On differential intertwining operators for $SL(3,\mathbb{R})$ on a full flag manifold*

龍谷大学　ビクトール・ペレズ＝バルデス†
Víctor PÉREZ-VALDÉS‡
Ryukoku University

Abstract

本稿では，$SL(3,\mathbb{R})$ の極小放物型部分群 $B = P_{\min}$ から得られる主系列表現の間の微分絡作用素 $\mathcal{D} : I(\lambda)^{\varepsilon} \to I(\nu)^{\delta}$ をすべて構成し，分類する．証明では *truncated symbol map* Symb_0 というものを用いるが，これは symbol map Symb を放物型部分群の冪零根基が可換でない場合へ一般化したものであり，F-method のレシピを一般の設定で与えるものとなる (cf. [10]).

1　序

微分対称性破れ作用素 (differential symmetry breaking operators; DSBOs) とは群 G の表現から，部分群 $G' \subset G$ の表現への微分作用素で表される G' 絡作用素のことである．この微分対称性破れ作用素 $\mathbb{D}$ の構成・分類問題は一般に困難であるが，$G' \subset G$ が簡約 Lie 群で，その表現が放物型部分群 $P \subset G, P' \subset G'$ から誘導された表現の場合に，微分対称性破れ作用素の構成・分類問題を解決するための強力な手法 *F-method* が存在する．この手法は，微分対称性破れ作用素を求めるという問題を，一般化 Verma 加群に “代数的 Fourier 変換” を施すことによって，ある高階の偏微分方程式系を満たす P の Lie 環の冪零根基 $\mathfrak{n}_+$ 上の多項式 $\psi(\zeta) \in \mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+)$ を決定するという問題に帰着させ，後者を不変式論を援用して解くという方法である．

この F-method が約10年前に小林俊行先生によって提起され ([2])，お陰で微分対称性破れ作用素が様々な設定で構成されてきた (cf. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15,

---

* 本研究は久保利久氏（龍谷大学）との共同研究に基づく．

† 本研究は日本学術振興会・外国人特別研究員奨励費（ID: P24018）の助成を受けたものである．

‡ perez-valdes@mail.ryukoku.ac.jp

16, 17]).

F-method の鍵となるアイデアの一つは，微分方程式の多項式解 $\psi(\zeta)$ を DSBOs $\mathbb{D}$ に変換する symbol map Symb (正確にはその逆写像 Symb^{-1}) である．しかし，この写像は冪零根基 $\mathfrak{n}_+$ が可換な場合のみに定義されている ([6, I. Sect. 4.2])．最近となって，著者は久保利久氏との共同研究で symbol map を可換でない場合に拡張し，この写像を *truncated symbol map* Symb_0 と名付けた ([10])．本稿では，この truncated symbol map の適用として $G = G' = SL(3, \mathbb{R})$ の場合を考え，極小放物型部分群 $B \subset SL(3, \mathbb{R})$ から得られる主系列表現の間の微分対称性破れ作用素を構成し，分類する（極大放物型部分群の場合は [9, 11, 12] を参照）．$G' \subsetneq G$ の場合と区別するため, $G = G'$ の場合の微分対称性破れ作用素 $\mathbb{D}$ を微分絡作用素 $\mathcal{D}$ (differential intertwining operator; DIO) とよぶことにする．

さて，本稿で考える具体的な問題は次の通りである．ここで，$G = G' = SL(3, \mathbb{R})$ の極小放物型部分群 B の主系列表現を $I(\lambda)^{\varepsilon}$ と書くが，厳密な定義は (2.9) にある．

問題 A. 微分絡作用素 $\mathcal{D}$ の成す空間

$$\mathrm{Diff}_{SL(3,\mathbb{R})}(I(\lambda)^{\varepsilon}, I(\nu)^{\delta}) \tag{1.1}$$

が零にならないためのパラメータ $(\varepsilon, \delta; \lambda, \nu) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \times \mathbb{C}^4$ に対する必要十分条件を与えよ．さらに, (1.1) の次元を決定せよ．

問題 B. 空間 (1.1) の具体的な生成元を構成せよ．

1.1 主結果

さて，本稿の主結果を述べよう．下記の定理 1.1 と定理 1.2 を用いると，それぞれ問題 A と B を完全に解決することができるが，主張を述べる前にいくつかの記号を導入する．

ひとまず，次の $\mathbb{C}^2$ の部分集合を定義する：

$$
\begin{aligned}
\Lambda_a &:= (-\mathbb{Z}_{\geq 0}) \times \mathbb{C}, \\
\overset{\leftrightarrow}{\Lambda}_a &:= \mathbb{C} \times (-\mathbb{Z}_{\geq 0}), \\
\Lambda_b &:= \{(1-k, 1-\ell+k) : k, \ell \in 1 + \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, \\
\overset{\leftrightarrow}{\Lambda}_b &:= \{(1-k+\ell, 1-\ell) : k, \ell \in 1 + \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, \\
\Lambda_c &:= \{\frac{1}{2}(2-k-s, 2-k+s) : k \in 1 + \mathbb{Z}_{\geq 0},\, s \in \mathbb{C}\}.
\end{aligned}
$$

