多重 $\wp$-関数とその応用

東北大学・理学研究科数学専攻　菅野　隼
Hayato Kanno
Mathematical Institute, Tohoku University

概 要

[1]本稿では，[KK] で導入した多重 $\wp$-関数の depth 1 reduction の明示式を紹介し，その多重 Eisenstein 級数への応用について述べる．なお，本稿の内容は喜納勝海氏（九州大学）との共同研究に基づくものである．

1　導入

多重ゼータ値はリーマンゼータ値をその級数表示において多重一般化した対象である．正の偶数 $2k$ に対するリーマンゼータ値 $\zeta(2k)$ の母関数は三角関数を用いて表される．特に，cot 関数は Laurent 級数展開の係数に $\zeta(2k)$ を持ち，次の部分分数展開表示を持つことが知られている．

$$\pi\cot(\pi z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{-N<n<N}\frac{1}{z+n}.$$

Bouillot ([Bo]) は cot 関数をこの級数表示において多重一般化した multitangent function を導入した．そのうえで，multitangent function の基本的な性質をまとめ，さらに，それらのなす空間の代数構造に関する予想を提示した．Hirose は，multitangent function と多重ゼータ値のつながりを明らかにすることで，Bouillot の予想を解決し ([H1])，多重ゼータ値への応用も与えた ([H2])．

定義 1.1 (Bouillot, [Bo])**.** 自然数 $k_1, k_r \geq 2$, $k_2, \ldots, k_{r-1} \geq 1$ に対して，multitangent function $\Psi_{k_1,\ldots,k_r}(z)$ は次で定義される:

$$\Psi_{k_1,\ldots,k_r}(z) \coloneqq \sum_{-\infty<n_1<\cdots<n_r<+\infty}\frac{1}{(z+n_1)^{k_1}\cdots(z+n_r)^{k_r}}.$$

また，$\Psi_1(z) \coloneqq \pi\cot(\pi z)$ で定める．

深さが 1，すなわち $r=1$ のとき，$\Psi_k(z)$ (monotangent function と呼ばれる) は cot 関数の高階導関数であることに注意する．すなわち，任意の $k \geq 1$ に対して，

$$\Psi_k(z) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\Psi_1(z)$$

が成り立つ．Bouillot [Bo] による結果の一つとして，任意の multitangent function が monotangent function の $\mathcal{Z}$-線形和で明示的に表されることが知られている．ただし，$\mathcal{Z}$ はすべての多重ゼータ値の張る $\mathbb{Q}$-線形空間である．以下では，これを depth 1 reduction とよぶ．

本稿では，[KK] で新たに導入した，multitangent function の二重周期類似である多重 $\wp$-関数 (multiple $\wp$-function) を考察し，その depth 1 reduction の明示式を与える．

[1]本稿は，2025 年度 RIMS 共同研究（公開型）「多重ゼータ値の諸相」における筆者の講演「Multiple $\wp$-functions and their applications」に関する報告である．

定義 1.2 ([KK]). 2 以上の正整数 $k_1, \ldots, k_r \geq 2$ と $z \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ に対して，多重 $\wp$-関数 $\wp_{k_1,\ldots,k_r}(z;\tau)$ を次で定める:

$$\wp_{k_1,\ldots,k_r}(z;\tau) \coloneqq \lim_{M\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{Z}_M\tau + \mathbb{Z}_N \\ \lambda_1 \prec \cdots \prec \lambda_r}} \frac{1}{(z-\lambda_1)^{k_1} \cdots (z-\lambda_r)^{k_r}}.$$

ただし，$\mathbb{Z}_M = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < M\}$ とし，格子点の間の順序は次で定める:

$$m_1\tau + n_1 \prec m_2\tau + n_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (m_1 < m_2) \quad \text{or} \quad (m_1 = m_2, n_1 < n_2).$$

右辺の級数は $(\mathbb{C} \times \mathbb{H}) \setminus \{(z,\tau) \mid z \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}\}$ において広義一様収束し，$\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ 上の有理型関数を定める．多重 $\wp$-関数はカスプへの極限 $\tau \to i\infty$ を取ることで，multitangent function へと退化する．すなわち，$k_1, \ldots, k_r \geq 2$ に対して

$$\lim_{\tau\to i\infty} \wp_{k_1,\ldots,k_r}(z;\tau) = \Psi_{k_r,\ldots,k_1}(z) \tag{1.1}$$

