多重 T 値の線形関係式族について

九州大学理学部数学科 前阪 拓己
Takumi Maesaka
Department of Mathematics, Kyushu University

1 導入

多重 T 値は Kaneko–Tsumura [KT1] によって導入された level 2 の多重ゼータ値である. 多重ゼータ値, 多重 T 値はそれぞれ以下のように定義される.

Definition 1.1. インデックス $\boldsymbol{k} := (k_1, \dots, k_r), k_r \geq 2$ に対し,

$$\zeta(\boldsymbol{k}) \coloneqq \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

$$T(\boldsymbol{k}) \coloneqq 2^r \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r \\ n_i \equiv i \pmod 2}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}.$$

と定義する.

本稿では, 主にこの多重 T 値が満たす線形関係式族についての結果や予想を述べる.

2 Ohno 型関係式

記号 X を n 回繰り返したもの $\underbrace{X, \dots, X}_{n}$ を $\{X\}^n$ と表すことにする. 右端が 2 以上のインデックスを

$$\boldsymbol{k} = (\{1\}^{a_1-1}, b_1+1, \dots, \{1\}^{a_r-1}, b_r+1), \quad a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r > 0$$

と一意的に書いたとき, その双対インデックスを

$$\boldsymbol{k}^\dagger \coloneqq (\{1\}^{b_r-1}, a_r+1, \dots, \{1\}^{b_1-1}, a_1+1)$$

とする. 多重ゼータ値は Ohno 関係式と呼ばれる関係式族を満たしている [O]. それは

$$O_h(\boldsymbol{k}) \coloneqq \sum_{\substack{0\leq e_1,\dots,e_r \\ e_1+\cdots+e_r=h}} \zeta(k_1+e_1, \dots, k_r+e_r)$$

としたとき,

$$O_h(\boldsymbol{k}) = O_h(\boldsymbol{k}^\dagger) \qquad (\forall h \geq 0)$$

が成り立つというものである. 多重 T 値において $O_h(\boldsymbol{k})$ の類似となる和を以下のように定義する.

$$
\begin{aligned}
O_h^{T,1}(k_1,\ldots,k_{2r}) &\coloneqq \sum_{0\le e_1,\ldots,e_r, e_1+\cdots+e_r=h} T(k_1+2e_1,k_2,k_3+2e_3,\ldots,k_{2r-2},k_{2r-1}+2e_r,k_{2r})\\
O_h^{T,1}(k_1,\ldots,k_{2r-1}) &\coloneqq \sum_{0\le e_1,\ldots,e_r, e_1+\cdots+e_r=h} T(k_1+2e_1,k_2,k_3+2e_3,\ldots,k_{2r-2},k_{2r-1}+2e_r)\\
O_h^{T,2}(k_1,\ldots,k_{2r}) &\coloneqq \sum_{\substack{0\le e_1,\ldots,e_r\\ e_1+\cdots+e_r=h}} T(k_1,k_2+2e_1,k_3,k_4+2e_2,\ldots,k_{2r-1},k_{2r}+2e_r)\\
O_h^{T,2}(k_1,\ldots,k_{2r+1}) &\coloneqq \sum_{\substack{0\le e_1,\ldots,e_r\\ e_1+\cdots+e_r=h}} T(k_1,k_2+2e_1,k_3,k_4+2e_2,\ldots,k_{2r-1},k_{2r}+2e_r,k_{2r+1}).
\end{aligned}
$$

また BBBL 型インデックスを以下のように定義する (BBBL は論文 [BBBL] の著者の頭文字).

Definition 2.1 (BBBL 型インデックス)**.** ある $k\ge 0, n_0,n_1,\ldots,n_{2k}\ge 0$ によって

$$(\{2\}^{n_0},1,\{2\}^{n_1},3,\ldots,\{2\}^{n_{2k-2}},1,\{2\}^{n_{2k-1}},3,\{2\}^{n_{2k}})$$

と書けるようなインデックスを BBBL 型インデックスという.

このとき, 多重 T 値に対する Ohno 型関係式が以下のように予想できる.

