A theta inversion relation assigned to $(SL(2,\mathbb{C}), SL(2,\mathbb{Z}[i]))$

嶋田 將史

Masafumi SHIMADA

九州大学 大学院数理学府

Graduate School of Mathematics, Kyushu University*

Abstract

Jorgenson–Lang は広いクラスのゼータ関数を定義し，各ゼータ関数が持つ関数等式を系統的に調べるための，テータ反転公式を用いる枠組みを提唱した．本稿では，組 $(SL(2,\mathbb{C}), SL(2,\mathbb{Z}[i]))$ に対しテータ反転公式の変種としてテータ反転関係式を提案する．また，講演では天下りに与えていたテータ級数について，その背後にあるテータ反転公式の基本的性質を補う．

1 Introduction

本稿のタイトルにあるテータ反転関係式とは，あるプレトレースに関する一つの極限をいう．このプレトレースのもう一つの極限からは，Jorgenson–Lang が定式化した公理を満たすテータ級数 $\theta(t)$ に関連するテータ反転関係式が導かれる．このテータ反転公式は，Jorgenson–Lang が導入した枠組み [6] の中で，形式的に定義されるガウス変換

$$\theta(t) \mapsto \left(z \mapsto 2z \int_0^\infty e^{-z^2 t} \theta(t) dt \right)$$

を介して (Selberg 型) ゼータ関数の加法的な関数等式を与えることが示される．この枠組みで扱える $\theta(t)$ として，次の典型的な例 (i)–(iii) がある：

(i). リーマンゼータ関数 ζ に関する $t \mapsto \sum_{k=1}^\infty e^{-kt}$ はテータ関数の例である．

(ii). K を数体とする．K の整数環の (0) ではない整イデアル $\mathfrak{b}$ に対し，$\mathfrak{b}$ のノルムを $N(\mathfrak{b})$ と書く．このとき，$t \mapsto \sum_{k=1}^\infty a_k e^{-kt}$ は Dedekind ゼータ関数 $\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{b}} N(\mathfrak{b})^{-s}$ に対応するテータ関数である．ただし，各 $k \geq 1$ に対し，非負整数 a_k は $N(\mathfrak{b}) = k$ を満たす整イデアル $\mathfrak{b}$ の個数とする．

(iii). スペクトル理論において，コンパクトリーマン多様体 M 上のラプラス作用素 Δ_M が重複度 a_k をもって非負の固有値 $\{\lambda_k\}$ を持つ場合を考える．このとき，$t \mapsto \sum_{k=0}^\infty a_k e^{-\lambda_k t}$ は Δ_M に対する熱核のトレースとして書けるテータ関数である．

加えて [7] では，例 (i)–(iii) を拡張したクラスとして Bessel テータ級数が導入され，テータ反転公式および対応する加法的な関数等式の計算が詳しく与えられている．本稿では，Jorgenson–Lang が [6] で与えたテータ級数のクラスに対象を限定し，特にリーマン対称空間上の熱核のスペクトル分解から導出されるテータ反転公式に関連するテータ級数を中心に扱う．したがって，Bessel テータ級数を定める級数の収束条件や，Weil の明示公式 (cf. [11]) に関する Eisenstein 級数の理論への応用については扱わない．

本稿の目標は，対称空間と算術的離散部分群の組 $(SL(n,\mathbb{C})/SU(n), SL(n,\mathbb{Z}[i]))$ からテータ反転公式 (および加法的な関数等式) を導くために必要な一般化されたテータ級数の理論を概説し，組 $(SL(2,\mathbb{C}), SL(2,\mathbb{Z}[i]))$ に対して変種の手続きから得られるテータ反転関係式を述べることである．テータ反転公式を導出するとき通常，発散項を正規化するために離散スペクトルと放物型の軌道積分を組み合わせてトレース公式を計算する一方，本研究では離散スペクトルと軌道積分を分離し，それぞれから生じる項についてスペクトルのサイズおよび種類をより詳しく調べることを目指す．

*m.shimada.a90@s.kyushu-u.ac.jp

1.1 Background

既知のテータ反転公式および対応するゼータ関数の関数等式を一般化する動機を述べるために，この小節ではゼータ正規化積を概観する．数列 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ が与えられたとする．Λ がゼータ正規化積を持つというのは，ゼータ関数

$$\zeta_\Lambda(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s} \tag{1}$$

が次の条件 (a) と (b) を満たすことをいう．このとき，変数 s についての微分を $\zeta'_\Lambda(s)$ と書き表し，

$$\prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k := \exp(-\zeta'_\Lambda(0))$$

を Λ のゼータ正規化積と呼ぶ：

(a) 実部 $\Re s > 0$ が十分大きいとき，級数 $\zeta_\Lambda(s)$ は収束する．

(b) $\zeta_\Lambda(s)$ は $s = 0$ において正則に解析接続される．

ゼータ正規化積の代表例として，$\lambda_k = k$ の場合にリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の微分を用いて書ける $\prod_{k=1}^{\infty} k = \sqrt{2\pi}$ がある．特に，$-\zeta'(0) = \log\sqrt{2\pi}$ という等式は $\zeta(s)$ の関数等式を用いて示される．

そこで，「数列 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ がゼータ正規化積を持つ条件を決定せよ」という問題を考える．この問題に対して，Mellin 変換 $f(t) \mapsto (s \mapsto \int_0^\infty f(t)t^{s-1}dt)$ を用いると，形式的に (1) の表示を

$$\zeta_\Lambda(s) = \frac{1}{\mathbf{\Gamma}(s)} \int_0^\infty \theta_\Lambda(t) t^s \frac{dt}{t} \tag{2}$$

と書き直すことができる．ただし，$\mathbf{\Gamma}$ はガンマ関数とする．ここで

$$\theta_\Lambda(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}$$

とおく．このとき，[6] では Dirichlet 型級数 $s \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^{-s}$ の収束に関する条件 **(DIR 1)–(DIR 3)** を ζ_Λ に対して，$t \to 0+$ および $t \to \infty$ における $t \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t}$ の漸近挙動に関する条件 **(AS 1)–(AS 3)** を θ_Λ に対してそれぞれ課すことによって，Λ がゼータ正規化積を持つ条件を確立した．特に，条件 **(DIR 1)–(DIR 3)** を用いて，ζ_Λ が性質 (a) と (b) を満たすゼータ関数になることを特徴付けた．条件 **(DIR 1)–(DIR 3)** と条件 **(AS 1)–(AS 3)** の具体的な内容を 2 節で後述するが，特筆すべき点は，線型作用素の存在を初めから仮定しないことに特徴がある．そのため，例えば [1, 2] で提唱されている「ゼータ関数は，適切なコホモロジー空間上の何らかの作用素の正規化された行列式として書ける」という定式化と比較し，これらの条件はより広いゼータ関数のクラスを網羅することができるだろうと予想される．Jorgenson–Lang [6] は，表示 (2) のもとで θ_Λ に関する条件 **(AS 1)–(AS 3)** から ζ_Λ について **(DIR 1)–(DIR 3)** が従うことを示し，この設定では Λ のゼータ正規化積についての問題をテータ関数の解析に帰着させた．

このテータ関数を用いる枠組みを推し進めると，関数等式を持つ ζ_Λ が存在することと，テータ反転公式を持つ θ_Λ が存在することが同値であることが示される．逆に，条件 **(AS 1)–(AS 3)** を満たす θ_Λ から出発し，ζ_Λ についての条件 (a) と (b) を満たす有理型関数のクラスとして，正規化積型と呼ぶ有理型関数のクラスを定義できる．正規化積型の有理型関数の例として，すでに見たガンマ関数 $\mathbf{\Gamma}(s)$ およびリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$，そしてリーマン面に関連する Selberg ゼータ関数 $Z(s)$ がある．正規化積型の関数の理論から導かれる関数等式の性質とは，θ_Λ に対応するゼータ関数 ζ_Λ を完備化する関数等式の因子が正規化積型であり，その因子のゼロ点・極が主要部となるゼータ関数 ζ_Λ の “自明な” ゼロ点・極と対応することである．この手法を応用し，対称空間の列に対応するテータ反転公式を経て (Selberg-type) ゼータ関数の加法的な関数等式の列を系統的に導出する Jorgenson–Lang のプログラムが提唱された．このプログラムについては [9] を参照されたい．

2 Theta series

本節では，[6] に従いテータ級数を公理化する．数列 $\{\lambda_k\}, \{a_k\} \subset \mathbb{C}$ が次の条件

- $\Re(\lambda_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $\lambda_0 = 0$ かつ $k \geq 1$ に対し $\lambda_k \neq 0$.
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k^{-s}$ は $\Re(s)$ が十分大きいときに一様かつ絶対収束する．

を満たすとする．このとき，$t > 0$ に対し級数 $\vartheta(t)$ を

$$\vartheta(t) = \vartheta_{a,\lambda}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t}$$

で定める．そして，正の整数 $N \geq 1$ に対し

$$Q_N(t) := \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-\lambda_k t}$$

を**漸近指数多項式**と呼ぶ.