が成り立つ．

注意 1.3. 定義より多重 $\wp$-関数は調和積公式を満たす．したがって，すべての多重 $\wp$-関数が生成する $\mathbb{Q}$-線形空間を $\mathcal{MPF}$ とすると，$\mathcal{MPF}$ は可換 $\mathbb{Q}$-代数の構造を持つ．この空間の構造に関するいくつかの興味深い予想が喜納氏により与えられている（同講究録の喜納氏による記事「多重 $\wp$ 関数について」を参照されたい）．

多重 $\wp$-関数は multitangent function の類似である一方，古典的な楕円関数の一つである Weierstrass の $\wp$-関数をその級数表示において多重一般化した関数とも解釈することができる．ただし，Weierstrass の $\wp$-関数は次の絶対収束する級数で定まる $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ 上の有理型関数である:

$$\wp(z;\tau) \coloneqq \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in (\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z})\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right).$$

深さ 1 の多重 $\wp$-関数（single $\wp$-function と呼ぶことにする）は，本質的に Weierstrass の $\wp$-関数の z に関する高階導関数であり，これらは $\wp, \wp'$ の多項式で表される．例えば，

$$\begin{aligned}
\wp_2(z;\tau) &= \wp(z;\tau) + 2G_2(\tau), \\
\wp_3(z;\tau) &= -\frac{1}{2}\wp'(z;\tau), \\
\wp_4(z;\tau) &= \frac{1}{6}\wp''(z;\tau) = \wp(z;\tau)^2 - 10G_4(\tau)
\end{aligned}$$

といった具合である．[KK] では，一般の重さ k に対する $\wp_k(z;\tau)$ の明示式を，partition trace と呼ばれる自然数の分割を用いた表示を使って与えた（これは松坂俊輝氏 (九州大学) による指摘である）．ここで，$G_k(\tau)$ は重さ k $(k \geq 2)$ の Eisenstein 級数

$$G_k(\tau) \coloneqq \lim_{M\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}_M\tau+\mathbb{Z}_N \\ \lambda \succ 0}} \frac{1}{\lambda^k}.$$

であり，特に k が 4 以上の偶数のとき，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k のモジュラー形式である．より一般の深さに対しても，多重 $\wp$-関数は楕円関数であることがわかる．すなわち，任意の $k_1, \ldots, k_r \geq 2$ に対して，

$$\wp_{k_1,\ldots,k_r}(z+w;\tau) = \wp_{k_1,\ldots,k_r}(z;\tau) \quad (\forall w \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$$

が成り立つ．楕円関数の一般論より，$\tau \in \mathbb{H}$ を固定すれば，$\wp_{k_1,\ldots,k_r}(z;\tau)$ は $\mathbb{C}(\wp,\wp')$ に属する．[KK] では，任意の多重 $\wp$-関数 $\wp_{k_1,\ldots,k_r}$ を $\wp,\wp'$ の多項式として明示的に表すことができることを明らかにした．すなわち，$\mathbb{Q}$-代数の自然な埋め込み

$$\mathcal{MPF} \hookrightarrow (\wp'\mathbb{Q}[\wp] \oplus \mathbb{Q}[\wp]) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{E}$$

が存在して，生成元 $\wp_{k_1,\ldots,k_r}$ の像を明示的に与えることができる．これは，まず多重 $\wp$-関数を $\wp_k(z;\tau)$ の $\mathcal{E}$-線形和で表し，各 $\wp_k(z;\tau)$ を $\wp,\wp'$ の多項式で表すことで実現できる．本稿では特に，任意の多重 $\wp$-関数が single $\wp$-function の $\mathcal{E}$-線形和で表す明示公式を紹介する（主定理 3.1）．ただし，$\mathcal{E}$ はすべての多重 Eisenstein 級数の張る $\mathbb{Q}$-線形空間である．多重 Eisenstein 級数は古典的な Eisenstein 級数を級数表示において多重一般化した $\mathbb{H}$ 上の正則関数であり，多重 $\wp$-関数と深いつながりがある．多重 Eisenstein 級数は 2 以上の整数 $k_1,\ldots,k_r \geq 2$ に対して，次で定められる:

$$G_{k_1,\ldots,k_r}(\tau) \coloneqq \lim_{M\to\infty}\lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{Z}_M\tau+\mathbb{Z}_N \\ 0\prec\lambda_1\prec\cdots\prec\lambda_r}} \frac{1}{\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_r^{k_r}}.$$