さらに, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2), \delta = (\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \{\pm\}^2$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2), \nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{C}^2$ に対し，集合

$$
\Xi_a,\ \overset{\leftrightarrow}{\Xi}_a,\ \Xi_b,\ \overset{\leftrightarrow}{\Xi}_b,\ \Xi_c
$$

を次の通り定義する：

$$
\begin{aligned}
\Xi_a &:= \{(\varepsilon, \delta; \lambda, \nu) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \times \mathbb{C}^4 : (1.2)\ \text{が成り立つ}\}, \\
\overset{\leftrightarrow}{\Xi}_a &:= \{(\varepsilon, \delta; \lambda, \nu) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \times \mathbb{C}^4 : (1.3)\ \text{が成り立つ}\}, \\
\Xi_b &:= \{(\varepsilon, \delta; \lambda, \nu) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \times \mathbb{C}^4 : (1.4)\ \text{が成り立つ}\}, \\
\overset{\leftrightarrow}{\Xi}_b &:= \{(\varepsilon, \delta; \lambda, \nu) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \times \mathbb{C}^4 : (1.5)\ \text{が成り立つ}\}, \\
\Xi_c &:= \{(\varepsilon, \delta; \lambda, \nu) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \times \mathbb{C}^4 : (1.6)\ \text{が成り立つ}\}.
\end{aligned}
$$

パラメータの全体集合 Ξ を $\Xi_a, \ldots, \Xi_c$ の和として定める.

$$
\Xi := \Xi_a \cup \overset{\leftrightarrow}{\Xi}_a \cup \Xi_b \cup \overset{\leftrightarrow}{\Xi}_b \cup \Xi_c.
$$

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_a, \ \ (\nu_1, \nu_2) = (2 - \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2 - 1), \\
&(\delta_1, \delta_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdot (-)^{1-\lambda_1}),
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1, \lambda_2) \in \overset{\leftrightarrow}{\Lambda}_a, \ \ (\nu_1, \nu_2) = (\lambda_1 + \lambda_2 - 1, 2 - \lambda_2), \\
&(\delta_1, \delta_2) = (\varepsilon_1 \cdot (-)^{1-\lambda_2}, \varepsilon_2),
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_b, \ \ (\nu_1, \nu_2) = (\lambda_2, 3 - \lambda_1 - \lambda_2), \\
&(\delta_1, \delta_2) = (\varepsilon_1 \cdot (-)^{2-\lambda_1-\lambda_2}, \varepsilon_2 \cdot (-)^{1-\lambda_1}),
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1, \lambda_2) \in \overset{\leftrightarrow}{\Lambda}_b, \ \ (\nu_1, \nu_2) = (3 - \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1), \\
&(\delta_1, \delta_2) = (\varepsilon_1 \cdot (-)^{1-\lambda_2}, \varepsilon_2 \cdot (-)^{2-\lambda_1-\lambda_2}),
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_c, \ \ (\nu_1, \nu_2) = (2 - \lambda_2, 2 - \lambda_1), \\
&(\delta_1, \delta_2) = (\varepsilon_1 \cdot (-)^{2-\lambda_1-\lambda_2}, \varepsilon_2 \cdot (-)^{2-\lambda_1-\lambda_2}).
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

定理 1.1 ([10, Thm. 4.11])**.** 任意の $\lambda, \nu \in \mathbb{C}^2$, $\varepsilon, \delta \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ に対し，次の条件が同値である.

(i) $\mathrm{Diff}_{SL(3,\mathbb{R})}(I(\lambda)^{\varepsilon}, I(\nu)^{\delta}) \neq \{0\}$.

(ii) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Diff}_{SL(3,\mathbb{R})}(I(\lambda)^{\varepsilon}, I(\nu)^{\delta}) = 1$.

(iii) 次の条件のいずれかが成り立つ.

  (iii-a) $(\delta; \nu) = (\varepsilon; \lambda)$.

  (iii-b) $(\varepsilon, \delta; \lambda, \nu) \in \Xi$.

下記の定理 1.2 では, (1.1) の生成元 $\mathcal{D}$ を与えるが，その前にいくつかの記号を導入する. Open Bruhat cell $\iota : N_- \hookrightarrow G/B$ および, 指数関数 $\exp : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} N_-$ を用いて, $\mathcal{D}$ を座標で書くことにする:

$$
\begin{tikzcd}
C^\infty(G/B, \mathcal{L}_\lambda^\varepsilon) \arrow[r, dashed] \arrow[d, hook, "\iota^*"'] & C^\infty(G/B, \mathcal{L}_\nu^\delta) \arrow[d, hook, "\iota^*"'] \\
C^\infty(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathcal{D}"] & C^\infty(\mathbb{R}^3)
\end{tikzcd}
$$

任意の $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, 多項式 $\mathrm{Cay}_m(x; y) \in \mathbb{C}[x, y]$ を次のように定義する.

