Shuffle product for multiple zeta functions*

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科　篠原 健
Takeshi Shinohara
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

1　はじめに

本稿は 2025 年京都大学数理解析研究所にて開催された研究集会「多重ゼータ値の諸相」の講演内容をまとめたものであり、論文 [KS26] の内容に基づく。具体的には多重ゼータ値のシャッフル積関係式を (ある意味自然に) 多重ゼータ関数の関数関係式へと拡張することができたので、その方法について述べる。問題の背景を整理していくためにまずは用語の定義から始めよう。(Euler-Zagier 型) **多重ゼータ関数 (MZF)** とは以下の同値な 2 つの級数で定義される:

$$\zeta_r(s_1,\dots,s_r) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_r^{s_r}} = \sum_{m_1,\dots,m_r\in\mathbb{N}} \frac{1}{m_1^{s_1}(m_1+m_2)^{s_2}\cdots(m_1+\cdots+m_r)^{s_r}}.$$

ここで $r\in\mathbb{N}$ は**深さ (depth)** と呼ばれ、$s_1,\dots,s_r\in\mathbb{C}$ は複素変数である。MZF は次の領域において絶対収束する。

$$\mathcal{D}_r := \{(s_1,\dots,s_r)\in\mathbb{C}^r \mid \mathrm{Re}(s_j+\cdots+s_r) > r-j+1,\ j=1,\dots,r\}.$$

この $\mathcal{D}_r$ 内の正の整数点における MZF の値が**多重ゼータ値 (MZV)** である。MZV たちの大事な性質として、調和積関係式、シャッフル積関係式、（正規化）複シャッフル関係式、和公式、大野関係式、双対関係式、結合子関係式、合流関係式、川島関係式等膨大な数の関係式を満たすことが挙げられよう。このうち、例えば調和積関係式の一番単純な場合は

$$\zeta(a)\zeta(b) = \zeta_2(a,b)+\zeta_2(b,a)+\zeta(a+b) \quad (a,b\in\mathbb{N}_{>1}) \tag{1.1}$$

であり、MZV/MZF の定義式の級数表示 (和の範囲が $0<n_1<n_2<\cdots$ の方) より導かれるのであった。またシャッフル積関係式の一番単純な例は

$$\zeta(a)\zeta(b) = \sum_{k=0}^{a-1}\binom{b+k-1}{k}\zeta_2(a-k,b+k) + \sum_{k=0}^{b-1}\binom{a+k-1}{k}\zeta_2(b-k,a+k) \quad (a,b\in\mathbb{N}_{>1}) \tag{1.2}$$

であり、後述するが反復積分表示や部分分数分解公式を用いるといった複数の方法で証明できる。ここで (1.1) と (1.2) の左辺は同じ Riemann ゼータ値の積であるから右辺を比較して次を得る。

$$\zeta_2(a,b)+\zeta_2(b,a)+\zeta(a+b) = \sum_{k=0}^{a-1}\binom{b+k-1}{k}\zeta_2(a-k,b+k) + \sum_{k=0}^{b-1}\binom{a+k-1}{k}\zeta_2(b-k,a+k).$$

* 本稿は小見山尚氏（大阪大学）との共同研究に基づく。

一般の深さでも同様だが、斯様に調和積関係式とシャッフル積関係式を比較して得る MZV たちの（非自明な）線形関係式のことを**有限複シャッフル積関係式**と呼び、多くの MZV たちの線形関係式を導くことが知られている。また上述の例では当然 $a, b > 1$ だが実は $a = 1$ もしくは $b = 1$ に対応する場合の複シャッフル積関係式も考えられ、それらの関係式をこめた**正規化複シャッフル関係式**は MZV たちのすべての $\mathbb{Q}$ 線形関係式を導くだろうと予想されている (cf. [IKZ06])。以降この予想を**井原-金子-Zagier の予想**と呼ぶことにする。

さて本稿ではタイトルにもある通り、MZV ではなく MZF をメインに扱う。MZF の観点から見ると次の疑問は自然に浮かび上がってくる。

Question 1.1. MZV たちの満たす関係式は実は MZF の関数関係式の特別な場合ではないか？

筆者の知る限りこの類の問は [Mat06] が初出だと思われるので以降**松本の問**と呼ぶ。補足として論説 [Mat15] には「解析的な立場から見たときに自然に浮かぶひとつの疑問は、それらの (MZV たちの) 関係式が整数点においてだけ成立しているものであるのか、それとも複素関数としての $\zeta_{EZ,r}$(=MZF) たちの間に成り立っている関係式を整数点のところで見ているに過ぎないのか、どちらであろう、ということである。筆者 (松本先生) はこの疑問について 2000 年頃から、しばしば研究集会の場などで発言してきた。」とある。