本稿の後半では，多重 $\wp$-関数の多重 Eisenstein 級数への応用について述べる．

2 multitangent function の depth 1 reduction

Bouillot ([Bo]) は調和積に関する正規化した multitangent function を構成し，それらに対する depth 1 reduction の明示式を与えた．本稿では，収束するインデックスに対する depth 1 reduction のみを紹介する．

定理 2.1 ([Bo])**.** 任意の $k_1,k_r \geq 2,\ k_2,\ldots,k_{r-1} \geq 1$ に対して，次が成り立つ．

$$\Psi_{k_1,\ldots,k_r}(z) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_r\geq 2\\ n_1+\cdots+n_r=k}} (-1)^{k_i+n_i+\cdots+n_r} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \binom{n_j-1}{k_j-1} \zeta(n_{i-1},\ldots,n_1)\zeta(n_{i+1},\ldots,n_r)\Psi_{n_i}(z), \tag{2.1}$$

ここで，$k=k_1+\cdots+k_r$ である．

例 2.2. 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
\Psi_{2,2}(z) &= 2\zeta(2)\Psi_2(z),\\
\Psi_{2,3}(z) &= \zeta(2)\Psi_3(z) + 3\zeta(3)\Psi_2(z),\\
\Psi_{2,2,3}(z) &= \zeta(2,2)\Psi_3(z) + (4\zeta(2,3)+3\zeta(3,2)+\zeta(5))\Psi_2(z).
\end{aligned}$$

Bouillot[Bo] によるこの定理の証明は，部分分数分解と shuffle antipode 関係式と呼ばれる次の多重ゼータ値の間の代数関係式を用いる．

補題 2.3. 任意の $k_1,k_r \geq 2,\ k_2,\ldots,k_{r-1} \geq 1$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_r\geq 1\\ n_1+\cdots+n_r=k\\ n_i=1}} (-1)^{k_i+n_i+\cdots+n_r} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \binom{n_j-1}{k_j-1} \zeta(n_{i-1},\ldots,n_1)\zeta(n_{i+1},\ldots,n_r) = 0$$

が成り立つ．

3　多重 $\wp$-関数の depth 1 reduction

3.1　主定理（多重 $\wp$-関数の depth 1 reduction の明示式）

次が本稿の主定理であり，Bouillot による multitangent function の depth 1 reduction (定理 2.1) の二重周期類似にあたる．

主定理 3.1 ([KK]). 任意の $k_1,\dots,k_r \geq 2$ に対して，

$$\wp_{k_1,\dots,k_r}(z;\tau)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{\substack{n_1,\dots,n_r\geq 2\\ n_1+\cdots+n_r=k}}(-1)^{k_i+n_i+\cdots+n_r}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\binom{n_j-1}{k_j-1}G_{n_{i-1},\dots,n_1}(\tau)G_{n_{i+1},\dots,n_r}(\tau)\wp_{n_i}(z;\tau)$$
$$+D_{k_1,\dots,k_r}(\tau) \tag{3.1}$$

が成り立つ．ここで，$D_{k_1,\dots,k_r}(\tau)\in\mathcal{E}$ は次で定められる:

$$D_{k_1,\dots,k_r}(\tau)=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}G_{k_i,\dots,k_1}(\tau)G_{k_{i+1},\dots,k_r}(\tau)$$
$$-2\sum_{i=1}^{r}\sum_{\substack{n_1,\dots,n_r\geq 0\\ n_!+\cdots+n_r=k\\ n_i:\text{even}}}(-1)^{k_i+n_i+\cdots+n_r}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\binom{n_j-1}{k_j-1}G_{n_{i-1},\dots,n_1}(\tau)G_{n_{i+1},\dots,n_r}(\tau)G_{n_i}(\tau).$$