実部が $\Re(p_0) \leq \Re(p_1) \leq \cdots \Re(p_j) \leq \cdots \to \infty$ を満たす $\{p\} = \{p_j\} \subset \mathbb{C}$ が与えられたとする．各 $p \in \{p_j\}$ に対しある多項式 B_p を割り当て，B_p の次数を $n_p := \deg B_p$ と書く．このとき，$q \in \mathbb{C}$ に対し，

$$P_q(t) := \sum_{\Re(p) \leq \Re(q)} B_p(\log t) t^p,\ b_p(t) := B_p(\log t)$$

とおき，P_q を **$\mathbf{t = 0}$ における漸近多項式**と呼ぶ.

<u>**Definition**</u> **2.1** $\vartheta = \vartheta_{a,\lambda}$ についての漸近条件 ***(AS 1)–(AS 3)*** を次で与える：

(AS 1) 任意の $t_0 > 0$ および $c > 0$ に対して，ある $K > 0$ と正整数 $N > 1$ が存在し，$t \geq t_0$ に対し上からの評価 (3) が成り立つ：

$$|\vartheta(t) - Q_N(t)| \leq K e^{-ct}. \tag{3}$$

(AS 2) 各 $q \in \mathbb{C}$ に対し，非負整数 $m(q) \geq 0$ が存在し，$t \to 0+$ において漸近挙動 (4) を満たす：

$$\vartheta(t) - P_q(t) = O(t^{\Re(q)} |\log t|^{m(q)}). \tag{4}$$

(AS 3) $\delta > 0$ が与えられたとき，ある $\alpha > 0$ と $c > 0$ が存在し，

$$|\vartheta(t) - Q_N(t)| \leq \frac{c}{t^{\alpha}}$$

が全ての $0 < t \leq \delta$ と正整数 $N \geq 1$ に対して成り立つ.

漸近条件 ***(AS 1)–(AS 3)*** を満たす $\vartheta = \vartheta_{a,\lambda}$ を**テータ級数**と呼ぶ.

漸近条件 **(AS 1)**–**(AS 3)** は，コンパクトリーマン多様体上のラプラス作用素に対する熱核のトレースについての漸近挙動を念頭に定式化されている．漸近条件 **(AS 2)** は以下で述べる正規化積型の性質を基礎付けるため重要な条件である一方，$\vartheta = \vartheta_{a,\lambda}$ が **(AS 2)** を満たすかどうかを示すことは一般に難しい．漸近条件 **(AS 1)**–**(AS 3)** を用いた定式化をすると，Λ を離散スペクトルにもつ微分作用素 D(例えば，例えば正のラプラス作用素) が存在するかどうかに関わらず，“トレース $\mathrm{tr}\, e^{tD}$” に対応するテータ級数 ϑ_Λ の性質を調べることができる.

テータ級数 $\vartheta = \vartheta_{a,\lambda}$ についての条件 **(AS 1)**–**(AS 3)** に対応する，ゼータ正規化積に関する数列 $\{\lambda_k\}$ の条件を述べる.

<u>**Definition**</u> **2.2** 数列 $\{\lambda_k\}, \{a_k\}$ が条件 ***(DIR 1)–(DIR 3)*** を満たすとき，$\mathcal{D}_{a,\lambda}(s) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda^{-s}$ で定めた $\mathcal{D}_{a,\lambda}$ を ***Dirichlet* 型級数**と呼ぶ：

(DIR 1) 各 $c > 0$ に対し，$\#\{\lambda_k\ ;\ \Re(\lambda_k) \leq c\} < \infty$ が成り立つ.

(DIR 2) ある $\sigma_0 > 0$ が存在し，$[\sigma_0, \infty)$ 上で $\mathcal{D}_{a,\lambda}$ は絶対収束する．加えて，ある $\sigma_0 > 1$ が存在し，$[\sigma_1, \infty) \ni s \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s}$ は絶対収束する.

(DIR 3) ある $\varepsilon > 0$ が存在し，十分大きな全ての k に対し，$-\pi/2 + \varepsilon \leq \mathrm{Arg}(\lambda_k) \leq \pi/2 - \varepsilon$ を満たす.

条件 **(DIR 1)** のもと,

$$U_\lambda := \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k \geq 0} (-\infty, -\lambda_k]$$

上で $\mathcal{D}_{a,\lambda}(s)$ を調べる．ただし，$(-\infty, -\lambda_k]$ は $-\infty - \lambda_k$ と $-\lambda_k$ を結び $-\lambda_k$ を含む半直線とする．λ_k が全て正の実数であるとき，**(DIR 1)** は U_λ が $\mathbb{C}$ から非正の実軸 $(-\infty, 0]$ を抜いた領域であることをいう．条件 **(DIR 1)**–**(DIR 3)** と条件 **(AS 1)**–**(AS 3)** の間の関係を [5, Part I, Section 1, Remark 2] から一部抜粋する：

条件 (AS 1)$\rightsquigarrow$ **条件 (DIR 1)**. 条件 **(DIR 1)** は条件 **(AS 1)** の一部として仮定されている.

条件 (AS 1)–(AS 3)$\rightsquigarrow$ 条件 (DIR 1)–(DIR 3). $\vartheta = \vartheta_{a,\lambda}$ が条件 **(AS 1)–(AS 3)** を満たすと仮定する．このとき，Theorem 2.3 より，$\mathcal{D}_{a,\lambda}$ をガンマ関数 $\mathbf{\Gamma}$ で完備化した級数 (5) を得る．級数 (5) を $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続し，数列 $\{\lambda_k\}, \{a_k\}$ が条件 **(DIR 1)–(DIR 3)** を満たすことを示す．

条件 (DIR 1)–(DIR 3)$\rightsquigarrow$ 条件 (AS 1)–(AS 3). 数列 $\{\lambda_k\}, \{a_k\}$ が条件 **(DIR 1)–(DIR 3)** を満たすと仮定する．Theorem 2.3 より，対応するテータ級数 $\vartheta = \vartheta_{a,\lambda}$ が条件 **(AS 1)** と **(AS 3)** を満たすことが分かる．級数 (5) に対し，有理型関数に解析接続される仮定と，増大度に関する条件をさらに課すと，条件 **(DIR 1)–(DIR 3)** から $\vartheta = \vartheta_{a,\lambda}$ は条件 **(AS 2)** を満たすことが言える．詳細は [5, Part I, Section 7] を参照されたい．

Theorem 2.3 (cf. [5, Part I, Theorem 1.11]) $\vartheta = \vartheta_{a,\lambda}$ が条件 ***(AS 1)–(AS 3)*** を満たし，全ての $k \geq 1$ に対し $\Re(\lambda_k) > 0$ であることを仮定する．$\delta = 1$ としたときに条件 ***(AS 3)*** から存在をいえる $\alpha > 0$ をとる．このとき，$\Re(s) > \alpha$ に対し，$\mathcal{D}_{a,\lambda}(s)$ は絶対収束し，

$$\int_0^\infty (\vartheta_{a,\lambda}(t) - a_0) t^s \frac{dt}{t} = \mathbf{\Gamma}(s) \mathcal{D}_{a,\lambda}(s) \tag{5}$$

が成り立つ．特に，条件 ***(DIR 2)*** の意味で $\mathcal{D}_{a,\lambda}$ が絶対収束することが言える．

Theorem 2.4 (cf. [5, Part I, Theorem 1.12]) 数列 $\{\lambda_k\}, \{a_k\}$ が条件 ***(DIR 1)–(DIR 3)*** を満たすことを仮定する．このとき，$\vartheta = \vartheta_{a,\lambda}$ は条件 ***(AS 1)*** と ***(AS 3)*** を満たす．

3 Theta inversion formula

本節では，$\vartheta = \vartheta_{a,\lambda}$ が漸近条件 **(AS 1)–(AS 3)** を満たすと仮定する．まず ϑ を用いて正規化調和級数型を定義し，ゼータ正規化積 $\prod_{k=1}^\infty \lambda_k$ と関連する正規化積型という有理型関数のクラスについて少し触れる．$(0, \infty)$ 上の可測関数 f に対し，f の **Laplace–Mellin 変換**を

$$(\mathbf{LM}(f))(s, z) := \int_0^\infty f(t) e^{-zt} t^s \frac{dt}{t}$$

で定義する．

Theorem 3.1 (cf. [6, Chapter 1, Theorem 1.1]) (i). $\vartheta = \vartheta_{a,\lambda}$ が漸近条件 ***(AS 1)–(AS 3)*** を満たすとき，$(\mathbf{LM}(\vartheta))(s, z)$ は $(s, z) \in \mathbb{C} \times U_\lambda$ 上の有理型関数に解析接続される．ただし，

$$U_\lambda = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k \geq 0} (-\infty, -\lambda_k],$$

そして $(-\infty, -\lambda_k]$ は $-\infty - \lambda_k$ と $-\lambda_k$ を結び $-\lambda_k$ を含む半直線である．

(ii). 各 $z \in U_\lambda$ において，$s \mapsto (\mathbf{LM}(\vartheta))(s, z)$ の極は $-(p + n) \in \mathbb{C}$ という形で現れ，それぞれの極の位数は高々 $n_{\max}(p) + 1 = m(q) + 1$ である．ただし，$\Re(w) \leq \Re(p)$ を走る $w \in \{p_j\}$ に対し $n_{\max}(p) := \max_w \deg B_w$ とする．

