

有限多重調和級数のとある変種と多重ゼータ値の整構造への応用

広瀬 稔 (MINORU HIROSE)
鹿児島大学 (KAGOSHIMA UNIVERSITY)

ABSTRACT. 本稿は前阪拓己, 関真一郎, 渡邊大貴との共同研究の成果である [3] の解説を行う. [3] では多重ゼータダイヤモンド値と呼ぶ多重ゼータ値の類似物を導入し, その性質を研究した. 特に重要な系として, 任意の多重ゼータ値が成分に 1 を含まないインデックスに対する多重ゼータ値の整数係数線形和となることが得られる.

1. 導入

本稿では [3] の解説を行う. なお, 記述の都合上, 一部 [3] とは違う記号を採用している. また本稿では $\mathbb{N} := \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. まずは多重ゼータ値を定義しよう.

定義 1. $k \geq 1$ に対して, 重さ k の許容的インデックスの集合 $\mathbb{I}_k^{\text{adm}}$ を以下で定める.

$$\mathbb{I}_k^{\text{adm}} := \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r \mid r \geq 1, k_r \geq 2, k_1 + \dots + k_r = k\}.$$

定義 2. $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{I}_k^{\text{adm}}$ に対して多重ゼータ値を以下で定める.

$$\zeta(\mathbf{k}) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}}.$$

多重ゼータ値で張られる \mathbb{R} の部分空間について次が知られている.

定理 3 (Brown, [1]). $k \geq 1$ に対して

$$\mathbb{I}_k^{2,3} := \{(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{I}_k^{\text{adm}} \mid r \geq 1, \forall i \ k_i \in \{2, 3\}\}$$

と置くとき

$$\text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \in \mathbb{I}_k^{\text{adm}}\} = \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \in \mathbb{I}_k^{2,3}\}.$$

すなわち任意の多重ゼータ値は, $\mathbf{k} \in \mathbb{I}_k^{2,3}$ に対する多重ゼータ値の \mathbb{Q} -係数線形和として表せる.

系 4. $\dim_{\mathbb{Q}} \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \in \mathbb{I}_k^{\text{adm}}\} \leq \#\mathbb{I}_k^{2,3}$.

一方, 多重ゼータ値は必ずしも $\mathbf{k} \in \mathbb{I}_k^{2,3}$ に対する多重ゼータ値の \mathbb{Z} -係数線形和とはならない. 本稿では多重ゼータダイヤモンド値と呼ばれる多重ゼータ値の類似物を導入し性質を調べる. 我々の主定理の重要な帰結の一つとして次を得る.

定理 5 (Hirose–Maesaka–Seki–Watanabe, [3]). $k \geq 1$ に対して

$$\mathbb{I}_k^{\geq 2} := \{(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{I}_k^{\text{adm}} \mid r \geq 1, \forall i \ k_i \geq 2\}$$

と置くとき

$$\text{span}_{\mathbb{Z}}\{\zeta(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \in \mathbb{I}_k^{\text{adm}}\} = \text{span}_{\mathbb{Z}}\{\zeta(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \in \mathbb{I}_k^{\geq 2}\}.$$

すなわち任意の多重ゼータ値は, $\mathbf{k} \in \mathbb{I}_k^{\geq 2}$ に対する多重ゼータ値の \mathbb{Z} -係数線形和として表せる.

2. 有限多重調和級数

有限多重調和級数とは多重ゼータ値の定義に現れる級数を途中で打ち切って得られる有限和である。多重ゼータ値の収束性に必要だった条件 $k_r \geq 2$ は有限多重調和級数の定義には不要である。

定義 6. $k \geq 1$ に対して、重さ k のインデックスの集合 \mathbb{I}_k を

$$\mathbb{I}_k := \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r \mid r \geq 1, k_1 + \dots + k_r = k\}$$

で定める。

定義 7. $N \geq 1$ および $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{I}_k$ に対して

$$\zeta_N^{\mathbb{H}}(\mathbf{k}) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r < N} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}},$$

$$\zeta^{\mathbb{H}}(\mathbf{k}) := (\zeta_N^{\mathbb{H}}(\mathbf{k}))_{N \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$$

と置く。

定義より $\mathbf{k} \in \mathbb{I}_k^{\text{adm}}$ のとき

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \zeta_N^{\mathbb{H}}(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k})$$