例 3.2. 次が成り立つ:

$$\wp_{2,2}(z;\tau)=2G_2(\tau)\wp_2(z;\tau)+3G_4(\tau)-4G_{2,2}(\tau),$$
$$\wp_{3,2}(z;\tau)=G_2(\tau)\wp_3(z;\tau)+3G_3(\tau)\wp_2(z;\tau)-6G_{3,2}(\tau)-4G_{2,3}(\tau)+5G_5(\tau),$$
$$\wp_{3,2,2}(z;\tau)=G_{2,2}(\tau)\wp_3(z;\tau)+(4G_{2,3}(\tau)+3G_{3,2}(\tau)+G_5(\tau))\wp_2(z;\tau)$$
$$-12G_{2,2,3}-12G_{2,3,2}+8G_{2,5}-12G_{3,2,2}+3G_{3,4}-G_{4,3}+3G_{5,2}+G_7.$$

3.2　証明の概略

主定理 3.1 の証明の鍵は，多重 $\wp$-関数の母関数を用いることである．$k_1,\dots,k_r\geq 2$ に対して，$\mathbb{C}^r\times\mathbb{H}$ 上の有理型関数 $\wp_{k_1,\dots,k_r}, \widetilde{\wp}_{k_1,\dots,k_r}$ を次で定める:

$$\wp_{k_1,\dots,k_r}(z_1,\dots,z_r;\tau)\coloneqq\lim_{M\to\infty}\lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{\lambda_1,\dots,\lambda_r\in\mathbb{Z}_M\tau+\mathbb{Z}_N\\ \lambda_1\prec\cdots\prec\lambda_r}}\frac{1}{(z_1-\lambda_1)^{k_1}\cdots(z_r-\lambda_r)^{k_r}},$$
$$\widetilde{\wp}_{k_1,\dots,k_r}(z_1,\dots,z_r;\tau)\coloneqq\lim_{M\to\infty}\lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{\lambda_1,\dots,\lambda_r\in\mathbb{Z}_M\tau+\mathbb{Z}_N\\ 0\prec\lambda_1\prec\cdots\prec\lambda_r}}\frac{1}{(z_1-\lambda_1)^{k_1}\cdots(z_r-\lambda_r)^{k_r}}.$$

こうして定まる多変数版の多重 $\wp$-関数は多重 $\wp$-関数の母関数と理解することができる．すなわち，$(x_1,\dots,x_r)\in\mathbb{C}^r$ が任意の $i\in\{1,\dots,r\}$ に対して $|x_i|\ll 1$ を満たすとき，

$$\wp_{\underbrace{2,\dots,2}_{r}}(z-x_1,\dots,z-x_r;\tau)=\sum_{n_1,\dots,n_r\geq 2}(n_1-1)\cdots(n_r-1)\wp_{n_1,\dots,n_r}(z;\tau)x_1^{n_1-2}\cdots x_r^{n_r-2}$$

と展開できる．主定理 3.1 の証明のため，補題を用意する．(modify した) Weierstrass の ζ-関数 $\zeta(z;\tau)$ を，原点周りの Laurent 展開

$$\zeta(z;\tau) := -2\sum_{k\geq 0} G_{2k}(\tau) z^{2k-1}$$

で定める．ただし，$G_0(\tau) := -1/2$ である．$\zeta(z;\tau)$ は $\mathbb{C}\times\mathbb{H}$ 上に有理型接続され，また，その擬周期性は次のように記述されることが知られている．

補題 3.3 (Legendre relation)**.** 格子点 $w \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ に対し，$\eta_w := \zeta(z+w;\tau) - \zeta(z;\tau)$ とする．このとき，$\eta_1\tau - \eta_\tau = 2\pi i$ が成り立つ．

主定理 3.1 の証明の概略: 主定理の等式 (3.1) は，$|x_i| \ll 1$ ($\forall i \in \{1,\dots,r\}$) なる $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して，次の等式が成立することより従う．

$$\wp_{\{2\}^r}(z-x_1,\dots,z-x_r;\tau) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\zeta(z-x_i;\tau)+\zeta(x_i))\mathcal{Q}_{r,i}(x_i,\tau;\boldsymbol{x})\right] + \wp_{\{2\}^r}(x_r,\dots,x_1;\tau). \tag{3.2}$$

ここで，$\{2\}^r$ は $\overbrace{2,\dots,2}^{r}$ を表し，$\mathcal{Q}_{r,i}(z,\tau;\boldsymbol{x})$ は次で定める:

$$\mathcal{Q}_{r,i}(z,\tau;\boldsymbol{x}) := \widetilde{\wp}_{\{2\}^{r-i}}(z-x_{i+1},\dots,z-x_r;\tau)\widetilde{\wp}_{\{2\}^{i-1}}(x_{i-1}-z,\dots,x_1-z;\tau).$$

