

$$L^2(\mathbb{R}^N, w_{k,a}(x)\, dx) = \sum_{m \in \mathbb{N}}^{\oplus} \mathcal{H}^m_k(\mathbb{S}^{N-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}_{>0}, r^{2\langle k \rangle + a + N - 3}\, dr)$$

と直交直和分解される．ここで，各 $m \in \mathbb{N}$ に対応する上式の右辺の項について，$\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ の $\mathcal{H}^m_k(\mathbb{S}^{N-1})$ への作用は自明であり，$L^2(\mathbb{R}_{>0}, r^{2\langle k \rangle + a + N - 3}\, dr)$ への作用は最低ウェイト $\frac{2m + 2\langle k \rangle + N - 2}{a} + 1$ の既約ユニタリ表現である．

注意 2.4 1 節で触れた (k, a)-一般化 Laguerre 半群や (k, a)-一般化 Fourier 変換は，正式には，定理 2.3 に基づいて定義される．すなわち，定理 2.3 で定まる $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ の $L^2(\mathbb{R}^N, w_{k,a}(x)\, dx)$ 上のユニタリ表現を $\Omega_{k,a}$ と書くと，(k, a)-一般化 Laguerre 半群は

$$\mathscr{I}_{k,a}(z) = \Omega_{k,a}\left(\exp_{\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})} \left(\frac{z}{i} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right)$$

と定義され，(k, a)-一般化 Fourier 変換は

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{k,a} &= e^{\frac{i\pi}{2} \frac{2\langle k \rangle + a + N - 2}{a}} \mathscr{I}_{k,a}\left(\frac{i\pi}{2} \right) \\
&= e^{\frac{i\pi}{2} \frac{2\langle k \rangle + a + N - 2}{a}} \Omega_{k,a}\left(\exp_{\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})} \left(\frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right)
\end{aligned}$$

と定義される．

3 $\mathfrak{sl}_2$-三対の収縮

微分差分作用素の $\mathfrak{sl}_2$-三対 $\mathbb{H}_{k,a}$, $\mathbb{E}^+_{k,a}$, $\mathbb{E}^-_{k,a}$ は，重複度関数 k と $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して定義されていた．定義式（定義 2.1）の分母に a が現れるため，これらの作用素自体は $a = 0$ に対しては定義されない．しかし，これらが張る Lie 代数を $\mathfrak{g}_{k,a}$ と置くと，

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{k,a} &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbb{H}_{k,a}, \mathbb{E}^+_{k,a}, \mathbb{E}^-_{k,a}\} \\ &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{a\mathbb{H}_{k,a}, a\mathbb{E}^+_{k,a}, a\mathbb{E}^-_{k,a}\} \\ &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{2E_x + 2\langle k\rangle + a + N - 2,\ i|x|^a,\ i|x|^{2-a}\Delta_k\} \end{aligned}$$

と表せる．そこで，上式で $a = 0$ と置くことにより，

$$\mathfrak{g}_{k,0} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{2E_x + 2\langle k\rangle + N - 2,\ i,\ i|x|^2\Delta_k\}$$

と定める．

$a \neq 0$ に対しては $\mathfrak{g}_{k,a} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ であるのに対して，$\mathfrak{g}_{k,0}$ については次が成り立つ．

命題 3.1　任意の重複度関数 k に対して，$\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 上の微分差分作用素からなる空間 $\mathfrak{g}_{k,0}$ は，3 次元可換 Lie 代数をなす．

証明　命題 2.2 より

$$[a\mathbb{H}_{k,a}, a\mathbb{E}^+_{k,a}] = 2a \cdot a\mathbb{E}^+_{k,a}, \qquad [a\mathbb{H}_{k,a}, a\mathbb{E}^-_{k,a}] = -2a \cdot a\mathbb{E}^-_{k,a}, \qquad [a\mathbb{E}^+_{k,a}, a\mathbb{E}^-_{k,a}] = a \cdot a\mathbb{H}_{k,a}.$$

であり，極限 $a \to 0$ をとることで，

$$[2E_x + 2\langle k\rangle + N - 2, i] = 0, \qquad [2E_x + 2\langle k\rangle + N - 2, i|x|^2\Delta_k] = 0, \qquad [i, i|x|^2\Delta_k] = 0.$$