Conjecture 2.2 (M. 2026+)**.** $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ を深さが偶数で, ある BBBL 型インデックス $\boldsymbol{h}=(h_1,\ldots,h_r)$ が存在して, 全ての奇数 $i, 1\le i\le r$ に対し, $k_i=h_i$, 全ての偶数 $i, 1\le i\le r$ に対し, $k_i\equiv h_i \pmod 2$ が成り立つならば,

$$O_h^{T,1}(\boldsymbol{k})=O_h^{T,1}(\boldsymbol{k}^\dagger),\qquad \forall h\ge 0$$

である. また, $k_1\ge 2$ で, $(k_1-1,k_2,\ldots,k_r)$ がこの性質を満たすときも,

$$O_h^{T,1}(\boldsymbol{k})=O_h^{T,1}(\boldsymbol{k}^\dagger),\qquad \forall h\ge 0$$

が成り立つ.

Conjecture 2.3 (M. 2026+)**.** $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ と $\boldsymbol{k}^\dagger$ の深さが奇数で, ある BBBL 型インデックス $\boldsymbol{h}=(h_1,\ldots,h_r)$ が存在して, 全ての奇数 $i, 1\le i\le r$ に対し, $k_i=h_{r+1-i}$, 全ての偶数 $i, 1\le i\le r$ に対し, $k_i\equiv h_{r+1-i} \pmod 2$ が成り立つならば,

$$O_h^{T,1}(\boldsymbol{k})=O_h^{T,1}(\boldsymbol{k}^\dagger),\qquad \forall h\ge 0$$

である.

Conjecture 2.4 (M. 2026+)**.** $\boldsymbol{k}$ を深さが偶数で, ある BBBL 型インデックス $\boldsymbol{h}=(h_1,\ldots,h_r)$ が存在して, 全ての偶数 $i, 1\le i\le r$ に対し $k_i=h_i$, 全ての奇数 $i, 1\le i\le r$ に対し, $k_i\equiv h_i \pmod 2$ が成り立つならば,

$$O_h^{T,2}(\boldsymbol{k})=O_h^{T,2}(\boldsymbol{k}^\dagger),\qquad \forall h\ge 0$$

である. 逆にこれを満たすインデックスは, 上の条件を満たすものと, $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}^\dagger$ を満たすものに限る.

例として Conjecture 2.4 において, $\boldsymbol{k}=(3,3)$ とすると,

$$T(3,2k+3)=\sum_{j=0}^{k} T(1,2j+2,1,2k-2j+2)$$

が得られる. このような特別な場合は母関数を考えることによって示すことができる.

3 制限付き和公式

二重ゼータ値には Gangl–Kaneko–Zagier [GKZ] による制限付き和公式

$$\sum_{1\le a,b,a+b=k}\zeta(2a,2b)=\frac{3}{4}\zeta(2k),\qquad \sum_{1\le a,b,a+b=k}\zeta(2a-1,2b+1)=\frac{1}{4}\zeta(2k)$$

が知られている. 以下はその類似である.

Theorem 3.1 (M. 2026+)**.** $k\ge 1$ のとき,

$$\sum_{j=0}^{k-1}T(2j+1,2k-2j)=(2^{2k-1}-1)T(1,2k)$$

が成り立つ.

深さ 3 の類似として, 以下のような結果も得られた.

Theorem 3.2 (M. 2026+)**.**

$$\sum_{j=1}^{k-1}T(2j,1,2k-2j)=T(2k-1,2)\qquad k\ge 2$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}T(2j+1,2,2k-2j)=T(2k,3)\qquad k\ge 1$$

が成り立つ.

これは, 次のように巡回和公式の形に一般化できる.

Theorem 3.3 (M. 2026+)**.** $k_1,\dots,k_r\ge 0,(k_1,\dots,k_r)\neq(0,\dots,0),e_0,\dots,e_{r-1}\in\{0,1\},e_r=e_0$ のとき,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{r}T(2k_{i+1}+1-e_{i+1},1+e_{i+1},\dots,2k_r+1-e_r,1+e_r,\\&\qquad 2k_1+1-e_1,1+e_1,\dots,2k_{i-1}+1-e_{i-1},1+e_{i-1},2k_i+1-e_i,2+e_i)\\&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{k_i-1}T(2j+2-e_i,1+e_i,2k_{i+1}+1-e_{i+1},1+e_{i+1},\dots,2k_r+1-e_r,1+e_r,\\&\qquad 2k_1+1-e_1,1+e_1,\dots,2k_{i-1}+1-e_{i-1},1+e_{i-1},2k_i-2j)\end{aligned}$$

が成り立つ.