これで，主定理の等式は多重 $\wp$-関数の母関数である $\wp_{\{2\}^r}(z-x_1,\dots,z-x_r;\tau)$ に関する等式に帰着された．定義より，$\wp_{\{2\}^r}(z-x_1,\dots,z-x_r;\tau)$ は $z = x_i$ に極を持つ．そこで，この極を打ち消した関数 $F_r(z,\tau;\boldsymbol{x})$ を

$$\wp_{\{2\}^r}(z-x_1,\dots,z-x_r;\tau) - \sum_{i=1}^{r}\wp_2(z-x_i;\tau)\mathcal{Q}_{r,i}(x_i,\tau;\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{r}\zeta(z-x_i;\tau)\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{Q}_{r,i}(x_i,\tau;\boldsymbol{x})$$

で定める．すると，$F_r(z,\tau;\boldsymbol{x})$ は $z \in \mathbb{C}$ に関して全平面で正則な関数であることがわかり，また，任意の格子点 $w \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ に対して，

$$F_r(z+w,\tau;\boldsymbol{x}) - F_r(z,\tau;\boldsymbol{x}) = -\eta_w \sum_{i=1}^{r}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{Q}_{r,i}(x_i,\tau;\boldsymbol{x})$$

が成り立つことがわかる．したがって $F_r(z,\tau;\boldsymbol{x})$ の z に関する一階導関数は二重周期性を持つ全平面で正則な関数であり，ゆえに，$F_r(z,\tau;\boldsymbol{x})$ は z に関して一次関数 $az+b$ と等しい．ここで

$$F_r(z+1) - F_r(z) = -\eta_1 \sum_{i=1}^{r}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{Q}_{r,i}(x_i,\tau;\boldsymbol{x}) = a,$$
$$F_r(z+\tau) - F_r(z) = -\eta_\tau \sum_{i=1}^{r}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{Q}_{r,i}(x_i,\tau;\boldsymbol{x}) = a\tau$$

であるから，補題 3.3 より，$a = \sum_{i=1}^{r}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{Q}_{r,i}(x_i,\tau;\boldsymbol{x}) = 0$ が得られる．すなわち $F_r(z)$ は定数関数であり，特に $F_r(z,\tau;\boldsymbol{x}) = F_r(0,\tau;\boldsymbol{x})$ が成り立つ．この等式が正に求めていた等式 (3.2) である．□

4　多重 Eisenstein 級数への応用

本節では，主定理から得られる多重 Eisenstein 級数への応用として，多重 Eisenstein 級数の間のいくつかの代数関係式を与える．また，いくつかの残された課題についても論じる．

4.1　多重 Eisenstein 級数の shuffle antipode 関係式

主定理の証明の途中で得られた等式

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{Q}_{r,i}(x_i, \tau; \boldsymbol{x}) = 0$$

を $x_i = 0$ の周りで展開するとき，その $x_1^{k_1-2} \cdots x_r^{k_r-2}$ の係数は多重 Eisenstein 級数の積和で表される．したがって，この等式から多重 Eisenstein 級数の間の代数関係式が得られるが，驚くことに，こうして得られる関係式は次の shuffle antipode 関係式と全く一致する．

命題 4.1. 任意の $k_1, \ldots, k_r \geq 2$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_r \geq 1 \\ n_1+\cdots+n_r=k \\ n_i=1}} (-1)^{k_i+n_i+\cdots+n_r} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \binom{n_j-1}{k_j-1} G_{n_{i-1},\ldots,n_1}(\tau) G_{n_{i+1},\ldots,n_r}(\tau) = 0$$

が成り立つ．ただし，$k = k_1 + \cdots + k_r$ である．

注意 4.2. 命題 4.1 は，Bachmann–Tasaka [BT] による多重 Eisenstein 級数のシャッフル正規化を用いても証明することができる．

他にも，主定理から系として得られる関係式を紹介する．主定理の等式 (3.1) の両辺の $z = 0$ まわりでの Laurent 展開において z^m $(m > 0)$ の係数を比較することで次が得られる．