(iii). 各 $z \in U_\lambda$ において，$t = 0$ における漸近展開 (4) に $|\log t|$ の冪の項が現れない *(ii)* の特別な場合に，$s \mapsto (\mathbf{LM}(\vartheta))(s, z)$ の極は全て単純極である．

このとき，U_λ 上の有理型関数

$$R(z) := \mathrm{CT}_{s=1} (\mathbf{LM}(\vartheta))(s, z)$$

が定まる．ただし，$\mathrm{CT}_{s=1} f(s)$ は $s = 1$ における $f(s)$ の定数項を表す．R を**正規化調和級数**と呼ぶ．**(AS 2)** の記号を用いて，正規化調和級数 $R(z)$ に対し整数の組 (M, m) を次の手順で定める：

- 与えられた数列 $\{p\} = \{p_0, p_1, \ldots\}$ に対し，M を $-\Re(p_0)$ を超えない最大の整数とする．
- ある $p_j \in \{p\}$ が存在し，

  $$\Re(p_j) = \Re(p_0) \in \mathbb{Z} \text{ は負の整数であり，そして } B_{p_j} \neq 0 \cdots\cdots (\dagger)$$

  を満たすとき，$m := m(p_0) + 1$ とおく．条件 $(\dagger)$ を満たす p_j が存在しない場合は $m := m(p_0)$ とおく．

(M, m) を $R(z)$ の**既約位数**と呼ぶ．$R(z)$ は，各 $z = -\lambda_k$ でその留数が a_k である単純極を持つ有理型関数である．

<u>Theorem</u> 3.2 (cf. [5, Part 1, Theorem 2.1] and [6, Chapter 1, Theorem 1.3]) $\{a_k\} \subset \mathbb{Z}$であると仮定する．このとき，**正規化積**と呼ばれる有理型関数 $D(z)$ が一意に存在し，

$$-\log D(z) = \mathrm{CT}_{s=0}(\mathbf{LM}(\vartheta))(s,z)$$

を満たす．そして，関係式

$$\frac{D'}{D}(z) = R(z)$$

が成り立つ．正規化積 D は, 各 $z = -\lambda_k$ で位数 a_k のゼロ点を持つ，有限位数の有理型関数である．

このとき，$\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $R(z)$ が**正規化調和級数型**であるとは，$R(z)$ が有限個の項の線型和

$$R(z) = \sum_j c_j R_j(\alpha_j z + \beta_j) + P'(z) + \sum_l \frac{c'_l}{z - \beta'_l}$$

として書けることをいう．ただし，

- 各 $R_j(z)$ は既約位数 (M_j, m_j) の正規化調和級数である．
- $P'(z)$ は多項式とする．
- $c_j, c'_l, \alpha_j, \beta_j, \beta'_l \in \mathbb{C}$ とする．
- 各組 (α_j, β_j) は，$R_j(\alpha_j z + \beta_j)$ の極が次のいずれかの領域 (i)–(iii) の有限個の和集合に属しているとする：
  (i). ある $\varepsilon_j > 0$ に対する，右側に開いた扇 $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ -\pi/2 + \varepsilon_j \le \mathrm{Arg}(z) \le \pi/2 - \varepsilon_j\}$.
  (ii). ある $\varepsilon_j > 0$ に対する，左側に開いた扇 $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \pi/2 + \varepsilon_j \le \mathrm{Arg}(z) \le 3\pi/2 - \varepsilon_j\}$.
  (iii). ある $a_j < b_j$ に対する，垂直に伸びた縦帯 $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ a_j < \Re(z) < b_j\}$.

正規化調和級数型の $R(z)$ の**既約位数** (M, m) を，$M := \max_j\{M_j\}$ と $m := \max\{m_j\ ;\ M_j = M\}$ で定義する．有理型関数 $D(z)$ が**正規化積型**であるとは，大雑把にいうと，全ての j と正整数 $k \ge 1$ に対し R_j に対応する数列 $\{(a^j)_k\}$ が $(a^j)_k \in \mathbb{Z}$ を満たし，そして $D(z)$ の対数微分が正規化調和級数型であることをいう．正規化積型 $D(z)$ に対する $D'/D(z) = R(z)$ という表示は，リーマンゼータ関数 ζ に関する Lerch の公式

$$\exp\left(-\frac{\partial\zeta}{\partial s}(s,x)\bigg|_{s=0}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\mathbf{\Gamma}(x)}$$

の対数をとったものに起源がある．ただし,$\zeta(s,x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+x)^{-s} = (\mathbf{\Gamma}(s))^{-1}(\mathbf{LM}(t \mapsto \sum_{j\ge 0} e^{-jt}))(s,x)$ は Hurwitz ゼータ関数を表す．Lerch の公式で特殊値 $x = 1$ をとると，ζ に対するゼータ正規化積 $\prod_{k=1}^{\infty} k = \exp(-\zeta'(0)) = \sqrt{2\pi}$ になることに注意する．

テータ級数 $\vartheta = \vartheta_{a,\lambda}$ について追加の条件を課し，正規化調和級数型の関数 $R(z)$ を用いてテータ反転公式を定義する．正整数 $N \ge 1$ に対し，$\vartheta = \vartheta_{a,\lambda}$ の **Gauss 変換** $\mathrm{Gauss}(\vartheta)$ と，$\mathrm{Gauss}(\vartheta)$ の N-階微分の定式化 $\mathrm{Gauss}^{(N)}(\vartheta)$ を

$$(\mathrm{Gauss}(\vartheta))(z) := 2z\int_0^{\infty} \vartheta(t)e^{-z^2t}dt, (\mathrm{Gauss}^{(N)}(\vartheta))(z) := 2z\int_0^{\infty} \vartheta(t)e^{-z^2t}t^{N+1}\frac{dt}{t}$$

で定める．このとき，

$$(\mathrm{Gauss}^{(N)}(\vartheta))(z) = 2z \cdot (\mathbf{LM}(\vartheta))(N+1, z^2)$$

が成り立つ．

テータ反転公式を定義するために必要な数列・多項式列の仮定を置く．数列 $\{q_l\} \subset \mathbb{R}$ が任意の正整数 $l \ge 1$ に対し $q_l > 1$ を満たし，$l \to \infty$ としたとき $q_l \to \infty$ に発散すると仮定する．$\{q_l\}$ に対し数列 $\{b_l\} \subset \mathbb{C}$ を，ある半平面上で級数 $s \mapsto \sum_l b_l q_l^{-s}$ が絶対収束するようにとる．多項式の列 $\{Q_l\}$ は，ある整数 $d = d_Q \in \mathbb{Z}$ が存在し，全ての $l \ge 1$ に対し $\deg Q_l \le d$ を満たすと仮定する．各 Q_l の係数の絶対値の最大を $\|Q_l\|$ と書き，全ての $l \ge 1$ に対し $\|Q_l\| \le |b_l|$ であると仮定する．このとき，各多項式 Q_l に対し，Q_l の双対多項式 $Q_l^{\vee}$ を

$$Q_l^{\vee}(x) := x^d Q_l(x^{-1})$$

で定める．写像 $Q_l \mapsto Q_l^{\vee}$ は $(Q_l^{\vee})^{\vee} = Q_l$ を満たす，$d = d_Q \in \mathbb{Z}$ の取り方に依存する対合である．数列 $\{\alpha_l\} \subset \mathbb{C}$ は，$\sup_l |\alpha_l| < \infty$ を満たすとする．このとき，反転テータ級数 $\tilde{\vartheta}^{\vee} = (\tilde{\vartheta}_{q,Q,d,b,\alpha})^{\vee}$ を

$$\tilde{\vartheta}^{\vee}(t) := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(4\pi t)^{\alpha_l}} Q_l\left(\frac{1}{4\pi t}\right) e^{-\frac{(\log q_l)^2}{4t}}$$

で定める．$\vartheta=\vartheta_{a,\lambda}$, $\tilde{\vartheta}^\vee=(\tilde{\vartheta}_{q,Q,d,b,\alpha})^\vee$, そしてある既約位数 (M,m) の正規化調和級数 $R(z)$ の間に，テータ反転公式が成り立つために必要な仮定を次で定める：

テータ反転公式についての基本条件

- テータ級数 $\vartheta(t)=\vartheta_{a,\lambda}(t)$ は漸近条件 **(AS 1)**–**(AS 3)** を満たす．Theorem 2.3 より，Dirichlet 型級数 $s\mapsto\mathcal{D}_{a,\lambda}(s)$ の絶対収束に関し，**(DIR 2)** を満たす定数 $\sigma_0>0$ が存在する．
- 反転テータ級数 $\tilde{\vartheta}^\vee(t)=(\tilde{\vartheta}_{q,Q,d,b,\alpha})^\vee(t)$ は全ての $t>0$ に対し絶対収束する．
- $R(z)$ に対し $\delta>0$, 十分大きな $a>0$ と $A>0$, そして分解 $R=R_{\mathrm{left}}+R_{\mathrm{right}}$ が存在し，R_{left} の極は全て左半平面 $\{z\in\mathbb{C}\ ;\ \Re(z)\le A-\delta-\sigma_0/2\}$ に属し，R_{right} の極は全て右半平面 $\{z\in\mathbb{C}\ ;\ \Re(z)>-a+\delta+\sigma_0/2\}$ に属する．
- $\vartheta,\tilde{\vartheta}^\vee,R$ は次の反転公式

$$e^{\sigma_0^2t/4}\vartheta(t)=\tilde{\vartheta}^\vee(t)+E_AR_{\mathrm{left}}^{(\sigma_0/2)}(t)+E_{-a}R_{\mathrm{right}}^{(\sigma_0/2)}(t) \tag{6}$$