- $m = 0$: $\mathrm{Cay}_0(x; y) = 1$,

- $m=1$: $\mathrm{Cay}_1(x;y)=x$,
- $m\geq 2$: $\mathrm{Cay}_m(x;y)=\det\begin{pmatrix} x & 1 & & & & \\ y & x & 2 & & & \\ & y-1 & x & 3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & y-m+3 & x & m-1 \\ & & & & y-m+2 & x \end{pmatrix}$

この三重対角行列式は Cayley continuants とよばれ，次の公式を満たすことが知られている (cf. [13]):

$$\mathrm{Cay}_m(x;y)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\frac{x+y}{2}\right)^{\underline{k}}\left(\frac{x-y}{2}\right)^{\overline{m-k}}.$$

ただし，上記の $r^{\underline{j}}$, $r^{\overline{j}}$ はそれぞれ下降階乗冪 (falling factorial) と上昇階乗冪 (rising factorial) を表している:

$$r^{\underline{j}}:=r(r-1)(r-2)\cdots(r-j+1)=\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-j+1)},$$
$$r^{\overline{j}}:=r(r+1)(r+2)\cdots(r+j-1)=\frac{\Gamma(r+j)}{\Gamma(r)}.$$

次に，$x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ に対して，微分作用素 $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2,\mathcal{D}_3\in\mathbb{C}[x,\frac{\partial}{\partial x}]$ を次のように定める:

$$\mathcal{D}_1:=\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3},\ \ \mathcal{D}_2:=\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3},\ \ \mathcal{D}_3:=\frac{\partial}{\partial x_3}. \tag{1.7}$$

さらに, $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, k 個の微分作用素の積 $D_1\cdots D_k$ ($D_j\in\mathbb{C}[x,\frac{\partial}{\partial x}]$) の対称化 (symmetrization) を

$$\sigma_k(D_1\cdots D_k):=\frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}D_{\tau(1)}\cdots D_{\tau(k)}\in\mathbb{C}[x,\frac{\partial}{\partial x}].$$

と定義する.

さて，$k,\ell \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{C}$ に対し，微分作用素 $\mathcal{D}_+^{(k,\ell)}, D_-^{(k,\ell)}, \mathcal{D}_c^{(s;k)}$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}
D_+^{(k,\ell)} &:= \sum_{m=0}^{\min(k,\ell)} \frac{m!}{2^m}\binom{k}{m}\binom{\ell}{m}\sigma_{k+\ell-m}(\mathcal{D}_1^{k-m}\mathcal{D}_2^{\ell-m}\mathcal{D}_3^m),\\
D_-^{(k,\ell)} &:= \sum_{m=0}^{\min(k,\ell)} \frac{(-1)^m m!}{2^m}\binom{k}{m}\binom{\ell}{m}\sigma_{k+\ell-m}(\mathcal{D}_1^{k-m}\mathcal{D}_2^{\ell-m}\mathcal{D}_3^m),\\
D_c^{(s;k)} &:= \sum_{m=0}^{\min(k,\ell)} \frac{1}{2^m}\binom{k}{m}\mathrm{Cay}_m(s;k)\sigma_{2k-m}(\mathcal{D}_1^{k-m}\mathcal{D}_2^{k-m}\mathcal{D}_3^m).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

定理 1.2 ([10, Thm. 4.17])**.** 任意の $\lambda, \nu \in \mathbb{C}^2$ および $\varepsilon, \delta \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ に対し，次が成り立つ.

$$\mathrm{Diff}_{SL(3,\mathbb{R})}(I(\lambda)^\varepsilon, I(\nu)^\delta) = \begin{cases}
\mathbb{C}\mathrm{id} & \text{if } (\delta;\nu) = (\varepsilon;\lambda),\\
\mathbb{C}\mathcal{D}_1^{1-\lambda_1} & \text{if } (\varepsilon,\delta;\lambda,\nu) \in \Xi_a,\\
\mathbb{C}\mathcal{D}_2^{1-\lambda_2} & \text{if } (\varepsilon,\delta;\lambda,\nu) \in \overset{\leftrightarrow}{\Xi}_a,\\
\mathbb{C}\mathcal{D}_+^{(1-\lambda_1 2-\lambda_1-\lambda_2)} & \text{if } (\varepsilon,\delta;\lambda,\nu) \in \Xi_b,\\
\mathbb{C}\mathcal{D}_-^{(2-\lambda_1-\lambda_2,1-\lambda_2)} & \text{if } (\varepsilon,\delta;\lambda,\nu) \in \overset{\leftrightarrow}{\Xi}_b,\\
\mathbb{C}\mathcal{D}_c^{(\lambda_2-\lambda_1;2-\lambda_1-\lambda_2)} & \text{if } (\varepsilon,\delta;\lambda,\nu) \in \Xi_c,\\
\{0\} & \text{otherwise.}
\end{cases}$$

注意 1.3. 空間 (1.1) の生成元 $\mathcal{D}$ の次数は $(\nu_1+\nu_2)-(\lambda_1+\lambda_2)$ であることが，上記の公式から容易に確かめられる.