命題 4.3. 任意の $k_1, \ldots, k_r \geq 2$ と $m > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{r} &\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_r \geq 0 \\ n_1+\cdots+n_r=m+k \\ n_i:\mathrm{even}}} (-1)^{k_i+n_{i+1}+\cdots+n_r} \binom{n_i-1}{m} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \binom{n_j-1}{k_j-1} G_{n_{i-1},\ldots,n_1} G_{n_{i+1},\ldots,n_r} G_{n_i} \\
&= \sum_{i=0}^{r} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_r \geq 0 \\ n_1+\cdots+n_r=m+k}} (-1)^{n_{i+1}+\cdots+n_r} \prod_{j=1}^{r} \binom{n_j-1}{k_j-1} G_{n_i,\ldots,n_1} G_{n_{i+1},\ldots,n_r} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{r} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_r \geq 0 \\ n_1+\cdots+n_r=m+k \\ n_i=0}} (-1)^{k_i+n_{i+1}+\cdots+n_r} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \binom{n_j-1}{k_j-1} G_{n_{i-1},\ldots,n_1} G_{n_{i+1},\ldots,n_r}.
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，$k = k_1 + \cdots + k_r$ である．

いくつかの数値実験によると，この関係式は，shuffle antipode 関係式 (命題 4.1) と調和積から得られるようである．

4.2 multitangent function との比較

多重 Eisenstein 級数は，カスプへの極限 $\tau \to i\infty$ を取ることで，多重ゼータ値に退化することが知られている．すなわち，任意の $k_1, \ldots, k_r \geq 2$ に対して，

$$\lim_{\tau \to i\infty} G_{k_1,\ldots,k_r}(\tau) = \zeta(k_1, \ldots, k_r)$$

が成り立つ．同様に，多重 $\wp$-関数は，multitangent function に退化するのであった (式 (1.1))．したがって，主定理の等式 (3.1) において，極限 $\tau \to i\infty$ を取ることで，$k_1, \ldots, k_r \geq 2$ に対する multitangent function $\Psi_{k_1,\ldots,k_r}(z)$ の depth 1 reduction の明示式が得られる:

$$\begin{aligned}\Psi_{k_1,\ldots,k_r}(z) = &\sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_r \geq 2 \\ n_1+\cdots+n_r=k}} (-1)^{k_i+n_i+\cdots+n_r} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \binom{n_j-1}{k_j-1} \zeta(n_{i-1},\ldots,n_1)\zeta(n_{i+1},\ldots,n_r)\Psi_{n_i}(z) \\ &+ \lim_{\tau \to i\infty} D_{k_1,\ldots,k_r}(\tau). \end{aligned} \tag{4.1}$$

ここで，Bouillot [Bo] により既に得られていた式 (2.1) との違いは右辺の第二項であり，式 (2.1) と式 (4.1) を比較することで，次が得られる．

命題 4.4. 任意の $k_1, \ldots, k_r \geq 2$ に対して，$\lim_{\tau \to i\infty} D_{k_1,\ldots,k_r}(\tau) = 0$ が成り立つ．すなわち，

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \to i\infty} \Biggl\{ &\sum_{i=0}^{r} (-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r} G_{k_i,\ldots,k_1}(\tau) G_{k_{i+1},\ldots,k_r}(\tau) \\ &- 2\sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_r \geq 0 \\ n_1+\cdots+n_r=k \\ n_i:\text{even}}} (-1)^{k_i+n_i+\cdots+n_r} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \binom{n_j-1}{k_j-1} G_{n_{i-1},\ldots,n_1}(\tau) G_{n_{i+1},\ldots,n_r}(\tau) G_{n_i}(\tau) \Biggr\} = 0\end{aligned}$$

が成り立つ．

注意 4.5. 命題 4.4 の等式は，既に (多重ゼータ値の代数関係式の形で)，Hirose [H2] で述べられている．その証明は，multitangent function の depth 1 reduction の明示式 (2.1) において，その Laurent 級数の定数項を比較することから直接従う．

例 4.6. 命題 4.4 において，積を調和積で展開することで次が得られる:

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \to i\infty} D_{2,2}(\tau) &= \lim_{\tau \to i\infty} (-4G_{2,2}(\tau) + 3G_4(\tau)) = -4\zeta(2,2) + 3\zeta(4) = 0, \\ \lim_{\tau \to i\infty} D_{3,2}(\tau) &= \lim_{\tau \to i\infty} (-6G_{3,2}(\tau) - 4G_{2,3}(\tau) + 5G_5(\tau)) = -6\zeta(3,2) - 4\zeta(2,3) + 5\zeta(5) = 0.\end{aligned}$$