  を満たす．ただし，$R_{\mathrm{left}}^{(\sigma_0/2)}(z):=R_{\mathrm{left}}(z+\sigma_0/2)$, $R_{\mathrm{right}}^{(\sigma_0/2)}(z):=R_{\mathrm{right}}(z+\sigma_0/2)$ とし，$u\in\{A,-a\}$ に対して E_uR は

$$E_uR(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{u-iT_n}^{u+iT_n}e^{z^2t}R(z)dz$$

  で定まる R の変換とする．数列 $\{T_n\}\subset\mathbb{R}$ は， 有限位数の有理型関数に対する Theorem 3.3 により与えられる．

Theorem 3.3 (cf. [6, Chapter I, Theorem 6.2 (b)]) $R(z)$ は既約位数 (M,m) の正規化調和級数型であるとする．ある $a<b$ が存在し，$R(z)$ の可算無限個の極は $\{z\in\mathbb{C}\ ;\ a<\Re(z)<b\}$ に属すると仮定する．このとき，$n\to\infty$ において $T_n\to\infty$ となる数列 $\{T_n\}\subset\mathbb{R}$ が存在し，全ての $x\in(a,b)$ に対し次の一様漸近関係式

$$R(x\pm iT_n)=O(T_n^M(\log T_n)^{m+1})$$

が $T_n\to\infty$ で成り立つ．

Remark 3.4 テータ級数が $\vartheta(t)=\sum_{k=1}^\infty e^{-kt}$ であるとき，言い換えると *Dirichlet* 型級数がリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ であるとき，対応する正規化調和級数 $R(z)$ は

$$R(z)=\frac{1}{2}\frac{\mathbf{\Gamma}'}{\mathbf{\Gamma}}\left(\frac{z}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\mathbf{\Gamma}'}{\mathbf{\Gamma}}\left(\frac{1-z}{2}\right)-\log\pi$$

と書ける．このとき，$R_{\mathrm{left}}(z)$ は

$$R_{\mathrm{left}}(z)=\frac{1}{2}\frac{\mathbf{\Gamma}'}{\mathbf{\Gamma}}\left(\frac{z}{2}\right)-\log\pi,$$

$R_{\mathrm{right}}(z)$ は

$$R_{\mathrm{right}}(z)=\frac{1}{2}\frac{\mathbf{\Gamma}'}{\mathbf{\Gamma}}\left(\frac{1-z}{2}\right)$$

と書ける．

$\vartheta,\tilde{\vartheta}^\vee,R$ についての基本条件を満たすテータ反転公式の代表例として，スペクトル理論と微分幾何から複素半単純 Lie 群に対する対称空間上のテータ関係式 [4, Proposition 4.6] を Jorgenson–Lang の枠組みで述べる．

Example 3.5 *[4]* では G を非コンパクト複素半単純 *Lie* 群，$K\subset G$ を極大コンパクト部分群として以下の議論をするが，簡単のため $G=SL(n,\mathbb{C})$ と $K=SU(n)$ とする．ここで用いる記号について，詳しくは *5* 節で述べる．G と K にそれぞれ対応する *Lie* 環を $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{k}$ として，*Cartan* 分解を $\mathfrak{g}=\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{k}$ と書く．極大可換部分代数 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$ を，対応する部分群 $A\subset G$ が $G=KAK$ を満たすように取る．G は複素 *Lie* 群だから，対称空間 G/K に付随する *Gangolli* の *heat Gaussian* $g_t(14)$ は $a\in A$ に対し次の表示

$$g_t(a)=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{\dim_{\mathbb{R}}(G/K)}{2}}}e^{-\frac{|\log a|^2}{4t}}e^{-\frac{\sigma_0^2}{4}t}j(a)$$

を持つ．ただし，$\sigma_0:=|\rho|$ とおき，$j(a)$ は指数写像の *Jacobi* 行列式の商であり，

$$j(a)=\prod_{\alpha\in\Sigma^+}j_\alpha(a),\ j_\alpha(a)=\frac{2\pi}{\langle\alpha,\rho\rangle}\frac{\alpha(\log a)}{\sinh(\alpha(\log a))}$$

と書ける．このとき，G/K に作用する，固定点を持たないココンパクト離散部分群 $\Gamma_{\mathrm{cc}} \subset G$ が与えられたとする．$M := \Gamma_{\mathrm{cc}} \backslash G/K$ とおく．コンパクトリーマン多様体 M に対し，$\tilde{M} := G/K$ は単連結であるから，Γ_{cc} は M の基本群となることに注意する．$x, y \in M$ に対し，これらの被覆空間 $\tilde{M}$ への持ち上げをそれぞれ $\tilde{x}, \tilde{y}$ と書く．g_t の両側-K 不変性を使うと，$h_1, h_2 \in G$ に対し，$\tilde{M}$ 上の半群 $t \mapsto \mathbf{K}_t^{\tilde{M}}$ が

$$\mathbf{K}_t^{\tilde{M}}(h_1K, h_2K) = g_t(h_2^{-1}h_1)$$

によって定まる．$\tilde{M}$ は単連結であるから，M 上のガウス核

$$\mathbf{K}^M(t, x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathrm{cc}}} \mathbf{K}_t^{\tilde{M}}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

を得る．ここで，M 上の正ラプラス作用素を Δ_M と書く．M はコンパクトだから，ある正規直交基底 $\{\varphi_k\} \subset L^2(M)$ と，対応する Δ_M の固有値の列 $\{\lambda_k\}$ が存在し，$\mathbf{K}^M$ の固有関数展開

$$\mathbf{K}^M(t, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)\bar{\varphi}_k(y)e^{-\lambda_k t}$$

が成り立つ．

異なる二点 $x, y \in M$ に対し，テータ反転公式についての基本条件に沿って，次の記号を準備する：

$$\begin{aligned}
&\{\log q_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma_{\mathrm{cc}}} = \{\log q_\gamma(\tilde{x}, \tilde{y})\}_{\gamma \in \Gamma_{\mathrm{cc}}} = \{|\log a(\gamma\tilde{x}, \tilde{y})|\}_{\gamma \in \Gamma_{\mathrm{cc}}},\\
&\mu_k = \lambda_k - \frac{\sigma_0^2}{4},\\
&\vartheta(t) = \vartheta_{(x,y)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)\bar{\varphi}_k(y)e^{-\mu_k t} = e^{\frac{\sigma_0^2}{4}t}\mathbf{K}^M(t, x, y),\\
&G(\gamma\tilde{x}, \tilde{y}) = j(a(\gamma\tilde{x}, \tilde{y})),\ \tilde{\vartheta}^\vee(t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{\dim_{\mathbb{R}} M}{2}}} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathrm{cc}}} G(\gamma\tilde{x}, \tilde{y})e^{-\frac{(\log q_\gamma)^2}{4t}}.
\end{aligned}$$

ただし，$g, h \in G$ を用いて $\tilde{x} = gK, \tilde{y} = hK$ と書いたとき，分解 $G = K\overline{A^+}K$ に沿って一意に定まる $h^{-1}\gamma g \in G$ の $\overline{A^+}$-成分の元を $a(\gamma\tilde{x}, \tilde{y}) := \mathrm{Crt}_{\overline{A^+}}(h^{-1}\gamma g) \in A$ と書き，各 $a \in A$ に対し $|\log a| := \sqrt{\langle \log a, \log a\rangle}$ とした．このとき，反転公式 (6) は

$$\vartheta(t) = \tilde{\vartheta}^\vee(t),\ \text{具体的には} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)\bar{\varphi}_k(y)e^{-\mu_k t} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{\dim_{\mathbb{R}} M}{2}}} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathrm{cc}}} G(\gamma\tilde{x}, \tilde{y})e^{-\frac{(\log q_\gamma)^2}{4t}}$$

と書ける．

Example 3.6 *Example* 3.5 で用意した記号を踏襲し，$x = y$ の場合を考える．$e \in G$ を単位元とする．$\gamma = e$ と $\gamma \neq e$ の寄与を分けて取り扱うことにより，この場合，テータ反転公式 (6) は

$$\vartheta_{(x,x)}(t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{\dim_{\mathbb{R}} M}{2}}} \sum_{e \neq \gamma \in \Gamma_{\mathrm{cc}}} G(\gamma\tilde{x}, \tilde{x})e^{-\frac{(\log q_\gamma)^2}{4t}} + g_t(e) \tag{7}$$