を得る． □

注意 3.2　このような極限における Lie 代数（あるいは対応する Lie 群）の構造の変化は，İnönü–Wigner [İW53] によって**群の収縮**（contraction of groups）として定式化されている．

4 同時スペクトル分解

パラメータ k と a が適当な条件を満たすとき，$\mathfrak{sl}_2$-三対 $\mathbb{H}_{k,a}$, $\mathbb{E}^+_{k,a}$, $\mathbb{E}^-_{k,a}$ は $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ の $L^2(\mathbb{R}^N, w_{k,a}(x)\,dx)$ 上のユニタリ表現に持ち上がるのだった（定理 2.3）．本節では，この定理の類似として，前節で定義した 3 次元可換 Lie 代数 $\mathfrak{g}_{k,0}$ が同時スペクトル分解可能であり，したがって $\mathbb{R}^3$ のユニタリ表現に持ち上がることを述べる．

次の定理において，$\mathcal{H}^m_k(\mathbb{S}^{N-1})$ は m 次の k-球面調和関数の空間を表し，$k = 0$ のとき，これは古典的な m 次の球面調和関数の空間 $\mathcal{H}^m(\mathbb{S}^{N-1})$ に一致する．

定理 4.1 k を非負の重複度関数とする．$\mathfrak{g}_{k,0}$ に属する任意の微分差分作用素は，定義域を適当に定めると，$L^2(\mathbb{R}^N, w_{k,0}(x)\,dx)$ 上の本質的歪自己随伴作用素となる．さらに，同時スペクトル分解

$$
\begin{aligned}
L^2(\mathbb{R}^N, w_{k,0}(x)\,dx) &= \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathcal{H}_k^m(\mathbb{S}^{N-1}) \otimes \mathbb{C}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} r^{-\frac{2\langle k\rangle+N-2}{2}+i\sigma}\,d\sigma,\\
2E_x + 2\langle k\rangle + N - 2 &= \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} 2i\sigma\,d\sigma\\
i\,\mathrm{id} &= \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} i\,d\sigma,\\
i|x|^2\Delta_k &= \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \left(-i\left(\sigma^2 + \left(m + \frac{2\langle k\rangle + N - 2}{2}\right)^2\right)\right) d\sigma
\end{aligned}
$$

が成立する．

証明の概要 Hilbert 空間の分解

$$
\begin{aligned}
L^2(\mathbb{R}^N, w_{k,0}(x)\,dx) &= L^2(\mathbb{S}^{N-1}, w_k(\omega)\,d\omega) \mathbin{\widehat{\otimes}} L^2(\mathbb{R}_{>0}, r^{2\langle k\rangle+N-3}\,dr)\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} \mathcal{H}_k^m(\mathbb{S}^{N-1}) \otimes L^2(\mathbb{R}_{>0}, r^{2\langle k\rangle+N-3}\,dr)
\end{aligned}
$$

に対応して，作用素 $2E_x + 2\langle k\rangle + N - 2$, $i\,\mathrm{id}$, $i|x|^2\Delta_k$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
2E_x + 2\langle k\rangle + N - 2 &= \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} \mathrm{id}_{\mathcal{H}_k^m(\mathbb{S}^{N-1})} \otimes (2E_r + 2\langle k\rangle + N - 2),\\
i\,\mathrm{id} &= \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} \mathrm{id}_{\mathcal{H}_k^m(\mathbb{S}^{N-1})} \otimes i\,\mathrm{id}_{L^2(\mathbb{R}_{>0}, r^{2\langle k\rangle+N-3}\,dr)},\\
i|x|^2\Delta_k &= \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} \mathrm{id}_{\mathcal{H}_k^m(\mathbb{S}^{N-1})} \otimes i(E_r - m)(E_r + m + 2\langle k\rangle + N - 2)
\end{aligned}
$$

と分解される．ここで，$E_r = r\frac{d}{dr}$ は $\mathbb{R}_{>0}$ 上の Euler 作用素である．$\mathbb{R}_{>0}$ 上の微分作用素 $2E_r+2\langle k\rangle+N-2$, i, $i(E_r-m)(E_r+m+2\langle k\rangle+N-2)$ はすべて $i(E_r+\frac{2\langle k\rangle+N-2}{2})$ の実係数多項式の i 倍として書くことができ，$i(E_r+\frac{2\langle k\rangle+N-2}{2})$ は定義域を適当に定めると $L^2(\mathbb{R}_{>0}, r^{2\langle k\rangle+N-3}\,dr)$ 上の本質的自己随伴作用素となる．これらのことから，主張が成り立つ． □