である。よって $\zeta^{\mathbb{H}}(\mathbf{k})$ は多重ゼータ値の持ち上げであり、 $\{\zeta^{\mathbb{H}}(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \in \mathbb{I}_k^{\text{adm}}\}$ の間の \mathbb{Q} -線形関係式がもし存在すれば、そのまま $\zeta(\mathbf{k})$ の間の \mathbb{Q} -線形関係式となる。よって多重ゼータ値の線形関係式がどの程度 $\zeta^{\mathbb{H}}(\mathbf{k})$ に持ち上がるか、つまり $\zeta^{\mathbb{H}}(\mathbf{k})$ が満たす線形関係式には何があるかというのは素朴な問いである。これに関して次が成り立つ。

定理 8 ([5, Theorem 3.1]). $\{1\} \cup \{\zeta^{\mathbb{H}}(\mathbf{k}) \mid k \geq 1, \mathbf{k} \in \mathbb{I}_k\}$ は \mathbb{Q} 上線形独立である。

証明は有限多重調和級数の母関数を考えることで、多重ポリログの線形独立性に帰着される。

3. 多重ゼータダイヤモンド値

$N \in \mathbb{N}$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{I}_k^{\text{adm}}$ に対して、多重ゼータダイヤモンド値を

$$\zeta_N^{\diamond}(\mathbf{k}) := \sum_{A \subset \{i \mid k_i=1\}} \sum_{(n_1, \dots, n_r) \in S_{N,r}(A)} \prod_{i \in A} \frac{1}{N - n_i} \prod_{i \notin A} \frac{1}{n_i^{k_i}}$$

で定義する。ただし和の範囲 $S_{N,r}(A)$ は

$$S_{N,r}(A) := \{(n_1, \dots, n_r) \in \{1, \dots, N-1\}^r \mid n_i \leq n_{i+1} \ (i \in A), n_i < n_{i+1} \ (i \notin A)\}$$

で定める。さらに

$$\zeta^{\diamond}(\mathbf{k}) := (\zeta_N^{\diamond}(\mathbf{k}))_{N \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$$

と置く。

例 9. $\zeta_N^{\diamond}(1, 2)$ は定義から以下のようになる。

$$\zeta_N^{\diamond}(1, 2) = \sum_{0 < n_1 < n_2 < N} \frac{1}{n_1 n_2^2} \quad (A = \emptyset)$$

$$+ \sum_{0 < n_1 \leq n_2 < N} \frac{1}{(N - n_1) n_2^2} \quad (A = \{1\}).$$

$\zeta_N^{\diamond}(\mathbf{k})$ の各項の極限を評価すると

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{(n_1, \dots, n_r) \in S_{N,r}(A)} \prod_{i \in A} \frac{1}{N - n_i} \prod_{i \notin A} \frac{1}{n_i^{k_i}} = \begin{cases} \zeta(\mathbf{k}) & A = \emptyset \\ 0 & A \neq \emptyset \end{cases}$$

となるので、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \zeta_N^{\diamond}(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k})$$

となる。つまり、 $\zeta^\circ(\mathbf{k})$ は $\zeta(\mathbf{k})$ の持ち上げである。 ζ° の ζ^H との著しい違いは値の集合が線形独立ではないことである。例えば次の等式が成り立つ。

$$\zeta^\circ(1, 2) = \zeta^\circ(3).$$

4. 離散反復積分表示

$\mathcal{H} := \mathbb{Q}\langle x, y \rangle$, $\mathcal{H}^0 := \mathbb{Q} + y\mathcal{H}x \subset \mathcal{H}^1 := \mathbb{Q} + y\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ と置く。また $e_k := yx^{k-1}$ と置く。さらに \mathbb{Q} -線形写像 $Z: \mathcal{H}^0 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$Z(e_{k_1} \cdots e_{k_r}) := \zeta(k_1, \dots, k_r), \quad Z(1) = 1$$

で定める。 $Z_N^H: \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathbb{Q}$, $Z^H: \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathbb{Q}^N$, $Z_N^\circ: \mathcal{H}^0 \rightarrow \mathbb{Q}$, $Z^\circ: \mathcal{H}^0 \rightarrow \mathbb{Q}^N$ も同様に定める。多重ゼータ値には次のような反復積分表示が知られている。