という表示を持つ．ここで，$g_t(e) = (4\pi t)^{-\dim_{\mathbb{R}} M/2} j(e)e^{-\sigma_0^2 t/4}$ はテータ級数 $\vartheta_{(x,x)}(t)$ に対する正規化調和級数 $R(z) = R_{\mathrm{left}}(z) + R_{\mathrm{right}}(z)$ に関する変換 $E_A R_{\mathrm{left}}(t)$ および $E_{-a} R_{\mathrm{right}}(t)$ を用いて表せること，そしてこの $R(z)$ はガンマ関数 $\mathbf{\Gamma}$ の商として書けることに注意する．反転公式 (7) の両辺を $x \in M$ 上で積分すると，Γ_{cc} に対する公式 *[4, Proposition 4.6, equation (4.11)]* と一致する

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu_k t} = g_t(e)\,\mathrm{Vol}(M) + \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{\dim_{\mathbb{R}} M}{2}}} \int_M \sum_{e \neq \gamma \in \Gamma_{\mathrm{cc}}} G(\gamma\tilde{x}, \tilde{x})e^{-\frac{(\log q_\gamma)^2}{4t}} dx \tag{8}$$

が得られる．

4 Additive functional equation

テータ反転公式 (6) にガウス変換を施すことにより，加法的な関数方程式のクラスが得られる．リーマンゼータ関数 ζ の関数等式の導出ではテータ反転公式の Mellin 変換を考えるが，ζ の場合に加法的な関数方程式とはテータ反転公式の Mellin 変換を対数微分のことを指すものである．古典的な解析的整数論およびスペクトル理論において多くの場合，ゼータ関数の重要な性質はこのような Mellin 変換の対数微分による表示から導出される．テータ関数の反転公式のガウス変換として加法的な関数等式を考えることは，対応するテータ関数の Mellin 変換の対数微分が存在しない場合にも，例えばゼータ正規化積をはじめとするゼータ関数を解析することを可能にする．Definition 4.1 で定める記号 $(Z, \tilde{Z}, \Phi)$ を用いると，テータ反転公式を経由する加法的な理論から得られる結論の一つとして，正規化積型の有理型関数 Φ の性質から主要部のゼータ関数 Z が帰納的に決まることが挙げられる．特に加法的な関数等式の理論は，Φ の非自明なゼロ点・極が，Z の完備化された関数等式では "自明な" ゼロ点・極になるという仕組みを明らかにする．

本稿ではテータ反転公式に焦点を絞るため，加法的な関数等式についてはゼータ関数の基本的クラスの定義 Definition 4.1 を与え，テータ級数を用いる帰納的なゼータ関数の構成を述べるにとどめる．したがって，加法的な関数等式に関する基本的なクラスがテータ反転公式を導くことについては [6, Chapter IV] を，逆にテータ反転公式を満たすテータ級数にガウス変換 $f \mapsto (z \mapsto 2z\int_0^\infty e^{-z^2 t} f(t)dt)$ を施すと加法的な関数等式を持つ Dirichlet 型級数が得られることの証明については [6, Chapter V] をそれぞれ見て欲しい．位数有限の有理型関数 $Z(s), \tilde{Z}(s)$ が **Euler 和**と**関数等式**を持つことを次の条件で定義する：

Euler 和: Z に依存し $q > 1$ を満たす実数列 $\{q\} = \{q_i\}$ と，$\tilde{Z}$ に依存し $\tilde{q} > 1$ を満たす実数列 $\{\tilde{q}\} = \{\tilde{q}_i\}$ が存在し，$i \to \infty$ において $q_i, \tilde{q}_i \to \infty$ であるとする．このとき，各 q と $\tilde{q}$ に対しある $c(q), c(\tilde{q}) \in \mathbb{C}$ とある $\sigma_0' \geq 0$ が存在し，$\Re(s) > \sigma_0'$ の領域で

$$\log Z(s) = \sum_q \frac{c(q)}{q^s}, \tag{9}$$

$$\log \tilde{Z}(s) = \sum_{\tilde{q}} \frac{c(\tilde{q})}{\tilde{q}^s} \tag{10}$$

が成り立つとする．さらに，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，級数 (9) と (10) は半平面 $\{s \in \mathbb{C}\ ;\ \Re(s) \geq \sigma_0' + \varepsilon\}$ 上で一様かつ絶対収束すると仮定する．

関数等式: ある位数有限の有理型関数 $G, \tilde{G}$ とある $0 \leq \sigma_0 \leq \sigma_0'$ が存在し，等式

$$Z(s)G(s) = \tilde{Z}(\sigma_0 - s)\tilde{G}(\sigma_0 - s) \tag{11}$$

を満たす．

Euler 和と関数等式を持つ $(Z(s), \tilde{Z}(s))$ に対し，位数有限の有理型関数 Φ を

$$\Phi(s) := \frac{G(s)}{\tilde{G}(\sigma_0 - s)}$$

で定めると，等式 (11) から表示 $Z(s)\Phi(s) = \tilde{Z}(\sigma_0 - s)$ を得る．

Definition 4.1 組 $(Z, \tilde{Z}, \Phi)$ が加法的な関数等式を満たす**基本的なクラス**であるとは，位数有限の有理型関数の組 $(Z, \tilde{Z})$ が *Euler* 和と関数等式を持ち，有理型関数 $G, \tilde{G}, \Phi$ が正規化積型であることをいう．

基本的なクラス $(Z, \tilde{Z}, \Phi)$ が与えられたとき，Z から正規化積型有理型関数を持つ新たな Dirichlet 型級数を帰納的に得る手順を大まかに述べる．まず，Euler 和についての表示 (9) を使うと，ある数列 $\{a_l\}, \{\lambda_l\} \subset \mathbb{C}$ が存在し $Z(s)$ は Dirichlet 型級数としての表示 $\mathcal{D}_{a,\lambda}(s)$ を持つ．$\{\rho_k\}$ は虚部が正の $Z(s)$ のゼロ点を走るとする．各 ρ_k の重複度を a_k' と書く．$\lambda_k' := -i\rho_k$ とおき，数列 $\{\lambda_k'\}$ を得る．このとき，[6, Chapter II] において $\vartheta_{a',\lambda'}$ は正規化積を持つことが示される．以上の手順から，与えられた基本的なクラスの要素の Z，言い換えると与えられた $\{\lambda_l\}$ に基づいて，テータ級数 $\vartheta_{a',\lambda'}$ についての議論を経て，$\vartheta_{a',\lambda'}$ に対応する Dirichlet 型級数 $\mathcal{D}_{a',\lambda'}$ を構成する．

5 Main result

$G = SL(n, \mathbb{C})$, $K = SU(n)$, そして $\Gamma = SL(n, \mathbb{Z}[i])$ とする．テータ反転公式を用いて基本的なクラスのゼータ関数が持つ加法的な関数等式を帰納的に構成する理論に基づき，Jorgenson–Lang は小節 5.2

で述べる五つの手順 (イ)–(ホ) を提示し，対称空間 G/K 上の Gangolli の heat Gaussian g_t からゼータ関数の加法的な関数等式を系統的に導出するプログラムを提唱した．このプログラムの詳細について [9] を参照されたい．[8] では，$n=2$ のときに対称空間と算術的離散部分群の組 $(G/K,\Gamma)$ に対して，手順 (イ)–(ニ) を実行し，いくつかのテータ関数の間の関係式を導出した．特に，関係式に現れるテータ級数の一つが Dedekind ゼータ関数 $\zeta_{\mathbb{Q}(i)}$ に対応することを指摘した．しかし，この関係式に現れる全ての項をテータ反転公式の枠組みで解釈することが可能であるかは知られていない．そのため，手順 (ホ) を実行し得られる $\zeta_{\mathbb{Q}(i)}$ の対数微分と他のいくつかの項の間の関係式が，加法的なゼータ関数の関数等式と言えるか明らかではない．

本稿で提案する $n=2$ の場合のテータ反転関係式 (12) とは，ある核関数の対角成分を $\mathbf{o}=K\in G/K$ の近傍 $\mathfrak{F}^{\leq}_{Y,\varepsilon;\delta}$ 上で積分し，$\mathfrak{F}^{\leq}_{Y,\varepsilon;\delta}$ の測度でスケーリングすることで得られるプレトレースの極限 $(Y,\varepsilon,\delta)\to(1,0,(0,0))$ をいう．特に， Example 3.6 で考えられているテータ反転公式として [4, Proposition 4.6, equation (4.11)] を再解釈した表示 (8) と比較すると，反転関係式 (12) は Γ_{cc} を非ココンパクトな Γ に置き替えた等式として見做すことができる．ただし，対応する正規化調和級数 $R(z)$ の存在はまだ明示的に与えられていない．テータ反転関係式および 5.2 節で触れる局所的なプレトレースを考える利点は，積分の発散に関する問題が生じないこと，そして正規化されたトレースに現れる，例えば $\zeta_{\mathbb{Q}(i)}$ の対数微分などの重要な項を抽出できる点にある．その抽出方法を，5.2 節では手順 (ホ) から導出される関係式との関連に言及しつつ説明する．