この結果は Hoffman–Ohno [HO] による多重ゼータ値の巡回和公式の証明において用いられた和の類似

$$\begin{aligned}Z(\boldsymbol{k})&\coloneqq\sum_{0<n_1\le n_2<\cdots\le n_{r-1}<n_r}\frac{2^{r-(k_1+\cdots+k_r)}n_1n_r}{n_1^{k_1}\left(n_2+\frac{1}{2}\right)^{k_2}n_3^{k_3}\cdots\left(n_{r-1}+\frac{1}{2}\right)^{k_{r-1}}n_r^{k_r}}\frac{1}{n_r^2-n_1^2}\\W(\boldsymbol{k})&\coloneqq\sum_{0\le n_1<n_2\le\cdots<n_{r-1}\le n_r}\frac{2^{r-(k_1+\cdots+k_r)}\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\left(n_r+\frac{1}{2}\right)}{\left(n_1+\frac{1}{2}\right)^{k_1}n_2^{k_2}\left(n_3+\frac{1}{2}\right)^{k_3}\cdots n_{r-1}^{k_{r-1}}\left(n_r+\frac{1}{2}\right)^{k_r}}\frac{1}{\left(n_r+\frac{1}{2}\right)^2-\left(n_1+\frac{1}{2}\right)^2}\\\boldsymbol{k}&\coloneqq(k_1,\dots,k_r)\end{aligned}$$

を用いることによって示すことができる. 別の形の制限付き和公式として, 以下のような結果も得られている.

Theorem 3.4 (M. 2026+)**.** $k\ge r\ge 1$ のとき,

$$\sum_{\substack{0<k_1,\dots,k_r\\k_1+\cdots+k_r=k}}T(2k_1-1,1,2k_2-1,1,\dots,2k_{r-1}-1,1,2k_r)=\frac{T(2k-2r+2)T(2r)}{T(2)}\in\mathbb{Q}\pi^{2k}$$

が成り立つ.

これは先ほどの Ohno 和の類似を用いると,

$$O_h^{T,1}(\{1\}^{2r},2)=\frac{T(2h+2)T(2r+2)}{T(2)}$$

と表すことができる. その類似として, 以下のような予想も見つかっている.

Conjecture 3.5 (M. 2026+). $\tan x$ の Maclaurin 展開を

$$\tan x=\sum_{0\le n}c_nx^{2n+1}$$

としたとき, $h\ge 0$ に対し,

$$O_h^{T,1}(\{1\}^{2r+1},2)=\sum_{j=0}^{r}c_jT(2)^jT(2h+1,2r+2-2j)$$
$$O_h^{T,1}(2,\{1\}^{2r+1},2)=\sum_{j=0}^{r}c_jT(2)^jT(2h+3,2r+2-2j)$$

が成り立つ.

$O_{h+1}^{T,1}(\{1\}^{2r+1},2)=O_h^{T,1}(2,\{1\}^{2r+1},2),\forall h\ge 0$ であることは Theorem 3.3 の巡回和公式を足し合わせることによって示すことができる.

4　和公式

多重ゼータ値の深さ 3 の和公式

$$\sum_{\substack{1\le a,b,2\le c\\ a+b+c=k}}\zeta(a,b,c)=\zeta(k)$$

の類似として, 以下の和公式が Kaneko–Tsumura によって示されている.

Theorem 4.1 (Kaneko–Tsumura [KT1], 2020). $k\ge 4$ のとき,

$$\sum_{\substack{1\le a,b,2\le c\\ a+b+c=k}}T(a,b,c)+\sum_{\substack{1\le a,2\le b\\ a+b=k-1}}T(1,a,b)=\frac{2}{3}T(2)T(k-2)$$

が成り立つ.

その類似として, 以下のような深さ 5 の予想が見つかっている.

Conjecture 4.2 (M. 2026+). $k\ge 6$ のとき,

$$2\sum_{\substack{1\le a,b,c,d,2\le e\\ a+b+c+d+e=k}}T(a,b,c,d,e)+\sum_{\substack{1\le a,b,c,2\le d\\ a+b+c+d=k-1}}T(1,a,b,c,d)$$
$$+\sum_{\substack{1\le a,b,2\le c\\ a+b+c=k-2}}(T(1,a,b,1,c)-T(a,b,1,1,c))=\frac{2}{5}T(2)^2T(k-4)$$

が成り立つ.