定理 10. $u = u_1 \cdots u_k \in \mathcal{H}^0$ ($u_i \in \{x, y\}$) に対して

$$Z(u) = \int_{0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq 1} \omega_{u_1}(t_1) \cdots \omega_{u_k}(t_k) dt_1 \cdots dt_k$$

が成り立つ。ただし

$$\omega_x(t) := \frac{1}{t}, \quad \omega_y(t) := \frac{1}{1-t}.$$

多重ゼータ値の反復積分表示の離散化として前坂-関-渡邊 [4] は次を示した。

定理 11 ([4]). $u = u_1 \cdots u_k \in \mathcal{H}^1$ ($u_i \in \{x, y\}$) に対して

$$Z_N^H(u) = \sum_{\substack{0 < n_1 \leq \cdots \leq n_k < N \\ n_i < n_{i+1} \text{ if } u_{i+1} = y}} \tilde{\omega}_{u_1}(n_1) \cdots \tilde{\omega}_{u_k}(n_k)$$

が成り立つ。ただし

$$\tilde{\omega}_x(n) := \frac{1}{n}, \quad \tilde{\omega}_y(n) := \frac{1}{N-n}.$$

多重ゼータダイヤモンド値も以下の離散反復積分表示を持つ。

定理 12 ([3]). $u = u_1 \cdots u_k \in \mathcal{H}^0$ ($u_i \in \{x, y\}$) に対して

$$Z_N^\circ(u) = \sum_{\substack{0 < n_1 \leq \cdots \leq n_k < N \\ n_i < n_{i+1} \text{ if } u_i u_{i+1} = xy}} \tilde{\omega}_{u_1}(n_1) \cdots \tilde{\omega}_{u_k}(n_k)$$

が成り立つ。ただし

$$\tilde{\omega}_x(n) := \frac{1}{n}, \quad \tilde{\omega}_y(n) := \frac{1}{N-n}.$$

5. 多重ゼータダイヤモンド値の空間

$\mathbf{k} \in \mathbb{I}_k^{\geq 2}$ のとき定義より $\zeta^\circ(\mathbf{k}) = \zeta^H(\mathbf{k})$ となるので、 $\{\zeta^\circ(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \in \mathbb{I}_k^{\geq 2}\}$ は線形独立であることに注意する。次が [3] の主定理の一つである。

定理 13 ([3]). $\{\zeta^\circ(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \in \mathbb{I}_k^{\geq 2}\}$ は $\text{span}_{\mathbb{Z}}\{\zeta^\circ(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \in \mathbb{I}_k^{\text{adm}}\}$ の基底となる。

定理 13 の系として、 $N \rightarrow \infty$ を考えることで定理 5 が従う。

$$\mathcal{H}^{\geq 2} := \text{span}_{\mathbb{Q}}\{e_{k_1} \cdots e_{k_r} \mid r \geq 0, k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}\}$$

と置く。定理 13 より以下を満たす $\mathcal{D}: \mathcal{H}^0 \rightarrow \mathcal{H}^{\geq 2}$ がただ一つ存在することが分かる。

$$Z^\circ(w) = Z^\circ(\mathcal{D}(w)) \quad (w \in \mathcal{H}^0).$$

\mathcal{D} は以下のように具体的に与えることができる。

まず $s \geq 0$, $c_1, \dots, c_{2s} \in \mathbb{N}$ に対して $\mathfrak{D}(c_1, \dots, c_{2s}) \in \mathcal{H}^{\geq 2}$ を $\mathfrak{D}(\emptyset) := 1$ および