2 設定

この章では, 問題 A, B における設定を説明し，記号を導入する．まず, $G := SL(3,\mathbb{R})$ とし，その Lie 環を $\mathfrak{g}(\mathbb{R}) := \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ とする．行列単位を $E_{i,j}$ と表し，$\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ の元 $N_k^\pm$ を次のように定める：

$$\begin{aligned}
N_1^+ &:= E_{1,2}, & N_2^+ &:= E_{2,3}, & N_3^+ &:= E_{1,3},\\
N_1^- &:= E_{2,1}, & N_2^- &:= E_{3,2}, & N_3^- &:= E_{3,1}.
\end{aligned}$$

部分 Lie 環 $\mathfrak{a}(\mathbb{R}), \mathfrak{n}_\pm(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{g}(\mathbb{R})$ をそれぞれ $\mathfrak{a}(\mathbb{R}) := \mathrm{span}_\mathbb{R}\{E_{i,i} - E_{i+1,i+1} : i = 1, 2\}$, $\mathfrak{n}_\pm(\mathbb{R}) := \mathrm{span}_\mathbb{R}\{N_1^\pm, N_2^\pm, N_3^\pm\}$ と定めると

$$\mathfrak{g}(\mathbb{R}) = \mathfrak{n}_-(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{a}(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{n}_+(\mathbb{R})$$

が $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ の Gelfand–Naimark 分解となり, $\mathfrak{b}(\mathbb{R}) := \mathfrak{a}(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{n}_+(\mathbb{R})$ が $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ の極小放物型部分 Lie 環となる. $K := SO(3)$ とし, A, $N_\pm$ をそれぞれ $\mathfrak{a}(\mathbb{R}), \mathfrak{n}_\pm(\mathbb{R})$ を Lie 環にもつ G の解析的部分群とする. 部分群 $M \subset G$ を $M := Z_K(\mathfrak{a}(\mathbb{R}))$ と定めると, $B := MAN_+$ は G の極小放物型部分群となる. M は次のように与えられることが容易に確かめられる.

$$M = \{m_0, m_1, m_2, m_3\}.$$

ただし,

$$m_0 := I_3,\ \ m_1 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ \ m_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ \ m_3 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

である. さて, Lie 環 $\mathfrak{a}(\mathbb{R})$ の生成元を

$$H_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad\qquad H_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と固定し, 任意の $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ に対して $A = \exp(\mathfrak{a}(\mathbb{R}))$ の一次元表現 $\mathbb{C}_{(\lambda_1,\lambda_2)} = (\chi_A^{(\lambda_1,\lambda_2)}, \mathbb{C})$ を次のように定義する：

$$\chi_A^{(\lambda_1,\lambda_2)} : A \to \mathbb{C}^\times,\ e^{t_1H_1+t_2H_2} \mapsto e^{t_1\lambda_2+t_2\lambda_2}.$$

同様に, 任意の $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm\}$ に対し, M の一次元表現 $\mathbb{C}_{(\varepsilon,\varepsilon')} = (\chi_M^{(\varepsilon,\varepsilon')}, \mathbb{C})$ を次のように定める：

$$\chi_M^{(\lambda_1,\lambda_2)} : M \to \{\pm 1\},\ \mathrm{diag}(b_1, b_2, b_3) \mapsto |b_1|_\varepsilon |b_3|_{\varepsilon'}.$$

ただし, $|b|_+ := |b|, |b|_- := b$ である．上記の表現を用いると $\mathrm{Irr}(B)_{\mathrm{fin}}$ を次のように決定することができる．

$$\mathrm{Irr}(M) \simeq \{\mathbb{C}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} : \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm\} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2,$$
$$\mathrm{Irr}(A) \simeq \{\mathbb{C}_{(\lambda_1,\lambda_2)} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}^2,$$
$$\Rightarrow \mathrm{Irr}(B)_{\mathrm{fin}} \simeq \mathrm{Irr}(M) \times \mathrm{Irr}(A) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{C}^2.$$

パラメータ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2; \lambda_1, \lambda_2) \in \mathrm{Irr}(B)_{\mathrm{fin}}$ に対し, G の主系列表現 $I(\lambda_1, \lambda_2)^{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$ を

$$I(\lambda)^{\varepsilon} \equiv I(\lambda_1, \lambda_2)^{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} := \mathrm{Ind}_B^G(\mathbb{C}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \boxtimes \mathbb{C}_{(\lambda_1\lambda_2)}) \tag{2.9}$$

と定義する．この主系列表現は旗多様体 G/B 上の次のベクトル束の切断空間として実現される：

$$\mathcal{L}_{\lambda}^{\varepsilon} := G \times_B (\mathbb{C}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \boxtimes \mathbb{C}_{(\lambda_1\lambda_2)}).$$

3 F-method の適用について

この章では，主結果を証明するための手法 *F-method* について説明する．この手法は，ある程度一般的な幾何的設定で適用できるが，本稿では $G = G' = SL(3, \mathbb{R})$ および，その主系列表現が (2.9) の場合に集中する (F-method のより詳しい説明は [2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 14] などを参照されたい).