一般の深さの和公式として, 以下のような結果も知られている.

Theorem 4.3 (Takeyama [T], 2021)**.** u, v に関する形式的べき級数の等式

$$
\begin{aligned}
&1-\sum_{1\le r<k} u^{k-r}v^{r} \sum_{\substack{1\le k_1,\dots,k_{r-1},2\le k_r\\ k_1+\cdots+k_r=k}} 2^{-r}(1+\delta_{1,k_1})\cdots(1+\delta_{1,k_{r-1}})T(k_1,\dots,k_r)\\
&=\exp\left(\sum_{2\le k}\frac{T(k)}{2k}(u^k+v^k-(u+v)^k)\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．特に, $k>r\ge 1$ とするとき,

$$
\sum_{\substack{1\le k_1,\dots,k_{r-1},2\le k_r\\ k_1+\cdots+k_r=k}} (1+\delta_{1,k_1})\cdots(1+\delta_{1,k_{r-1}})T(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{Q}[T(2),T(3),T(4),\dots]
$$

となる．ここで, $\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタである．

次のような 2 つの和を考える．

$$
\begin{aligned}
W(k,r) &:= \sum_{\substack{1\le k_1,\dots,k_{r-1},2\le k_r\\ k_1+\cdots+k_r=k}} (1+\delta_{1,k_1})\cdots(1+\delta_{1,k_{r-1}})T(k_1,\dots,k_r)\\
\widetilde{W}(k,r) &:= \sum_{\substack{1\le k_1,\dots,k_{r-1},2\le k_r\\ k_1+\cdots+k_r=k}} (1+\delta_{1,k_1})\cdots(1+\delta_{1,k_{r-2}})T(k_1,\dots,k_r)
\end{aligned}
$$

1 つ目の和は上の定理の左辺に現れているものであり, 2 つ目の和はその類似である．これらの間には以下のような関係があることが予想される．

Conjecture 4.4 (M. 2026+)**.** $r\ge 1, k\ge 2r+2$ のとき,

$$
\widetilde{W}(k,2r+1)=\sum_{j=1}^{r}\zeta(2j)W(k-2j,2r+1-2j)
$$

が成り立つ．

この予想は $r=1$ の場合として, Kaneko–Tsumura による深さ 3 の和公式を含んでいる．

5 重み付き和公式

Ohno-Zudilin [OZ] による二重ゼータ値の重み付き和公式

$$
\sum_{1\le a,2\le b,a+b=k} 2^{b-1}\zeta(a,b)=\frac{k+1}{2}\zeta(k)
$$

の類似として, 以下の重み付き和公式が Kaneko–Tsumura によって示されている．

Theorem 5.1 (Kaneko–Tsumura [KT1], 2021)**.** $k\ge 3$ に対し,

$$
\sum_{1\le a,2\le b,a+b=k} 2^{b-1}T(a,b)=(k-1)T(k)
$$

が成り立つ．

また, Machide [M1] による三重ゼータ値の重み付き和公式

$$
\sum_{\substack{1\le a,b,2\le c\\ a+b+c=k}} 2^{b}(3^{c-1}-1)\zeta(a,b,c)=\frac{(k-1)(k+4)}{6}\zeta(k)
$$

の類似として, 以下の重み付き和公式が Kaneko–Tsumura [KT1] によって予想され, Berger–Chandra–Jain–Xu–Xu–Zhao [BCJXXZ] によって示されている．

Theorem 5.2 (Berger–Chandra–Jain–Xu–Xu–Zhao [BCJXXZ], 2023)**.** $k \geq 4$ に対し,

$$\sum_{\substack{1 \leq a,b,2 \leq c \\ a+b+c=k}} 2^b(3^{c-1}-1)T(a,b,c) = \frac{2}{3}(k-1)(k-2)T(k)$$

が成り立つ.

多重 T 値の重み付き和を

$$W_k^T(n_1,\ldots,n_r) \coloneqq \sum_{\substack{1 \leq k_1,\ldots,k_{r-1}, 2 \leq k_r \\ k_1+\cdots+k_r=k}} n_1^{k_1-1}\cdots n_{r-1}^{k_r-1}T(k_1,\ldots,k_r)$$

と定義すると, 前 2 つの定理は

$$W_k^T(1,2) = (k-1)T(k)$$
$$2W_k^T(1,2,3) - 2W_k^T(1,2,1) = \frac{2}{3}(k-1)(k-2)T(k)$$

と表すことができる. ここで, 以下のような数列の集合を定義する.