$n=2$ とする．Γ を cuspidal な元からなる集合 $\Gamma^{\mathrm{Cus}}:=\left\{\gamma\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & a^{-1}\end{smallmatrix}\right)\gamma^{-1}\ ;\ \gamma\in\Gamma,\ a\in\mathbb{Z}[i]^{\times},\ b\in\mathbb{Z}[i]\right\}$，および cuspidal ではない元全体 $\Gamma^{\mathrm{NC}}:=\Gamma\setminus\Gamma^{\mathrm{Cus}}$ に分割する．$g\in G$ が与えられたとき，岩澤分解に関して $\mathrm{diag}[y(g),y(g)^{-1}]:=\mathrm{Iw}_A(g)$ とおき，$y(g)\geq 0$ を定める．Jacobi のテータ関数を $\vartheta_{\mathrm{J}}(z,\tau)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{m^2\pi i\tau}e^{2m\pi iz}$ と書く．各 $k=\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar\beta & \bar\alpha\end{smallmatrix}\right)\in SU(2)$ に対し $\mathrm{tr}(k)=\alpha+\bar\alpha$ を行列のトレースとする．

Proposition 5.1 (Main result) $t>0$ とする．このとき，*Theorem* 5.5 の記号のもと，

$$
\begin{aligned}
&\int_K\sum_{\gamma\in\Gamma}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}e^{-(r^2+1)\frac{t}{2}}e^{(ri+1)\log y(k\gamma k^{-1})}\frac{r^2dr}{2\pi^2}\right)\\
&\cdot\left(-\frac{e^{\frac{t}{8}}}{4\sin\mathrm{Arccos}(\mathrm{tr}(k')/2)}\partial_z\vartheta_{\mathrm{J}}\left(\frac{\mathrm{Arccos}(\mathrm{tr}(k')/2)}{2\pi},\frac{it}{8\pi}\right)\right)\Bigg|_{k'=\mathrm{Iw}_K(\sqrt{k\gamma(\sigma(k\gamma))^{-1}})\,\mathrm{Crt}_K(\gamma)\,\mathrm{Crt}'_K(\gamma)}dk\\
&=\sum_{\gamma\in\Gamma^{\mathrm{Cus}}}\rho_t^G(\gamma)+\sum_{\gamma\in\Gamma^{\mathrm{NC}}}\rho_t^G(\gamma).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

が成り立つ．

一般の $n\geq 2$ では，熱核 ρ_t^G(15) を Γ で周期化した関数に対して，各正ルート $\alpha\in\Sigma^+$ で添字づけられた因子 ρ_t^α の展開，そして Γ の元の Jordan 標準形に関する共役類の分類を追加で行う必要がある．

5.1 Notation

$\sigma:\ G\to G$ は，$K=G^\sigma$ を満たす Cartan 対合とする．G と K に対応する Lie 代数をそれぞれ $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ と $\mathfrak{k}=\mathfrak{su}(n)$ と書く．$\mathfrak{g}$ 上の Lie 括弧積を $[\cdot,\cdot]$ と書く．$X,Y\in\mathfrak{g}$ に対し，$\mathfrak{g}$ 上の $\mathfrak{g}$ の随伴表現 ad を用いて Killing 形式 $B(X,Y)=2\,\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(\mathrm{ad}(X)\circ\mathrm{ad}(Y))$ を定義する．左平行移動により，$\mathfrak{g}$ 上の内積 $(X,Y)\mapsto -B(X,\sigma(Y))$ は G 上のリーマン計量 (g_{ij}) を定める．G 上の Haar 測度は (g_{ij}) から誘導される体積形式として定まる．このとき，G 上の Casimir 作用素と正の Laplace 作用素をそれぞれ ω_G と Δ_G で書き表す．ただし，Killing 形式 B は ω_G を，リーマン計量 (g_{ij}) は Δ_G をそれぞれ誘導する．Δ_G に対する熱作用素を $L_\Delta=\partial_t+\Delta_G$ と書く．

Definition 5.2 $t>0$ とする．L_Δ に対する熱方程式の熱核 $\rho_t^G=\rho_t^G(g)\in L^2(G)$ とは，L^2-*Cauchy* 問題の基本解をいう：

$$
L_\Delta\rho_\bullet^G=0,\ \|\rho_t^G*f-f\|\overset{t\to 0+}{\longrightarrow}0.
\tag{13}
$$

ただし，$f\in C_c^\infty(G)$ はコンパクト台を持つ滑らかな関数，$\rho_t^G*f(x)=\int_G\rho_t^G(g)f(xg^{-1})dg$ は畳み込み積とする．

次に，ユークリッド空間上のガウス核の球変換として，G 上の Gangolli の heat Gaussian g_t を定める．$L_\omega:=\partial_t-2\omega_G$ とおくと，$t\mapsto g_t$ は L_ω に対する L^2-Cauch 問題 (13) の類似の解となる半群である．g_t を具体的に書き下すために，記号を準備する．

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ を σ-安定な Cartan 部分代数とする．$\mathfrak{h}$ に関する $\mathfrak{g}$ のルート系をとり，正ルートの集合 Σ^+ を一つ固定し，対応する Weyl 群を $W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ と書く．W の位数を $|W|$ と書き表す．σ に関する Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ と書き，$\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ を極大可換部分代数，$\mathfrak{a}^*$ をその双対とする．Killing 形式 B から定まる $\mathfrak{a}^* \oplus i\mathfrak{a}^*$ 上の双線型形式を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と記す．正ルートの集合 Σ^+ に対し，Weyl の部屋を $\mathfrak{a}_+ \subset \mathfrak{a}$, ルート部分空間 $\mathfrak{g}_\alpha$ で張られる冪ゼロ部分代数を $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha$ と書く．$\rho := \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha$ とおく．$A \subset G$ と $N \subset G$ をそれぞれ $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{n}$ に対応する解析的部分群とし，岩澤分解 $G = NAK$ を得る．双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が定めるノルムに関する $\mathfrak{a}_+ \subset \mathfrak{a}$ の閉包に対応する部分集合を $\overline{A^+} \subset A$ と書き，$G = K\overline{A^+}K$ を Cartan 分解と呼ぶ．Iw_A と Iw_K をそれぞれ $G = NAK$ から A と K への射影とする．各 $g \in G$ に対し，$g = k_1 a k_2 \in K\overline{A_n^+}K$ が与えられたとき $\mathrm{Crt}_K(g) := k_1$, $\mathrm{Crt}'_K(g) := k_2$, そして $\mathrm{Crt}_{\overline{A^+}}(g) := a$ とおく． ここで，$k \in K$ に対し，$\mathrm{Crt}_{\overline{A^+}}(k) := e, \mathrm{Crt}_K(k) := k$, そして $\mathrm{Crt}'_K(k) := e$ と定める．各 $g \in G$ に対し，$\mathrm{Crt}_{\overline{A^+}}(g)$ が一意に決まる他，$\mathrm{Crt}_K(g)\,\mathrm{Crt}'_K(g)$ と $\mathrm{Crt}_K(g)\,\mathrm{Crt}_{\overline{A^+}}(g)(\mathrm{Crt}_K(g))^{-1}$ も一意に定まる．指数写像を $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ と記す．各 $a \in A$ に対し，$a = \exp H$ を満たす元 $H \in \mathfrak{a}$ が一意に存在するため，$\log a := H$ とおく．各 $\lambda \in \mathfrak{a}^* \oplus i\mathfrak{a}^*$ に対応する球関数を

$$\varphi_\lambda(g) = \int_K e^{(\rho+\lambda)(\log \mathrm{Iw}_A(kg))} dk$$

と書く． $i\mathfrak{a}^*$ 上の Harish-Chandra の $\mathbf{c}$-関数を $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\lambda)$ と書く．$\mathbf{c}(\lambda)$ は $i\mathfrak{a}^*$ 上にゼロ点を持たず，$\mathbf{c}$ の積公式

$$\mathbf{c}(\lambda) = C_0 \prod_\alpha \frac{2^{-\langle \lambda, \alpha_0 \rangle} \boldsymbol{\Gamma}(\langle \lambda, \alpha_0 \rangle)}{\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{m_\alpha}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\langle \lambda, \alpha_0 \rangle}{2}\right) \boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{m_\alpha}{4} + \frac{m_{2\alpha}}{2} + \frac{\langle \lambda, \alpha_0 \rangle}{2}\right)}$$

が成り立つ．ただし，α は Σ^+ を渡り，$\alpha_0 := \alpha / \langle \alpha, \alpha \rangle$ とおき，定数 C_0 は $\mathbf{c}(-i\rho) = 1$ を満たすようにとる．

Proposition 5.3 (cf. [4, Proposition 3.1]) $x \in G$ に対し，*Gangolli* の *heat Gaussian* を

$$g_t(x) = \frac{1}{|W|} \int_{i\mathfrak{a}_n^*} e^{(\langle \lambda, \lambda \rangle - \langle \rho, \rho \rangle)t} \varphi_\lambda(x) \frac{d\lambda}{|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2} \tag{14}$$