まず, F-method の理論から，微分絡作用素のなす空間 (1.1) は，ある偏微分方程式の解空間に同型であることがわかる：

$$\mathrm{Diff}_{SL(3,\mathbb{R})}(I(\lambda_1, \lambda_2)^{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}, I(\nu_1, \nu_2)^{(\delta_1,\delta_2)}) \xrightarrow[\sim]{\exists} \mathrm{Sol(PDEs)} \tag{3.10}$$

ただし，右辺の空間は次のように定まる空間である：

$\mathrm{Sol(PDEs)} \equiv \mathrm{Sol}(\varepsilon, \delta; \lambda, \nu) :=$
$\{\psi \in \mathrm{Hom}_{MA}\left(\mathbb{C}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \boxtimes \mathbb{C}_{(\lambda_1,\lambda_2)}, (\mathbb{C}_{(\delta_1,\delta_2)} \boxtimes \mathbb{C}_{(\nu_1,\nu_2)}) \otimes \mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+)\right) : (3.11)$ が成立$\}$,

$$\widehat{d\pi_\mu}(C)\psi = 0 \quad \forall C \in \mathfrak{n}_+. \tag{3.11}$$

上記の $\widehat{d\pi_\mu}$ について詳しくは説明しないが, これは $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ から $\mathcal{D}(\mathfrak{n}_+)$ への Lie 環の準同型である (ここで $\mathcal{D}(\mathfrak{n}_+)$ は $\mathfrak{n}_+ := \mathfrak{n}_+(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の Weyl 代数を意味

する)：

$$\widehat{d\pi_\mu} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{D}(\mathfrak{n}_+).$$

従って, 任意の $C \in \mathfrak{n}_+$ に対して $\widehat{d\pi_\mu}(C)$ は $\mathfrak{n}_+$ 上の微分作用素を定める (厳密な定義は [6, 11] を参照されたい).

上記の同型写像 (3.10) の具体的な形を与えるため，truncation map を定義する.

定義 3.1. E を有限次元複素ベクトル空間とし, E 上の Weyl 代数を $\mathcal{D}(E)$, E 上の定数係数微分作用素環を $\mathrm{Diff}^{\mathrm{const}}(E)$ と表記する．線型写像

$$\mathrm{Trun}_0 : \mathcal{D}(E) \longrightarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{const}}(E)$$

を

$$\mathrm{Trun}_0(D) := D \text{ の定数係数項}$$

と定義する．この写像を $\mathcal{D}(E)$ 上の *truncation map* とよぶ.

例 3.2. $D = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ の場合, $\mathrm{Trun}_0(D) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ となる.

Truncation map を symbol map と合成すると，次の写像が得られる：

$$\mathcal{D}(E) \xrightarrow{\mathrm{Trun}_0} \mathrm{Diff}^{\mathrm{const}}(E) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Symb}} \mathrm{Pol}(E^\vee)$$

この写像 $\mathrm{Symb}_0 := \mathrm{Symb} \circ \mathrm{Trun}_0$ を *truncated symbol map* とよぶ.

さて, open Bruhat cell を用いると，微分絡作用素のなす空間は N_- 上の左不変微分作用素全体に埋め込めることに注意しよう (cf. [6, I. Thm. 2.9])：

$$\mathrm{Diff}_{SL(3,\mathbb{R})}(I(\lambda)^\varepsilon, I(\nu)^\delta) \subset \mathrm{Diff}_{N_-}(N_-) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_\varepsilon \boxtimes \mathbb{C}_\lambda, \mathbb{C}_\delta \boxtimes \mathbb{C}_\nu) \simeq \mathrm{Diff}_{N_-}(N_-)$$

さらに, N_- は連結かつ単連結な冪零 Lie 群であることから

$$\mathrm{Diff}_{N_-}(N_-) \subset \mathcal{D}(\mathfrak{n}_-)$$

が成り立つ．ここで, truncated symbol map を用いると

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Diff}_{SL(3,\mathbb{R})}(I(\lambda)^\varepsilon, I(\nu)^\delta) & \overset{\phi}{\dashrightarrow} & \mathrm{Sol}(\varepsilon, \delta; \lambda, \nu) \\ \cap & & \cap \\ \mathcal{D}(\mathfrak{n}_-) & \xrightarrow{\quad\mathrm{Symb}_0\quad} & \mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+) \end{array}$$

写像 ϕ が引き起こされるが，これがまさに同型写像 (3.10) である.