Definition 5.3. $0 < n_1,\ldots,n_r$ であり, 各 $i = 1,\ldots,r-1$ に対し, $|n_{i+1}-n_i| = 1$ であるような長さ r の数列 $(n_1,\ldots,n_r)$ 全体の集合を S_r で表す.

これを用いて, 前 2 つの定理は以下のように一般の深さに拡張することができる.

Theorem 5.4 (M. 2026+)**.** $k > r > 0$ に対し,

$$\sum_{(n_1,\ldots,n_r)\in S_r} (-1)^{\frac{r-n_r}{2}} n_1\cdots n_{r-1}W_k^T(n_1,\ldots,n_r) = \frac{2^{r-1}}{r}\binom{k-1}{r-1}T(k)$$

が成り立つ.

例として, $r = 4$ の場合,

$$6W_k^T(1,2,3,4) - 6W_k^T(1,2,3,2) - 2W_k^T(1,2,1,2) = 2\binom{k-1}{3}T(k) \qquad (k \geq 5)$$

となる.

別の形の制限付きの重み付き和公式として, 以下のような結果も得られている.

Theorem 5.5 (M. 2026+)**.** $k \geq 1$ のとき,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j 2^{3j-1}T(6k+2-3j,3j) - \sum_{j=0}^{2k-1}(-1)^j 2^{3j+1}T(6k-3j,3j+2)\\ &= \sum_{j=1}^{k}T(6k+2-6j,6j) - \sum_{j=0}^{k-1}T(6k-6j,6j+2)\end{aligned}$$

が成り立つ.

これは Machide [M3] による多重ゼータ値の制限付き和公式の類似と言える. 上の定理は 6 を法として 2 と合同である重さの多重 T 値の関係式であるが, 他の重さでも似たような関係式があるかどうかはまだ分かっていない.

6 散発的な予想

以下, 数値実験によって見つかった散発的な予想を述べる.

Conjecture 6.1 (M. 2026+). $k \geq 2$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&3W^T_{2k+1}(1,1,1,1) + 2W^T_{2k+1}(0,1,1,1) + W^T_{2k+1}(1,1,0,1) - 6W^T_{2k+1}(0,0,0,1) \in \mathbb{Q}[T(2), T(3), T(4), \ldots],\\
&4(W^T_{2k+1}(1,1,1,1) + W^T_{2k+1}(1,0,1,1) + W^T_{2k+1}(1,1,0,1) + W^T_{2k+1}(1,0,0,1)),\\
&\qquad + 3(W_{2k+1}(0,1,1,1) + W_{2k+1}(0,1,0,1)) + 2W_{2k+1}(0,0,1,1) \in \mathbb{Q}[T(2), T(3), T(4), \ldots],\\
&6W^T_{2k+1}(1,1,1,1) + 7W^T_{2k+1}(0,1,1,1) + 2W^T_{2k+1}(1,1,0,1) + 6W_{2k+1}(0,0,1,1) + 3W_{2k+1}(0,1,0,1) \in \mathbb{Q}[T(2), T(3), T(4), \ldots]
\end{aligned}
$$

が成り立つ. また, $k \geq 3$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&W^T_{2k}(0,1,1,1,1) + 2W^T_{2k}(0,0,1,1,1) + 2W^T_{2k}(0,0,0,1,1) \in T(2)\mathbb{Q}[T(2), T(3), T(4), \ldots],\\
&W^T_{2k}(0,1,0,1,1) + W^T_{2k}(0,1,1,0,1) + W^T_{2k}(0,1,0,0,1)\\
&\qquad + 2W^T_{2k}(0,0,0,1,1) + 2W^T_{2k}(0,0,1,0,1) + 8W^T_{2k}(0,0,0,0,1) \in \mathbb{Q}[T(2), T(3), T(4), \ldots]
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

これらは重さと深さの偶奇が異なる場合に深さ 1 の多重 T 値で表されるというものになっている.