系 4.2 k を非負の重複度関数とする．このとき，任意の z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$ に対して，$L^2(\mathbb{R}^N, w_{k,0}(x)\,dx)$ 上の（有界とは限らない）正規作用素

$$
\exp\Big(\frac{z_1}{i}(2E_x + 2\langle k\rangle + N - 2) + z_2 + z_3|x|^2\Delta_k\Big)
$$

が定まる．特に，$\mathfrak{g}_{k,0}$ に属する微分差分作用素の作用は $\mathbb{R}^3$ の $L^2(\mathbb{R}^N, w_{k,0}(x)\,dx)$ 上のユニタリ表現に一意に持ち上がり，それは

$$
(t_1, t_2, t_3) \mapsto \exp(t_1(2E_x + 2\langle k\rangle + N - 2) + it_2 + it_3|x|^2\Delta_k).
$$

で与えられる．

証明　$\mathfrak{g}_{k,0}$ は同時スペクトル分解をもつから（定理 4.1），任意の Borel 可測関数 $\phi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ に対して，（有界とは限らない）正規作用素

$$\phi\Big(\frac{1}{i}(2E_x + 2\langle k\rangle + N - 2),\ 1,\ |x|^2\Delta_k\Big)$$

が定まる．前半の主張は，$\phi(w_1, w_2, w_3) = \exp(z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3)$ と置くことで示される．後半の主張は，Stone の定理の結果である．　□

5　積分核公式

系 4.2 で述べた正規作用素

$$\exp\Big(\frac{z_1}{i}(2E_x + 2\langle k\rangle + N - 2) + z_2 + z_3|x|^2\Delta_k\Big)$$

が具体的にどういうものかを考える．明らかに，z_2 に関する部分は単なるスカラー倍である．また，z_1 に関する部分は，$z_1 \in i\mathbb{R}$ のときスケール変換であり，それ以外のとき非有界作用素であることが確かめられる．以下では，残りの z_3 に関する部分について述べる．

次の定理において，$P_k^{(m)}$ は k-球面調和関数の空間の Poisson 核を表し，$k = 0$ のときは Gegenbauer 多項式を用いて

$$P_k^{(m)}(\omega, \omega') = \frac{2m + N - 2}{N - 2} C_m^{\frac{N-2}{2}}(\langle \omega, \omega' \rangle)$$

が成り立つ．また，$\mathrm{vol}_k(\mathbb{S}^{N-1})$ は k に依存する適当な測度に関する $\mathbb{S}^{N-1}$ の体積を表し，$k = 0$ のときは標準測度に関する体積 $\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{N-1}) = 2\pi^{\frac{N}{2}}/\Gamma(\frac{N}{2})$ である．

定理 5.1　k を非負の重複度関数とする．Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^N, w_{k,0}(x)\,dx)$ 上の作用素半群 $(\exp(z|x|^2\Delta_k))_{\mathrm{Re}\,z \geq 0}$ に関する積分核公式

$$\exp(z|x|^2\Delta_k)F(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K_k(x, x'; z)F(x')w_{k,0}(x')\,dx', \tag{5.1}$$

ただし

$$K_k(r\omega, r'\omega'; z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi z}} \exp\Big(-\frac{(\log r - \log r')^2}{4z}\Big)(rr')^{-\frac{2\langle k\rangle + N - 2}{2}}$$
$$\times \frac{1}{\mathrm{vol}_k(\mathbb{S}^{N-1})} \sum_{m=0}^{\infty} \exp\Bigg(-z\Big(m + \frac{2\langle k\rangle + N - 2}{2}\Big)^2\Bigg) P_k^{(m)}(\omega, \omega')$$

が，次の意味で成り立つ．ここで，$\sqrt{z}$ の分岐は，$z > 0$ のとき $\sqrt{z} > 0$ を満たすものをとる．

$\mathrm{Re}\,z > 0$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ と $F \in L^2(\mathbb{R}^N, w_{k,0}(x')\,dx')$ を考えると，任意の $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ に対して (5.1) の右辺の被積分関数は可積分であり，この積分を x の関数とみなしたものは $\exp(z|x|^2\Delta_k)F$ を与える．