定理 3.3 ([10, Thm. 3.32]). *Truncated symbol map* Symb_0 が *well-defined* な線型同型写像である：

$$\mathrm{Diff}_{SL(3,\mathbb{R})}(I(\lambda)^{\varepsilon}, I(\nu)^{\delta}) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Symb}_0} \mathrm{Sol}(\varepsilon, \delta; \lambda, \nu).$$

注意 3.4. F-method は小林俊行先生が提起された手法で，(3.10) が存在することが [6] の理論からわかる．しかし，この写像の具体的な形が与えられたのは Lie 群 G の放物型部分群 P の冪零根基 $\mathfrak{n}_+$ が可換な場合のみである (cf. [6, I. Thm. 4.1])．この写像の具体的な形が一般の設定で与えられたのは最近の結果であり，詳細は [10] に書いてある．本稿では簡単なため，$G = G' = SL(3, \mathbb{R})$ の場合に集中しているが，一般の簡約 Lie 群 $G' \subset G$ および，その放物型部分群 $P' \subset P$ の場合に，定理 3.3 のように F-method の写像が truncated symbol map で与えられることが証明できる（詳しくは [10, Sec. 3] を参照されたい）.

定理 3.3 より，微分絡作用素のなす空間 (1.1) を決定するには，微分方程式系 (いわゆる *F-system*) $\mathrm{Sol}(\varepsilon, \delta; \lambda, \nu)$ を解決すればよい．この空間の決定については，次の章で述べる.

4 主結果の証明

前章で説明したとおり, F-method （定理 3.3）を適用することによって, (1.1) の決定問題は $\mathrm{Sol}(\varepsilon, \delta; \lambda, \nu)$ の解決問題に帰着できることがわかる．この章では $\mathrm{Sol}(\varepsilon, \delta; \lambda, \nu)$ を完全に解決する（定理 4.3）.

第2章で説明したように，冪零 Lie 環 $\mathfrak{n}_+$ は $\{N_1^+, N_2^+, N_3^+\}$ で生成されるので，この基底での座標 $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ を用いて $\mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+) \simeq \mathbb{C}[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3]$ と同一視する．ここで, MA の作用を見てみると，次の命題が得られる.

命題 4.1 ([10, Prop. 5.5]). 任意の $(\varepsilon, \delta; \lambda, \nu) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \times \mathbb{C}^4$ に対し，次の条件が同値である.

(i) $\mathrm{Hom}_{MA}\left(\mathbb{C}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \boxtimes \mathbb{C}_{(\lambda_1,\lambda_2)}, (\mathbb{C}_{(\delta_1,\delta_2)} \boxtimes \mathbb{C}_{(\nu_1,\nu_2)}) \otimes \mathrm{Pol}(\mathfrak{n}_+)\right) \neq \{0\}$.

(ii) 下記の条件を満たすような $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在する.

$$(\varepsilon_1\delta_1, \varepsilon_2\delta_2) = ((-)^{\ell}, (-)^{k}), \quad (\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2) = (2k - \ell, 2\ell - k).$$

さらに，上記の条件のいずれかが成立するなら, (i) の空間は次のようになる

$$\mathrm{Hom}_{MA}\left(\mathbb{C}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \boxtimes \mathbb{C}_{(\lambda_1,\lambda_2)}, (\mathbb{C}_{(\delta_1,\delta_2)} \boxtimes \mathbb{C}_{(\nu_1,\nu_2)}) \otimes \mathrm{Pol}(k,\ell)\right).$$

ただし, $\mathrm{Pol}(k,\ell)$ は下記の多項式空間である：

$$\mathrm{Pol}(k,\ell) := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\zeta_1^{k-\ell}\zeta_2^{\ell-j}\zeta_3^{j} : j = 0, 1, \ldots, \min(k,\ell)\}.$$

上の命題を用いると，$\mathrm{Sol}(\varepsilon,\delta;\lambda,\nu)$ を決定するには

$$\widehat{d\pi_\mu}(N_1^+)\psi = \widehat{d\pi_\mu}(N_2^+)\psi = 0, \quad \psi \in \mathrm{Pol}(k,\ell),$$

を解けばよい．ただし，ここの微分作用素 $\widehat{d\pi_\mu}(N_j^+)$ は次の公式で与えられることが証明できる (cf. [10, Prop. 5.11]):

$$-\zeta_1\widehat{d\pi_\mu}(N_1^+) = \lambda_1\vartheta_1 + (\vartheta_1^2 - \vartheta_1) - \frac{1}{2}\vartheta_1\vartheta_2 + \frac{1}{2}\vartheta_1\vartheta_3 + \frac{\zeta_1\zeta_2}{\zeta_3}\vartheta_3 + \frac{1}{4}\frac{\zeta_3}{\zeta_1\zeta_2}(\vartheta_1^2 - \vartheta_1)\vartheta_2,$$
$$-\zeta_2\widehat{d\pi_\mu}(N_2^+) = \lambda_2\vartheta_2 + (\vartheta_2^2 - \vartheta_2) - \frac{1}{2}\vartheta_1\vartheta_2 + \frac{1}{2}\vartheta_2\vartheta_3 - \frac{\zeta_1\zeta_2}{\zeta_3}\vartheta_3 - \frac{1}{4}\frac{\zeta_3}{\zeta_1\zeta_2}\vartheta_1(\vartheta_2^2 - \vartheta_2),$$