Conjecture 6.2 (M. 2026+). $k \geq 6$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&2(W^T_k(1,0,1,1,1) + 2W^T_k(1,1,0,1,1) + W^T_k(1,0,0,1,1) + W^T_k(0,0,1,1,1) + W^T_k(0,1,0,1,1) + W^T_k(0,0,0,1,1))\\
&\qquad + W^T_k(1,1,0,0,1) + W^T_k(1,1,0,0,1) + W^T_k(0,1,1,1,1) - W^T_k(0,1,1,0,1) \in T(2)\mathbb{Q}[T(2), T(3), T(4), \ldots]
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

Conjecture 6.3 (M. 2026+). $k \geq 8$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&W^T_k(1,1,0,1,0,0,1) - W^T_k(0,1,0,1,1,0,1) - W^T_k(1,1,0,0,0,1,1) + W^T_k(0,1,1,0,0,1,1) - W^T_k(1,1,1,1,0,0,1)\\
&\qquad + W^T_k(0,1,1,1,1,0,1) - W^T_k(0,1,1,1,0,1,1) + W^T_k(1,1,0,0,1,1,1) - W^T_k(0,1,1,0,1,1,1)\\
&\qquad\quad + W^T_k(0,1,0,1,1,1,1) + W^T_k(1,1,1,1,0,1,1) - W^T_k(1,1,0,1,1,1,1) = 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

これは W^T_k の間の線形関係式になっている.

Conjecture 6.4 (M. 2026+). $k \geq 8$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&\frac{42}{17}W^T_k(0,1,0,0,0,0,1) + \frac{84}{17}W^T_k(0,0,1,0,0,0,1) + \frac{84}{17}W^T_k(0,0,0,1,0,0,1) + 12W^T_k(1,1,0,0,0,0,1)\\
&+ \frac{110}{17}W^T_k(0,1,1,0,0,0,1) - 2W^T_k(0,1,0,1,0,0,1) + \frac{84}{17}W^T_k(0,0,1,1,0,0,1) - \frac{188}{17}W^T_k(0,0,0,1,1,0,1)\\
&+ 4W^T_k(0,1,0,0,0,1,1) + 8W^T_k(0,0,1,0,0,1,1) + 4W^T_k(0,0,0,1,0,1,1) + 16W^T_k(1,1,1,0,0,0,1)\\
&+ \frac{93}{17}W^T_k(0,1,1,1,0,0,1) + 4W^T_k(1,1,0,0,1,0,1) - 4W^T_k(0,1,1,0,1,0,1) - \frac{154}{17}W^T_k(0,0,1,1,1,0,1)\\
&+ 5W^T_k(1,1,0,0,0,1,1) + W^T_k(0,1,1,0,0,1,1) + 2W^T_k(0,0,1,1,0,1,1) + 3W^T_k(0,1,0,0,0,1,1,1)\\
&+ 6W^T_k(0,0,1,0,1,1,1) - 8W^T_k(0,0,0,1,1,1,1) + 15W^T_k(1,1,1,1,0,0,1) + 2W^T_k(1,1,0,1,1,0,1)\\
&- \frac{196}{17}W^T_k(0,1,1,1,1,0,1) + 2W^T_k(1,1,1,0,0,1,1) - W^T_k(1,1,0,0,1,1,1) + 2W^T_k(0,1,1,0,1,1,1)\\
&+ 2W^T_k(0,1,0,1,1,1,1) - 20W^T_k(0,0,1,1,1,1,1) - 6W^T_k(1,1,1,1,1,0,1) - 6W^T_k(1,1,1,1,0,1,1)\\
&- 2W^T_k(1,1,1,0,1,1,1) + 3W^T_k(1,1,0,1,1,1,1) - 36W^T_k(0,1,1,1,1,1,1) - 53W^T_k(1,1,1,1,1,1,1)\\
&= 20T(6)T(k-6)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

これは Theorem 4.1, Conjecture 4.2 に続く予想と考えられるが, かなり項の数が多く規則性は見えない.

7 多重ゼータ値の関係式

本稿で述べた多重 T 値の関係式の結果や予想について, 多重ゼータ値においても同様の結果や予想が得られる場合があるのでそれについても言及しておきたいと思う. まず, Theorem 3.4 の多重ゼータ値における類似として以下が成り立つ.