証明の概要　定理 4.1 の証明の概要で述べた $i|x|^2\Delta_k$ の分解より，

$$\exp(z|x|^2\Delta_k) = \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\oplus} \mathrm{id}_{\mathcal{H}_k^m(\mathbb{S}^{N-1})} \otimes \exp(z(E_r - m)(E_r + m + 2\langle k\rangle + N - 2))$$

が成り立つ．適当なユニタリ変換と熱核の公式を用いることで，上式の右辺に現れる作用素 $\exp(z(E_r - m)(E_r + m + 2\langle k\rangle + N - 2))$ の積分核公式が得られる．これを $m \in \mathbb{N}$ に関して統合し，解析的な評価によって無限和の適当な意味での収束を示すことで，主張の積分核公式が得られる． □

注意 5.2　(k,a)-一般化 Laguerre 半群 $\mathscr{I}_{k,a}(z)$ や (k,a)-一般化 Fourier 変換 $\mathscr{F}_{k,a}$ は，$a = 0$ に対しては定義されない．しかし，再正規化された (k,a)-一般化 Laguerre 半群

$$\mathscr{I}_{k,a}(az) = \exp\Big(\frac{az}{i}(\mathbb{E}_{k,a}^- - \mathbb{E}_{k,a}^+)\Big) = \exp(z(|x|^{2-a}\Delta_k - |x|^a))$$

を考えて $a = 0$ と置けば，作用素

$$\exp(z(|x|^2\Delta_k - 1)) = e^{-z}\exp(z|x|^2\Delta_k)$$

が得られる．定理 5.1 より，$\mathrm{Re}\, z > 0$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して，この作用素の積分核は，関数 $(x, x') \mapsto e^{-z}K_k(x, x'; z)$ である．

定理 5.1 では作用素半群 $(\exp(z|x|^2\Delta_k))_{\mathrm{Re}\, z\geq 0}$ の積分核 K_k を無限和の形で与えたが，いくつかの低次元の場合には，これを閉じた式に書き換えられる．

まず，$N = 1$ の場合，次が成り立つ．

命題 5.3　$N = 1$ とする．被約ルート系 $\mathscr{R}$ は $\{\alpha, -\alpha\}$（$\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$）であるとし，非負の重複度関数 k を $k_\alpha = k_{-\alpha} \in \mathbb{R}_{>0}$ と同一視する．このとき，$\mathrm{Re}\, z > 0$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ に対して，

$$K_k(x, x'; z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi z}} \exp\Big(-\frac{(\log|x| - \log|x'|)^2}{4z}\Big)|xx'|^{-k+\frac{1}{2}} \frac{e^{-(k-\frac{1}{2})^2 z} + e^{-(k+\frac{1}{2})^2 z}\,\mathrm{sgn}(xx')}{2\alpha^{2k}} \qquad (x,\, x' \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$$

が成り立つ．

次に，$N = 2, 4$ かつ $k = 0$ の場合を考える．これらの場合，積分核 K_0 は，テータ関数

$$\vartheta(v, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(i\pi\tau m^2 + 2i\pi m v) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \exp(i\pi\tau m^2)\cos 2\pi m v$$

を用いて表せる．

命題 5.4　$N = 2$ の場合，$\mathrm{Re}\, z > 0$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ に対して，

$$K_0(r\omega, r'\omega'; z) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{4\pi z}} \exp\Big(-\frac{(\log r - \log r')^2}{4z}\Big)\vartheta\Big(\frac{1}{2\pi}\arccos\langle\omega, \omega'\rangle, \frac{i}{\pi}z\Big) \qquad (r,\, r' \in \mathbb{R}_{>0},\, \omega,\, \omega' \in \mathbb{S}^1)$$

が成り立つ．あるいは同値だが，

$$K_0(re^{i\phi}, r'e^{i\phi'}; z) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{4\pi z}}\exp\biggl(-\frac{(\log r - \log r')^2}{4z}\biggr)\vartheta\biggl(\frac{1}{2\pi}(\phi-\phi'), \frac{i}{\pi}z\biggr) \qquad (r,\, r' \in \mathbb{R}_{>0},\, \phi,\, \phi' \in \mathbb{R})$$