ここでは, $\vartheta_j = \zeta_j\frac{\partial}{\partial\zeta_j}$ である．上記の偏微分方程式系をそのまま解いても良いが，あるトリック（いわゆる T-saturation）を用いると，常微分方程式系に帰着させることができる．詳しくは下記に述べる．

任意の $k,\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，次の線型同型写像が存在することに注意しよう．

$$\begin{aligned} T_{k,\ell} : \mathrm{Pol}_{\min(k,\ell)}[t] &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Pol}(k,\ell) \\ p(t) &\longmapsto \zeta_1^k\zeta_2^\ell p\left(\frac{\zeta_3}{\zeta_1\zeta_2}\right). \end{aligned}$$

ただし, $\mathrm{Pol}_{\min(k,\ell)}[t] := \{p \in \mathbb{C}[t] : \deg p \leq \min(k,\ell)\}$ である．この写像を用いると，次の便利な補題が得られる．

補題 4.2 ([10, Prop. 5.13])**.** $\psi \in \mathrm{Pol}(k,\ell)$ を $\psi = T_{k,\ell}(p)$ としたときに，次の二条件が同値である．

(i) $-\zeta_1\widehat{d\pi_\mu}(N_1^+)\psi = -\zeta_1\widehat{d\pi_\mu}(N_2^+)\psi = 0.$

(ii) $D_1p = D_2p = 0$. ただし, D_1, D_2 は次の微分作用素である．

$$D_1 := \frac{d}{dt} + (\lambda_1 + k - \frac{\ell}{2} - 1)(k - \vartheta_t) + \frac{1}{4}t(k - 1 - \vartheta_t)(k - \vartheta_t)(\ell - \vartheta_t),$$
$$D_2 := -\frac{d}{dt} + (\lambda_2 - \frac{k}{2} + \ell - 1)(\ell - \vartheta_t) - \frac{1}{4}t(k - \vartheta_t)(\ell - \vartheta_t)(\ell - 1 - \vartheta_t).$$

任意の $k,\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ および, $s \in \mathbb{C}$ に対し，多項式 $p_{\pm}^{(k,\ell)}(t)$, $p_c^{(s;k)}(t)$ を次のように定義する：

$$p_{\pm}^{(k,\ell)}(t) := \sum_{m=0}^{\min(k,\ell)} \frac{(\pm 1)^m}{2^m} m! \binom{k}{m}\binom{\ell}{m} t^m,$$
$$p_c^{(s;k)}(t) := \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{2^m}\binom{k}{m} \mathrm{Cay}_m(s;k) t^m.$$

この多項式と補題 4.2 を用いると，次の定理を証明することができる.

定理 4.3 ([10, Thm. 6.13]). 任意の $\lambda, \nu \in \mathbb{C}^2$, $\varepsilon, \delta \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ に対し，次が成り立つ.

$$\mathrm{Sol}(\varepsilon,\lambda;\delta,\nu) = \begin{cases} \mathbb{C}\mathrm{id} & \textit{if } (\delta;\nu) = (\varepsilon,\lambda), \\ \mathbb{C}\zeta_1^{1-\lambda_1} & \textit{if } (\varepsilon,\lambda;\delta,\nu) \in \Xi_a, \\ \mathbb{C}\zeta_2^{1-\lambda_2} & \textit{if } (\varepsilon,\lambda;\delta,\nu) \in \overset{\leftrightarrow}{\Xi}_a, \\ \mathbb{C}T_{1-\lambda_1,2-\lambda_1-\lambda_2}(p_+^{(1-\lambda_1,2-\lambda_1-\lambda_2)}(t)) & \textit{if } (\varepsilon,\lambda;\delta,\nu) \in \Xi_b, \\ \mathbb{C}T_{2-\lambda_1-\lambda_2,1-\lambda_2}(p_-^{(2-\lambda_1-\lambda_2,1-\lambda_2)}(t)) & \textit{if } (\varepsilon,\lambda;\delta,\nu) \in \overset{\leftrightarrow}{\Xi}_b, \\ \mathbb{C}T_{2-\lambda_1-\lambda_2,2-\lambda_1-\lambda_2}(p_c^{(\lambda_2-\lambda_1;2-\lambda_1-\lambda_2)}(t)) & \textit{if } (\varepsilon,\lambda;\delta,\nu) \in \Xi_c, \\ \{0\} & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