Theorem 7.1 (M. 2026+)**.** u, v に関する形式的べき級数の等式

$$\sum_{0<r\le k} u^{2k-2r+1}v^{2r-1} \sum_{\substack{1\le k_1,\dots,k_r \\ k_1+\cdots+k_r=k}} \zeta(2k_1-1,1,\dots,2k_{r-1}-1,1,2k_r) = \frac{\cos\pi u\cos\pi v - \cos\pi\sqrt{u^2+v^2}}{\sin\pi u\sin\pi v}$$

が成り立つ. 特に $0<r\le k$ に対し,

$$\sum_{\substack{1\le k_1,\dots,k_r \\ k_1+\cdots+k_r=k}} \zeta(2k_1-1,1,\dots,2k_{r-1}-1,1,2k_r) \in \mathbb{Q}\pi^{2k}$$

が成り立つ.

この結果の $r=2$ の場合は Machide [M1] によって示されていたものである. この結果は Yamamoto [Y] によって導入された補間多重ゼータ値に以下のように拡張できると予想される.

Conjecture 7.2 (M. 2026+)**.** $0<r\le k$ に対し,

$$\sum_{\substack{1\le k_1,\dots,k_r \\ k_1+\cdots+k_r=k}} \zeta^t(2k_1-1,1,\dots,2k_{r-1}-1,1,2k_r) \in \mathbb{Q}[t]\pi^{2k}$$

が成り立つ.

しかし, これについては予想の明示式を与えることはまだできていない. 同様に Conjecture 3.5 の補間多重ゼータ値における類似として以下が予想される.

Conjecture 7.3 (M. 2026+)**.** $0<r\le k$ に対し,

$$\sum_{\substack{1\le k_1,\dots,k_r \\ k_1+\cdots+k_r=k}} \zeta^t(2k_1,1,2k_2-1,\dots,1,2k_{r-1}-1,1,2k_r) \in \mathbb{Q}[t,\pi^2,\zeta(3),\zeta(5),\dots],$$

$$\sum_{\substack{1\le k_1,\dots,k_r \\ k_1+\cdots+k_r=k}} \zeta^t(2k_1-1,1,\dots,1,2k_{r-1}-1,1,2k_r-1,2) \in \mathbb{Q}[t,\pi^2,\zeta(3),\zeta(5),\dots]$$

が成り立つ.

また, 散発的な予想として以下のようなものも見つかっている.

Conjecture 7.4 (M. 2026+)**.** $3\le k$ に対し,

$$\sum_{\substack{1\le k_1,k_2,k_3 \\ k_1+k_2+k_3=k}} \zeta^t(2k_1-1,1,2k_2,1,2k_3) \in \mathbb{Q}[t,\pi^2,\zeta(3),\zeta(5),\dots]$$

が成り立つ.

これらに関しては $t=0$ の場合の明示式もまだ分かっていない. 次に多重ゼータ値の重み付き和を

$$W_k(n_1,\dots,n_r) = \sum_{\substack{1\le k_1,\dots,k_{r-1},2\le k_r \\ k_1+\cdots+k_r=k}} n_1^{k_1-1}\cdots n_{r-1}^{k_r-1}\zeta(k_1,\dots,k_r)$$

とする. Theorem 5.4 の多重ゼータ値における類似として以下が成り立つ.

Theorem 7.5 (M. 2026+)**.** $0 < r \leq k$ に対し,

$$\sum_{(n_1,\ldots,n_r)\in S_r} (-1)^{\frac{r-n_r}{2}} n_1 \cdots n_{r-1} W_k(n_1,\ldots,n_r) = \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{r-1} \binom{k-j-1}{r-j-1}\binom{r}{j}\zeta(k)$$

が成り立つ.

この結果の $r=2$ の場合は Ohno-Zudilin の重み付き和公式であり, $r=3,4$ の場合は Machide [M1], [M2] によって示されていたものである.

8　多重 S 値

多重 T 値の類似として, 以下の多重 S 値が Xu–Zhao によって導入されている.

Definition 8.1 (Xu–Zhao [XZ], 2022)**.** インデックス $\boldsymbol{k} := (k_1,\ldots,k_r), k_r \geq 2$ に対し,

$$S(k_1,\ldots,k_r) := 2^r \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r \\ n_i \equiv i+1 \pmod 2}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}.$$

と定義する.

Theorem 3.3 の巡回和公式はこの多重 T 値と多重 S 値が混ざった関係式に拡張することができる. 具体例として, 多重 S 値だけに閉じた関係式として以下の結果が得られている.