で定める．このとき，g_t は $L_\omega g_t(x) = 0$，そして球関数 $f \in C_c^\infty(G)$ に対し $\|g_t * f - f\|_{L^2} \overset{t \to 0+}{\longrightarrow} 0$ を満たす．

次に，K 上の熱核 ρ_t^K を考える．Lemma 5.4 より，ρ_t^K は実トーラスの熱核と類似した積表示を持つことがわかる．$B_\mathfrak{k} = 2^{-1} B|_\mathfrak{k}$ を $\mathfrak{k}$ 上の Killing 形式とし，ω_K を $B_\mathfrak{k}$ に対応する Casimir 作用素とする．$B_\mathfrak{k}$ は K 上のリーマン構造を定める．そのため，それぞれ正の Laplace 作用素と K の体積をそれぞれ $\Delta_K, \mathrm{vol}(K)$ と書く．このとき，$\Delta_K = \omega_K$ と $\Delta_G = -\omega_G + \omega_K$ が成り立つ．

$\mathfrak{t} := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ とおき，$T \subset K$ を $\mathfrak{t}$ に対応する極大トーラスとする．各 $t \in T$ に対し，$H \in \mathfrak{t}$ が一意に存在し $t = \exp H$ を満たすので，$\log t := H$ と記す．$\alpha \in \Sigma^+$ に対し，$\alpha_\mathfrak{k}(t) := \alpha(\log t)$ とおく．このとき，K の元の対角化をとることで，$\alpha_\mathfrak{k}$ は K 上に延びる．Σ^+ に属する元の個数を $\mu_n = n(n-1)/2$，そして K のランクを $l_n = n - 1$ と書く．

Lemma 5.4 (cf. [3, Theorem 1.1]) $\mathrm{vol}(K)$ に依存する定数 $\mathbf{h}_n > 0$ が存在し，

$$\rho_t^K(k) = \mathbf{h}_n e^{\frac{2\mu_n + l_n}{24} t} \left(-\vartheta'\left(\frac{t}{8}\right)\right)^{-\frac{\mu_n - l_n}{3}} \prod_{\alpha \in \Sigma^+} -\frac{\partial_z \vartheta\left(\frac{\alpha_\mathfrak{k}(k)}{2}, \frac{t}{8} i\right)}{\sin \pi \alpha_\mathfrak{k}(k)}$$

が成り立つ．

ここで，$\vartheta_\mathrm{J}(z, \tau) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{m^2 \pi i \tau} e^{2m\pi i z}$ は Jacobi のテータ関数とし，$\vartheta(t) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-m^2 t}$ とおく．

以上の記号を用いて，熱核 ρ_t^G は正ルートを走る積として書けることを述べる：

Theorem 5.5 ([10] in preparation) $t>0,\ g\in G,\ k\in K$ と $\alpha\in\Sigma^+$ に対し，

$$\begin{aligned}
\sqrt{g(\sigma(g))^{-1}} &:= \mathrm{Crt}_K(g)\,\mathrm{Crt}_{\overline{A^+}}(g)(\mathrm{Crt}_K(g))^{-1},\\
\rho_t^\alpha(g,k) &:= \Psi_t^\alpha(k\sqrt{g(\sigma(g))^{-1}}k^{-1})\rho_t^{K_2,\alpha}((\mathrm{Iw}_K(\sqrt{kg(\sigma(kg))^{-1}})\,\mathrm{Crt}_K(g)\,\mathrm{Crt}'_K(g))^{-1}),\\
\Psi_t^\alpha(g) &:= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(r^2+\frac{m_\alpha^2}{4}\right)\frac{\langle\alpha,\alpha\rangle t}{2}} e^{\left(ri+\frac{m_\alpha}{2}\right)\alpha(\log \mathrm{Iw}_A(g))}\\
&\quad\times\left|\frac{\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m_\alpha}{2}+1+ri\right)\right)\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m_\alpha}{2}+m_{2\alpha}+ri\right)\right)}{2^{-ri}\boldsymbol{\Gamma}(ri)}\right|^2 dr,\\
\rho_t^{K_2,\alpha}(k) &:= -\frac{e^{\frac{t}{8}}}{4\sin\pi\alpha_{\mathfrak{k}}(k)}\partial_z\vartheta\left(\frac{\alpha_{\mathfrak{k}}(k)}{2},\frac{it}{8\pi}\right).
\end{aligned}$$

とおく．このとき熱核 ρ_t^G は

$$\rho_t^G(g)=\frac{C_0\mathbf{h}_n}{|W|}2^{3\mu_n}e^{\frac{l_n-\mu_n}{24}t}\left(-\vartheta'\left(\frac{t}{8}\right)\right)^{-\frac{\mu_n-l_n}{3}}\int_K\prod_{\alpha\in\Sigma^+}\rho_t^\alpha(g,k)dk \tag{15}$$

という表示を持つ．

ただし，重複度 m_α は $m_\alpha=\dim\mathfrak{g}_\alpha=2,\ m_{2\alpha}=0$ を満たす．

5.2 Another limit of the pre-trace

$G=SL(n,\mathbb{C})$ とする．五つの手順 (イ)–(ホ) に従い，$\Gamma\backslash G/K$ に対する (Selberg 型) ゼータ関数 $\mathcal{Z}_\Gamma(s)$ の関数等式を導出できる，と Jorgenson–Lang は提唱している．より一般の G に対する考察および各手順の詳細について，[9] およびそこで参照されている文献を見て欲しい：

(イ): G/K 上の heat Gaussian $\mathbf{K}^{G/K}(t,xK,yK)=g_t(y^{-1}x)$ から始める．

(ロ): $\mathbf{K}^{G/K}$ を Γ に関して周期化し，$(t,gK,hK)\mapsto\mathbf{K}^{\Gamma\backslash G/K}(t,gK,hK)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\mathbf{K}^{G/K}(t,gK,\gamma hK)$ を得る．

(ハ): 固有関数を用いて，$\mathbf{K}^{\Gamma\backslash G/K}$ を展開する．

(ニ): $(t,g)\mapsto\mathbf{K}^{\Gamma\backslash G/K}(t,gK,gK)$ からテータ級数表示 $\sum_{k=0}^{\infty}a_ke^{-\lambda_kt}$ $(a_k\in\mathbb{C},\ 0<\lambda_k\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}\infty)$ を得るため，$\Gamma\backslash G$ 上の積分で発散する項を正規化する．

(ホ): ガウス変換 $f\mapsto(z\mapsto 2z\int_0^\infty e^{-z^2t}f(t)dt)$ を適用し (Selberg 型) ゼータ関数 $\mathcal{Z}_\Gamma$ を得る．

手順 (イ)–(ホ) の導入を動機付ける例として，$\mathbb{R}$ 上のガウス核から Riemann ゼータ関数 ζ の関数等式を導出する Example 5.6 がある．

Example 5.6 ガウス核と呼ばれる $\mathbb{R}$ 上の熱核 $\mathbf{K}^{\mathbb{R}}$ から *Riemann* ゼータ関数 ζ を導出することができる．*Jorgenson–Lang* のプログラムと比較するため，ζ の導出を *5* つの手順に分ける：

(イ): $\mathbb{R}$ 上の熱核は，$\mathbf{K}^{\mathbb{R}}(t,x,y)=(2\pi t)^{-1/2}e^{-(x-y)^2/2t}$ と書ける．

(ロ): $\Gamma=2\pi\mathbb{Z}$ に関して $K^{\mathbb{R}}$ を周期化し，$\mathbf{K}^{\Gamma\backslash\mathbb{R}}(t,x,y)=(2\pi t)^{-1/2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-(x-y-2m\pi)^2/2t}$ を得る．

(ハ): 固有関数 $\{x\mapsto e^{imx}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ に関して $(t,x)\mapsto\mathbf{K}^{\Gamma\backslash\mathbb{R}}(t,0,x)$ を *Fourier* 級数展開すると *Poisson* の反転公式

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{(x-2m\pi)^2}{2t}}=\frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{m^2t}{2}}e^{imx}$$

が得られる．

(ニ): $x=0$ を代入すると，テータ反転公式として *Poisson* 和公式 $(2\pi t)^{-1/2}\theta(2/t)=\theta(t/2)$ が成り立つ．ただし，$\theta(t)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-m^2t}$ とする．

(ホ): *Mellin* 変換 $f\mapsto(s\mapsto\int_0^\infty f(t)t^{s-1}dt)$ を適用すると，$\xi(s):=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ に対し，ζ の関数等式 $\xi(s)=\xi(1-s)$ を得る．