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\mathbf{c}) := & \sum_{\substack{AC\{i \mid c_i=1\} \\ \exists J, A=\sqcup_{j \in J} \{2j, 2j+1\}}} \sum_{\substack{BC\{i \mid c_i \neq 1\} \\ \#A+\#B \geq 1 \\ \forall r, \{2r, 2r+1\} \not\subset B}} (-1)^{\#B-1} \mathfrak{D}(\mathbf{c}_{A,B}) x^{\#A+\#B} \\ + & \sum_{\substack{AC\{i \mid c_i=1\} \\ \exists J, A=\sqcup_{j \in J} \{2j, 2j+1\}}} \sum_{\substack{BC\{i \mid c_i \neq 1\} \\ \#A+\#B \geq 2 \\ \forall r, \{2r, 2r+1\} \not\subset B}} (-1)^{\#B-1} \mathfrak{D}(\mathbf{c}_{A,B}) y x^{\#A+\#B-1} \\ + & \sum_{\substack{AC\{i \mid c_i=1\} \\ \exists J, A=\sqcup_{j \in J} \{2j-1, 2j\}}} \sum_{\substack{BC\{i \mid c_i \neq 1\} \\ \#A+\#B \geq 2 \\ \forall r, \{2r-1, 2r\} \not\subset B}} (-1)^{\#B} \mathfrak{D}(\mathbf{c}_{A,B}) y x^{\#A+\#B-1} \end{aligned}$$

によって帰納的に定める. ただしここで, $\mathbf{c}_{A,B}$ は B に対応するインデックスを -1 し, A に対応するインデックスを削除して得られる列であり, 例えば $\mathbf{c} = (6, 7, 1, 1, 5, 9)$ のとき

$$\mathbf{c}_{\{3,4\}, \{1,5\}} = (5, 7, 4, 9)$$

である. このとき $\mathcal{D}(y^{c_1} x^{c_2} \dots y^{c_{2s-1}} x^{c_{2s}}) = \mathfrak{D}(c_1, \dots, c_{2s})$ となる. これにより $\mathcal{D}(u)$ を再帰的に計算できる. 例えば

$$\mathcal{D}(yx) = \mathfrak{D}(1, 1) = 0 + 0 + (-1)^0 \mathfrak{D}((1, 1)_{\{1,2\}, \emptyset}) yx = \mathfrak{D}(\emptyset) yx = yx,$$

$$\mathcal{D}(yyx) = \mathfrak{D}(2, 1) = (-1)^{1-1} \mathfrak{D}((2, 1)_{\emptyset, \{1\}}) x + 0 + 0 = \mathfrak{D}(1, 1) x = yxx$$

である. [3] では, このように帰納的に定めた \mathcal{D} が

$$Z^\circ(w) = Z^\circ(\mathcal{D}(w))$$

を満たすことを, Z° の積分表示を元に N に関する差分方程式を計算することによって証明している. また [3] では

$$\text{Drop1} := \{w - \mathcal{D}(w) \mid w \in \mathcal{H}^0\}$$

と置いている. このとき

$$\text{Drop1} = \ker Z^\circ$$

が成り立つ.

6. 調和積関係式

定義 14. 調和積 $*$: $\mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}^1$ を線形性および

$$\begin{aligned} u * 1 &= 1 * u := u, & (u \in \mathcal{H}^1) \\ e_k u * e_l v &:= e_k(u * e_l v) + e_l(e_k u * v) + e_{k+l}(u * v) & (k, l \in \mathbb{N}, u, v \in \mathcal{H}^1) \end{aligned}$$

で帰納的に定める.

例 15. $e_a * e_b e_c = e_a e_b e_c + e_b e_a e_c + e_b e_c e_a + e_{a+b} e_c + e_b e_{a+c}$.

Z^H は定義から以下の式を満たす (調和積関係式).

$$Z^H(u * v) = Z^H(u) Z^H(v) \quad (u, v \in \mathcal{H}^1).$$

Z° は調和積関係式を部分的に満たす.

定理 16 ([3]). $u \in \mathcal{H}^1, v \in \mathcal{H}^{\geq 2}$ に対して次が成り立つ.

$$Z^\circ(u * v) = Z^\circ(u) Z^\circ(v).$$

7. 川島関係式

非可換環としての準同型写像 $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ を $\phi(x) := x + y$, $\phi(y) := -y$ で定める. また \mathbb{Q} 線形写像 $\otimes : y\mathcal{H} \otimes y\mathcal{H} \rightarrow y\mathcal{H}$ を

$$ue_k \otimes ve_l := (u * v)e_{k+l} \quad (u, v \in \mathcal{H}^1, k, l \in \mathbb{N})$$

で定める. このとき川島 [2] は次を証明した.