が成り立つ．

命題 5.5 $N = 4$ の場合，$\operatorname{Re} z > 0$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\begin{aligned} &K_0(r\omega, r'\omega'; z) \\ &= -\frac{1}{8\pi^3}\frac{1}{\sqrt{4\pi z}}\exp\biggl(-\frac{(\log r - \log r')^2}{4z}\biggr)(rr')^{-1}(1 - \langle\omega, \omega'\rangle^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\biggl(\frac{1}{2\pi}\arccos\langle\omega, \omega'\rangle, \frac{i}{\pi}z\biggr) \\ &\qquad (r,\, r' \in \mathbb{R}_{>0},\, \omega,\, \omega' \in \mathbb{S}^3) \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$\arccos\langle\omega, \omega'\rangle$ の分岐は，$\arccos\langle\omega, \omega'\rangle \in [0, \pi]$ を満たすものをとる．

謝辞

筆者は，本研究の一部を，RIMS 共同研究（公開型）「表現論，リー理論および関連分野」（2025 年 6 月 24–27 日）において発表しました．発表の機会を下さったオーガナイザーの佐々野詠淑先生に感謝いたします．

本研究は，東京大学の数物フロンティア国際卓越大学院（WINGS-FMSP）および JSPS 科研費 JP25KJ0914 の助成を受けたものです．

参考文献

[BKØ09] S. Ben Saïd, T. Kobayashi, B. Ørsted, “Generalized Fourier transforms $\mathscr{F}_{k,a}$”, *Comptes Rendus Mathématique* **347**.19–20 (2009), pp. 1119–1124.
DOI: 10.1016/j.crma.2009.07.015

[BKØ12] S. Ben Saïd, T. Kobayashi, B. Ørsted, “Laguerre semigroup and Dunkl operators”, *Compositio Mathematica* **148**.4 (2012), pp. 1265–1336.
DOI: 10.1112/S0010437X11007445

[Dun92] C. F. Dunkl, “Hankel Transforms Associated to Finite Reflection Groups”, *Hypergeometric Functions on Domains of Positivity, Jack Polynomials, and Applications*, American Mathematical Society, 1992, pp. 123–138.
DOI: 10.1090/conm/138/1199124

[Hik25] T. Hikawa, “Contraction of the $\mathfrak{sl}_2$-triple associated to the (k, a)-generalized Fourier transform”, preprint, 2025.
DOI: 10.48550/arXiv.2505.22607

[İW53] E. İnönü, E. P. Wigner, "On the Contraction of Groups and Their Representations", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **39**.6 (1953), pp. 510–524.
DOI: 10.1073/pnas.39.6.510

[KM05] T. Kobayashi, G. Mano, "Integral Formulas for the Minimal Representation of $\mathrm{O}(p, 2)$", *Acta Applicandae Mathematicae* **86** (2005), pp. 103–113.
DOI: 10.1007/s10440-005-0464-2

[KM07a] T. Kobayashi, G. Mano, "The inversion formula and holomorphic extension of the minimal representation of the conformal group", *Harmonic Analysis, Group Representations, Automorphic Forms and Invariant Theory, In honor of Roger E. Howe*, World Scientific, 2007, pp. 151–208.
DOI: 10.1142/9789812770790_0006

[KM07b] T. Kobayashi, G. Mano, "Integral formula of the unitary inversion operator for the minimal representation of $O(p, q)$", *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences* **83**.3 (2007), pp. 27–31.
DOI: 10.3792/pjaa.83.27

[KM11] T. Kobayashi, G. Mano, *The Schrödinger Model for the Minimal Representation of the Indefinite Orthonormal Group $O(p, q)$*, American Mathematical Society, 2011.
DOI: 10.1090/s0065-9266-2011-00592-7

[Pev25] M. Pevzner, "Global Analysis of Minimal Representations", *Symmetry in Geometry and Analysis, Volume 1, Festschrift in Honor of Toshiyuki Kobayashi*, Birkhäuser, 2025, pp. 69–79.
DOI: 10.1007/978-981-97-8449-3_1

[Rös03] M. Rösler, "Dunkl operators: Theory and Applications", *Orthogonal Polynomials and Special Functions*, Springer, 2003, pp. 93–135.
DOI: 10.1007/3-540-44945-0_3