Theorem 8.2 (M. 2026+)**.** $k \geq 1$ のとき,

$$\sum_{j=0}^{k-1} S(2j+1,1,2k-2j+1) = S(\{1\}^{2k},3),$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} S(2j+1,2,2k-2j) = S(\{1\}^{2k-1},2,2)$$

が成り立つ.

多重 S 値の関係式に関してはまだ結果や予想がほとんど得られておらず, 今後の研究課題である.

9　交代多重 T 値

インデックス $\boldsymbol{k} := (k_1,\ldots,k_r), k_r \geq 2$ に対し,

$$T(k_1,\ldots,k_{r-1},\overline{k_r}) := 2^r \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r \\ n_i \equiv i \pmod 2}} \frac{(-1)^{\frac{n_r-r}{2}}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

とする. この和に対し, Theorem 3.4 の類似として, 以下のような制限付き和公式が得られている.

Theorem 9.1 (M. 2026+)**.** $k \geq 0, r \geq 1$ に対し,

$$\sum_{\substack{0\leq k_1,\ldots,k_r \\ k_1+\cdots+k_r=k}} T(2k_1+1,1,\ldots,2k_{r-1}+1,1,\overline{2k_r+1}) = \frac{1}{(2r-2)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2r-2} T(\overline{2k+1})$$

が成り立つ.

これはインデックスの最後の成分だけが交代和になっているものに対する制限付き和公式であるが, 他の部分が交代和になっているようなものも含む制限付き和公式も存在するかどうかや, Theorem 3.3 の類似が存在するかどうかは気になる問題である. このようにインデックス最後の成分だけが交代和になっているものに対する関係式として, Xu [X] による重み付き和の関係式や, Kaneko–Tsumura [KT2] による高さ 1 の関係式が知られている.

謝辞

この度は RIMS「多重ゼータ値の諸相」において講演の機会をいただきありがとうございました. 研究代表者の大野泰生氏と関真一朗氏に感謝申し上げます. また, 原稿をチェックしていただいた金子昌信先生にも感謝申し上げます.

参考文献

[BBBL] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst, P. Lisoněk, Special values of multiple polylogarithms. *Trans. Amer. Math. Soc*, **353** 907–941 (2001).

[BCJXXZ] S, Berger, A. Chandra, J. Jain, D. Xu, C. Xu, J. Zhao, Proof of Kaneko-Tsumura conjecture on triple T-values. *Int. J. Number Theory*, **19** 495–510 (2023).

[GKZ] H. Gangl, M. Kaneko, D. Zagier, Double Zeta values and modular forms. *Automorphic forms and zeta functions, World, Sci, Publ*, 71–106. (2006).

[HO] M. Hoffman and Y. Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, *J. Algebra*, **262** 332–347 (2003).

[KT1] M. Kaneko, H. Tsumura, On multiple zeta values of level two. *Tsukuba J. Math*, **44** 213–234 (2020).

[KT2] M. Kaneko, H. Tsumura, Multiple L-values of level four, poly-Euler numbers, and related zeta functions. *Tohoku Math. J*, **76** 361–389 (2024).

[M1] T. Machide, Extended double shuffle relations and the generating function of triple zeta values of any fixed weight. *Kyushu J. Math*, **67** 281–307 (2013).

[M2] T. Machide, A generating function to generalize the sum formula for quadruple zeta values. *Tokyo J. Math*, **42** 329–355 (2019).

[M3] T. Machide, Some restricted sum formulas for double zeta values. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci*, **89** 51–54 (2013).

[T] Y. Takeyama, On a weighted sum of multiple T-values of fixed weight and depth. *Bull. Aust. Math. Soc*, **104** 398–405. (2021).

[O] Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, *J. Number Theory*, **74** 39-43 (1999).

[OZ] Y. Ohno, W. Zudilin, Zeta stars. *Commun. Number Theory Phys*, **2** 325–347 (2008)

[X] C. Xu, Duality of weighted sum formulas of alternating multiple T-values. *Bull. Korean Math. Soc*, **58** 1261–1278 (2021).

[XZ] C. Xu, J. Zhao, Variants of multiple zeta values with even and odd summation indices. *Math. Z*, **300** 3109–3142 (2022).

[Y] S. Yamamoto. Interpolation of multiple zeta and zeta-star values. *J. Algebra*, **385** 102–114 (2013).