定理 17 (川島関係式, [2]). $u, v \in y\mathcal{H}$, $m > 0$ に対して,

$$\sum_{\substack{a, b \in \mathbb{N} \\ a+b=m}} Z(\phi(u) \otimes y^a) Z(\phi(v) \otimes y^b) = Z(\phi(u * v) \otimes y^m).$$

特に $m = 1$ のとき左辺は空和で 0 となるため川島関係式の線形部分と呼ばれる次の式が得られる.

定理 18 (川島関係式の線形部分, [2]). $u, v \in y\mathcal{H}$ に対して,

$$Z(\phi(u * v)x) = 0.$$

大野関係式, 双対関係式, 巡回和公式など様々な多重ゼータ値の線形関係式族が川島関係式の線形部分に含まれることが知られている ([3, Figure 1]).

さて, [3] では川島関係式がそのままの形で ζ^\diamond についても成り立つことを証明した.

定理 19 ([3]). $u, v \in y\mathcal{H}$, $m > 0$ に対して,

$$\sum_{\substack{a, b \in \mathbb{N} \\ a+b=m}} Z^\diamond(\phi(u) \otimes y^a) Z^\diamond(\phi(v) \otimes y^b) = Z^\diamond(\phi(u * v) \otimes y^m).$$

特に川島関係式の線形部分に含まれる関係式族 (大野関係式, 双対関係式, 巡回和公式など) は ζ^\diamond についても成立することが分かる. 重さ 17 までの数値計算によると, 川島関係式の線形部分との調和積によって ζ^\diamond の全ての関係式が尽くされることが期待される.

予想 20. $\text{LinKaw}^* \subset \ker(Z^\diamond)$ を

$$\text{LinKaw}^* := \text{span}_{\mathbb{Q}}\{(\phi(u * v)x) * w \mid u, v \in y\mathcal{H}, w \in \mathcal{H}^{\geq 2}\}$$

で定める. (包含関係は定理 16 と定理 19 から従う). このとき

$$\text{LinKaw}^* = \ker(Z^\diamond).$$

定理 19 は以下のような方針で証明される. まず $w \in y\mathcal{H}$ に対する $F_N(w; t)$ を w に関する線形性および

$$F_N(e_{k_1} \cdots e_{k_r}; t) := \sum_{A \subset \{1, \dots, r\}} (-1)^{\#A} \sum_{\substack{0 < n_1 \leq \dots \leq n_r < N \\ i \in A \setminus \{1\} \Rightarrow n_{i-1} < n_i}} \prod_{i \in A} \frac{1}{(N - n_i + t)^{k_i}} \prod_{i \notin A} \frac{1}{n_i^{k_i}}$$

で定める. F_N は川島関数 [6] の類似物である. $w \in y\mathcal{H}$ に対する $E_N(w; t)$ を w に関する線形性および

$$E_N(e_{k_1} \cdots e_{k_r}; t) := F_N(yx^{k_1-1}(y-x)x^{k_2-1} \cdots (y-x)x^{k_r-1}; t)$$

で定める. このとき $u, v \in y\mathcal{H}$ に対して E_N の調和積関係式

$$E_N(u; t)E_N(v; t) = E_N(u * v; t)$$

が成り立つ. また, Connector の手法により $w \in y\mathcal{H}$ に対して,

$$E_N(w; t) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_N^\diamond(\phi(w) \otimes y^m)(-t)^m$$

が成り立つ. よって E_N の調和積関係式の両辺の $(-t)^m$ の係数を見ることで定理 19 が得られる.

REFERENCES

- [1] F. C. S. Brown, *Mixed Tate motives over \mathbb{Z}* , Ann. of Math. 175 (2012), 949–976.
- [2] G. Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, J. Number Theory 129 (2009), 755–788.
- [3] M. Hirose, T. Maesaka, S. Seki, T. Watanabe, *The \mathbb{Z} -module of multiple zeta values is generated by ones for indices without ones*, preprint, arXiv:2505.07221
- [4] T. Maesaka, S. Seki, T. Watanabe, *Deriving two dualities simultaneously from a family of identities for multiple harmonic sums*, preprint, arXiv:2402.05730
- [5] S. Yamamoto, *Explicit evaluation of certain sums of multiple zeta-star values*, Funct. Approx. Comment. Math. 49 (2013), 283–289.
- [6] S. Yamamoto, *A note on Kawashima functions*, Publ. Math. Besançon. Algèbre et théorie Nr. 2019/1, 151–163.