多重 Eisenstein 級数の間の代数関係式は，その極限を取ることで多重ゼータ値の間の代数関係式を与える．一方，多重ゼータ値の間の代数関係式であって，多重 Eisenstein 級数にそのまま持ち上がらないような関係式がどのようなものか，すなわち，全射な $\mathbb{Q}$-代数の準同型

$$\pi : \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{Z} : G_{k_1,\ldots,k_r}(\tau) \mapsto \lim_{\tau \to i\infty} G_{k_1,\ldots,k_r}(\tau) = \zeta(k_1, \ldots, k_r)$$

の核 $\ker \pi$ はどのようであるか，という問題は多重 Eisenstein 級数の研究における中心的な課題の一つである．深さが 2 の場合には，Kaneko [Ka] による次の結果が知られている．$\mathcal{DE}_k, \mathcal{DZ}_k$ をそ

れぞれ，深さが 2, 重さが k のインデックスに対する (正規化した) 多重 Eisenstein 級数，多重ゼータ値の張る $\mathbb{Q}$-線形空間とする．このとき，自然な全射

$$\pi_1 : \mathcal{DE}_k \twoheadrightarrow \mathcal{DZ}_k : G_{k_1,k_2}(\tau) \mapsto \zeta(k_1, k_2) \quad (k = k_1 + k_2)$$

の核は，空間 $S_k \oplus \mathbb{Q} \cdot 2\pi i \dfrac{d}{d\tau} G_{k-2}(\tau)$ を含むことが知られている（より強く，空間が一致することが予想されている）．ただし，S_k は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k のカスプ形式で Fourier 係数が $(2\pi i)^k \cdot \mathbb{Q}$ に含まれるもの全体のなす $\mathbb{Q}$-線形空間である．命題 4.4 は，$D_{k_1,\ldots,k_r}(\tau)$ が非自明な $\ker \pi \subset \mathcal{E}$ の元を与えていることを意味する．そこで，$D_{k_1,\ldots,k_r}(\tau)$ が具体的にどのような空間に含まれるのか，という疑問が生じる．この問題に対して，ごく限定的な場合においては次のような命題が成り立つことがわかっている．

命題 4.7. 任意の $k \geq 2$ に対して，$D_{k,2}(\tau) = 2\pi i \dfrac{d}{d\tau} G_k(\tau)$ が成り立つ．

k が偶数の場合は Kaneko [Ka]，k が奇数の場合は本質的に Bachmann–Kühn–Matthes [BKM] の結果から従う．一般のインデックス $k_1, \ldots, k_r \geq 2$ に対して $D_{k_1,\ldots,k_r}(\tau)$ は，多重 Eisenstein 級数の微分などを用いて，どのように表されるであろうか．

謝辞

2025 年度 RIMS 共同研究（公開型）「多重ゼータ値の諸相」における講演の機会を与えてくださいました世話人の大野泰生先生，関真一朗先生に感謝申し上げます．

参考文献

[BKM] H. Bachmann, U. Kühn and N. Matthes, *Realizations of the formal double Eisenstein space*, preprint, arXiv:2109.04267, (2021)

[BT] H. Bachmann and K. Tasaka, *The double shuffle relations for multiple Eisenstein series*, Nagoya Math. J. **230** (2018), 180–212

[Bo] O. Bouillot, *The algebra of multitangent functions*, J. Algebra **410** (2014), 148–238

[GKZ] H. Gangl, M. Kaneko and D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, in Automorphic forms and zeta functions, World Sci. Publ. (2006), 71–106

[H1] M. Hirose, *Multitangent functions and symmetric multiple zeta values*, preprint, arXiv:2402.13902, (2024)

[H2] M. Hirose, *An explicit parity theorem for multiple zeta values via multitangent functions*, Ramanujan J. **67** (2025), no. 4, Paper No. 87, 8 pp.

[Ka] M. Kaneko, *Double zeta values and modular forms*, in Proceedings of the Japan-Korea joint seminar on number theory, October 9–12, 2004, Kuju, Japan. Fukuoka: Kyushu University. 79–85.

[KK] H. Kanno and K. Kina, *Multiple $\wp$-Functions and Their Applications*, preprint, arXiv:2507.14118, (2025)