上記の定理より，解空間 $\mathrm{Sol}(\varepsilon,\delta;\lambda,\nu)$ が完全に決定された．従って, F-method (定理 3.3) を用いると，定理 1.1 および定理 1.2 を証明することができる．定理 1.1 は定理 3.3 および定理 4.3 から直接従うが，定理 1.2 を証明するには truncated symbol map の逆写像を計算する必要がある．これは非自明だが，次の公式で与えられることが証明できる (cf. [10, Sec. 3.5]):

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sol}(\varepsilon,\delta;\lambda,\nu) & \xrightarrow{\mathrm{Symb}_0^{-1}} & \mathrm{Diff}_{SL(3,\mathbb{R})}(I(\lambda)^{\varepsilon}, I(\nu)^{\delta}) \\ \Cup & & \Cup \\ \sum_{r\in\mathbb{Z}^3_{\geq 0}} a_r \zeta_1^{r_1}\zeta_2^{r_2}\zeta_3^{r_3} & \longmapsto & \sum_{r\in\mathbb{Z}^3_{\geq 0}} a_r \sigma_{|r|}(dR(N_1^-)^{r_1} dR(N_2^-)^{r_2} dR(N_3^-)^{r_3}) \end{array}$$

これを用いると, (1.7) で定義した微分作用素 $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ はまさに

$$dR(N_j^-) = \mathcal{D}_j \quad (j = 1,2,3)$$

を満たすことから，定理 1.2 は定理 4.3 および (1.8) から従うことがわかる.

参考文献

[1] M. Fischmann, A. Juhl, P. Somberg. *Conformal symmetry breaking differential operators on differential forms.* Mem. Amer. Math. Soc. **268** (2020), no. 1304, v+112 pp.

[2] T. Kobayashi. *F-method for constructing equivariant differential operators.* Geometric analysis and integral geometry, 139–146, Contemp. Math., **598**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.

[3] T. Kobayashi. *F-method for symmetry breaking operators.* Differential Geom. Appl. **33** (2014), suppl., 272–289.

[4] T. Kobayashi, T. Kubo, M. Pevzner. *Conformal symmetry breaking operators for differential forms on spheres.* Lecture Notes in Mathematics, **2170**. Springer Singapore, 2016. ix+192 pp.

[5] T. Kobayashi, B. Ørsted, P. Somberg, V. Souček. *Branching laws for Verma modules and applications in parabolic geometry. I.* Adv. Math. **285** (2015), 1796–1852.

[6] T. Kobayashi, M. Pevzner. *Differential symmetry breaking operators: I. General theory and F-method; II. Rankin–Cohen operators for symmetric pairs.* Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), no. 2, 801-845 and 847-911.

[7] L. Křižka, P. Somberg. *Algebraic analysis of scalargeneralized Verma modules of Heisenberg parabolic type I:* A_n*-series.* Transform. Groups **22** (2017), no. 2, 403–451.

[8] T. Kubo. *F-method* による絡微分作用素の分類および構成について. 2022年度表現論シンポジウムの講演集（世話人：中島秀斗，和地輝仁）, pp. 41–66.

[9] T. Kubo. *Differential symmetry breaking operators from a line bundle to a vector bundle over real projective spaces.* To appear in the proceedings of the Tunisian-Japanese conference: "Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications" in honor of Professor Toshiyuki Kobayashi. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics.

[10] T. Kubo, V. Pérez-Valdés. *The truncated symbol of a differential symmetry*

breaking operator. Preprint (56 pages), arXiv:2506.23599 (2025).

[11] T. Kubo. B. Ørsted. *On the intertwining differential operators from a line bundle to a vector bundle over the real projective space.* Indag. Math. **36** (2025), pp. 270-301.

[12] T. Kubo. B. Ørsted. *On the intertwining differential operators between vector bundles over the real projective space of dimension two.* To appear in the Journal of Lie Theory (the special issue in honor of Joseph A. Wolf).

[13] E. Muraniri, D. Torri. *Cayley continuants.* Theoret. Comput. Sci. **347** (2005), 353–369.

[14] V. Pérez-Valdés. *Conformally covariant symmetry breaking operators for a vector bundle of rank 3 on* S^3. Internat. J. Math. **34** (2023) no. 12, Paper No. 2350072.

[15] V. Pérez-Valdés. *Construction and classification of differential symmetry breaking operators for principal series representations of the pair* $(SO_0(4,1), SO_0(3,1))$ *for special parameters.* To appear in the proceedings of the Tunisian-Japanese conference: "Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications" in honor of Professor Toshiyuki Kobayashi. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics.

[16] V. Pérez-Valdés. *On sporadic symmetry breaking operators for principal series representations of the de Sitter and Lorentz groups.* Preprint (59 pages), arXiv:2506.23064 (2025).

[17] P. Somberg. *Rankin-Cohen brackets for orthogonal Lie algebras and bilinear conformally equivariant differential operators.* Symmetry in Geometry and Analysis, Volume 3, Festschrift in honor of Toshiyuki Kobayashi, Progr. Math., no. **359**, Birkäuser Singapore, 2025, pp. 637–661.