以降，$n=2$ とする．ここでは，手順 (ハ) から始める．$L^2(\Gamma\backslash G/K)$ を離散スペクトルと連続スペクトルに分解し $L^2(\Gamma\backslash G/K)=L^2_{\mathrm{discr}}(\Gamma\backslash G/K)\oplus L^2_{\mathrm{conti}}(\Gamma\backslash G/K)$ と書いたとき，$\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ を Casimir 作用素 ω_G の固有関数 ψ_j からなる $L^2_{\mathrm{discr}}(\Gamma\backslash G/K)$ の正規直交基底とする．各 ψ_j に対し固有値 $\lambda_j>0$ が対応にしているとする．他方，$L^2_{\mathrm{conti}}(\Gamma\backslash G/K)$ は $\Gamma\backslash G/K$ の非コンパクト性から生じる Eisenstein 級数 $E(s,z)=\sum_{[\gamma]\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} y(\gamma\cdot z)^s$ で構成された連続な部分空間である．ただし，$s\in\mathbb{C}$, $z=gK\in G/K$, $\Gamma_\infty\subset\Gamma$ は上三角行列からなる部分群とする．Γ を $\Gamma^{\mathrm{Cus}}:=\left\{\gamma\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&a^{-1}\end{smallmatrix}\right)\gamma^{-1}\ ;\ \gamma\in\Gamma,\ a\in\mathbb{Z}[i]^\times,\ b\in\mathbb{Z}[i]\right\}$ と $\Gamma^{\mathrm{NC}}=\Gamma\setminus\Gamma^{\mathrm{Cus}}$ に分けたことを思い出す．このとき，手順 (ハ) により得られる固有関数展開は

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^{\Gamma\backslash G/K}(t,z,z)&=\sum_{j=1}^{\infty}e^{-\lambda_j t}|\psi_j(z)|^2+c_0+\frac{1}{16\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-2(1+r^2)t}|E(1+ir,z)|^2dr\\&=\sum_{\gamma\in\Gamma^{\mathrm{Cus}}}\mathbf{K}^{\Gamma\backslash G/K}(t,\gamma\cdot z,z)+\sum_{\gamma\in\Gamma^{\mathrm{NC}}}\mathbf{K}^{\Gamma\backslash G/K}(t,\gamma\cdot z,z)\end{aligned}$$

と書ける．ただし，c_0 は定数とする．

プレトレースを定めるために，上半空間 $\mathbb{H}^3\approx G/K$ 上の基本領域を考える．$\mathbb{H}^3:=\{z=(x,y)=(x_1+x_2i,y)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}\ ;\ y>0\}$ とおく．$\mathbb{H}^3$ 上の双曲計量から定まる体積形式を $d\mu$ または Vol と書く．Γ に対する基本領域として $\mathfrak{F}:=\{(x,y)\in\mathbb{H}^3\ ;\ |x_1|\le 1/2,\ 0\le x_2\le 1/2,|x|^2+y^2\ge 1\}$ をとる．また，$Y>1$ に対し，高さ Y で切断した基本領域 $\mathfrak{F}$ を $\mathfrak{F}^{\le}_{Y}:=\{(x,y)\in\mathfrak{F}\ ;\ y\le Y\}$, $\mathfrak{F}^{<}_{Y}:=\{(x,y)\in\mathfrak{F}\ ;\ y<Y\}$ と書く．このとき，$0<\varepsilon<1/\sqrt{2}$, $Y=Y_\varepsilon>1$ と $|\delta_j|\le 1/2$ を満たす $\delta=(\delta_1,\delta_2)$ に対し，

$$\mathfrak{F}^{\le}_{Y,\varepsilon;\delta}:=\{(x,y)\in\mathfrak{F}\ ;\ |x_j|\le\delta_j,1/Y+\varepsilon\le y\le Y+\varepsilon\}$$

を定める．$Y<1/(1-\varepsilon)$ に対し，$\mathfrak{F}^{\le}_{Y,\varepsilon;(1/2,1/2)}=\mathfrak{F}^{\le}_{Y+\varepsilon}\setminus\mathfrak{F}^{<}_{1/Y+\varepsilon}$ が成り立つ．十分小さな $\varepsilon>0$ に対し，プレトレースを

$$(Y,\delta)\mapsto\mathrm{tr}_{Y,\varepsilon;\delta}\,\mathbf{K}^{\Gamma}_t:=\frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathfrak{F}^{\le}_{Y,\varepsilon;\delta})}\int_{\mathfrak{F}^{\le}_{Y,\varepsilon;\delta}}\mathbf{K}^{\Gamma\backslash G/K}(t,z,z)d\mu(z)$$

と定める．$\mathbb{H}^3$ の座標として (x_1+x_2i,y) をとり，

$$\mathrm{tr}_{Y,\varepsilon;\delta=(1/2,1/2)}\,\mathbf{K}^{\Gamma}_t=\frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathfrak{F}^{\le}_{Y,\varepsilon;\delta=(1/2,1/2)})}\left(\int_{\mathfrak{F}^{\le}_{Y+\varepsilon}}-\int_{\mathfrak{F}^{\le}_{1/Y+\varepsilon}}\right)\mathbf{K}^{\Gamma\backslash G/K}(t,z,z)d\mu(z)$$

を得る．よって，発散する項を相殺し極限 $Y_\varepsilon\to\infty$ を取ると，手順 (ニ) で得られる $\mathfrak{F}$ 上の積分に $\mathrm{Vol}(\mathfrak{F})^{-1}$ をかけた等式が復元される．また，極限 $(Y,\varepsilon,\delta)\to(1,0,(0,0))$ において，$\mathrm{Vol}(\mathfrak{F}^{\le}_{Y,\varepsilon;\delta})=2\delta_1\delta_2(Y-1/Y)$ に注意すると，

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{\infty}|\psi_j(\mathbf{o})|^2e^{-\lambda_j t}+c_0+\frac{1}{16\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-2(1+r^2)t}|E(1+ir,\mathbf{o})|^2dr\\&=\sum_{\gamma\in\Gamma^{\mathrm{Cus}}}g_t(\gamma)+\sum_{\gamma\in\Gamma^{\mathrm{NC}}}g_t(\gamma)\end{aligned}\tag{16}$$

が成り立つ．ただし，$\mathbf{o}:=(0,1)\in\mathbb{H}^3$ と記した．

十分小さい ε が与えられたとき，任意の $Y>\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}\varepsilon}$ と δ に対し $\mathrm{tr}_{Y,\varepsilon;\delta}\,\mathbf{K}^{\Gamma}_t$ を局所的なプレトレースと呼ぶ．

Remark 5.7 関係式 (16) だけでは，$\mathrm{Vol}(\mathfrak{F}^{\le}_{Y,\varepsilon;\delta})=2\delta_1\delta_2(Y-1/Y)$ の係数に現れる $\zeta_{\mathbb{Q}(i)}$ の対数微分に関する項が，積分の差 $\int_{\mathfrak{F}^{\le}_{Y+\varepsilon}}-\int_{\mathfrak{F}^{\le}_{1/Y+\varepsilon}}$ をとるときに消える．そのため暫定的に，十分大きな $Y>\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}\varepsilon}$ に $\mathrm{tr}_{Y,\varepsilon;\delta}\,\mathbf{K}^{\Gamma}_t$ の定義域を制限することで，積分の差を解消している．以上より，$\mathrm{tr}_{Y,\varepsilon;\delta}\,\mathbf{K}^{\Gamma}_t$ をここでは，変数 $(Y+\varepsilon),\delta_1,\delta_2$ に関する次数が低い項の係数を以て，手順 *(ニ)* で導出される公式から項を "間引いた" プレトレースと見做す．

Acknowledgements

本講演および本稿執筆の機会を与えてくださったオーガナイザーの佐々野 詠淑氏に，厚く御礼申し上げます．さらに，研究発表と研究交流の場を提供いただきました京都大学数理解析研究所 共同利用に，この場を借りて深謝いたします．

参考文献

[1] C. Deninger. Local L-factors of motives and regularized determinants. Invent. Math., 107(1):135–150, 1992. doi:10.1007/BF01231885

[2] C. Deninger. Lefschetz trace formulas and explicit formulas in analytic number theory. J. Reine Angew. Math., 441:1–15, 1993. doi: 10.1515/crll.1993.441.1

[3] H. D. Fegan. The fundamental solution of the heat equation on a compact Lie group. J. Differential Geom., 18(4):659–668, 1983. URL: http: //projecteuclid.org/euclid.jdg/1214438176.

[4] R. Gangolli. Asymptotic behavior of spectra of compact quotients of certain symmetric spaces. Acta Math., 121:151–192, 1968. doi:10.1007/BF02391912.

[5] J. Jorgenson and S. Lang. Basic Analysis of Regularized Products and Series, Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 1564, 1993, pp. 1–122.

[6] J. Jorgenson and S. Lang, Explicit formulas for regularized products and series. In Explicit Formulas, Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 1593, 1994, pp. 1–134.

[7] J. Jorgenson and S. Lang. Extension of analytic number theory and the theory of regularized harmonic series from Dirichlet series to Bessel series. Math. Ann., 306(1):75–124, 1996. doi:10.1007/BF01445243.

[8] J. Jorgenson and S. Lang. The heat kernel and theta inversion on $SL_2(\mathbb{C})$. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2008. doi:10.1007/ 978-0-387-38032-2.

[9] J. Jorgenson and S. Lang. The heat kernel, theta inversion and zetas on $\Gamma\backslash G/K$. In Number theory, analysis and gometry, pages 273–306. Springer, New York, 2012. doi:10.1007/978-1-4614-1260-1_13

[10] M. Shimada. An approach to the heat kernel on $SL(n)$ using special functions. (in preparation)

[11] A. Weil. Sur les formules explicites de la théorie des nombres. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 36:3–18, 1972.