松本の問について、上述の井原-金子-Zagier の予想のため、すなわち正規化複シャッフル関係式が MZV たちのすべての $\mathbb{Q}$ 線形関係式を導くという予想のため、MZV の調和積関係式とシャッフル積関係式の 2 つが MZF の関数関係式に延びるかどうか調べたくなる。

調和積関係式については、(1.1) の両辺を見ても、その証明を考えても分かるとおり a, b が自然数であることを用いておらず、一般に全複素空間上の有理型関数の間の等式として直ちに理解できる。しかしながらシャッフル積関係式についてはそう簡単ではない。一般の場合も含めきちんと述べるためにここで MZV の反復積分表示を確認しておこう。MZV は次の積分表示を持つのであった：自然数の組 $(k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}$(収束のために $k_r \geq 2$ とする) に対して次が成り立つ。

$$\zeta_r(k_1, \ldots, k_r) = I(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k_1-1}, 1, \ldots, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_r-1}, 1), \tag{1.3}$$

ここで $\omega_0(t) = \frac{dt}{t}, \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}$ に対し

$$I(\epsilon_n, \ldots, \epsilon_1) := \int_{0<t_1<\cdots<t_n<1} \prod_{j=1}^{n} \omega_{\epsilon_j}(t_j), \quad \epsilon_j \in \{0,\ 1\}$$

と定める。(1.3) の表示を用いて MZV たちの積を計算するとシャッフル積関係式が得られるが、(1.3) は $k_1, \ldots, k_r$ が自然数でなくなると意味をなさない。そのため反復積分表示 (1.3) において $k_1, \ldots, k_r$ を非正整数に、まして複素変数にまで拡張しようとするのは一筋縄ではいかなそうなことが伺える。

Remark 1.2. Joyner 氏は [Joy10] において、(1.3) の拡張として MZF $\zeta_r(s_1, \ldots, s_r)$ の「反復積分表示」を与えているようだが、それらの積構造には触れていないようである。複素変数に対する反復積分の具体的な定義については触れないが興味のある方は [Joy10] を参照されたい。

以上まとめると松本の問の非自明な部分は MZV の調和積関係式由来以外の関係式であり、これまでに多くの研究が行われている。そのうち [KMT11] が特に重要な先行研究になっているので次節で解説する。

2　無限部分分数分解

この章では [KMT11] を簡単に紹介し、主結果の最も単純な場合である Riemann ゼータ関数と Riemann ゼータ関数の積が 2 重ゼータ関数の無限和で表されることを示す。

[KMT11] では MZV のシャッフル積関係式を反復積分表示を用いずに、部分分数分解公式から導いたのであった。ここで部分分数分解公式とは次の基本的な関係式のことを指している。自然数 $a, b \in \mathbb{N}$ に対し、次が成り立つ。

$$\frac{1}{x^a y^b} = \sum_{k=0}^{a-1} \binom{b+k-1}{k} \frac{1}{x^{a-k}(x+y)^{b+k}} + \sum_{k=0}^{b-1} \binom{a+k-1}{k} \frac{1}{y^{b-k}(x+y)^{a+k}}. \tag{2.1}$$

証明は初等的なので省略するが、この等式は非常に重要である。実際、$a, b > 1$ のとき (2.1) の両辺について全ての自然数 $x, y \in \mathbb{N}$ に対し和をとると左辺は Riemann ゼータ値の積に、右辺は 2 重ゼータ値の和になり、従って (1.2) が得られる。小森-松本-津村はこの事実に注目し、一般の場合でも帰納的に (2.1) を用いることで、MZV たちのシャッフル積関係式が示せることを指摘したのである。本稿の結果は MZV に対するシャッフル積関係式を MZF に対する関数関係式に拡張することだが、そのためにまず部分分数分解公式 (2.1) を複素数 $a, b \in \mathbb{C}$ に対して一般化する。その上で肝要なのは Gauss の超幾何関数たちの間に成り立つ次の関係式である。

Lemma 2.1. 複素数 $s, t \in \mathbb{C}$ は $\mathrm{Re}(s), \mathrm{Re}(t) > 0$ を満たすとせよ。このとき任意の $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し次が成り立つ。

$$\frac{(x+y)^{s+t}}{x^s y^t} = \frac{\Gamma(s+t)}{\Gamma(s)\Gamma(t)} \left(\frac{1}{s} \cdot {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} s+t,\ 1 \\ s+1 \end{matrix}\right| \frac{x}{x+y}\right) + \frac{1}{t} \cdot {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} s+t,\ 1 \\ t+1 \end{matrix}\right| \frac{y}{x+y}\right) \right),$$

ただし ${}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}\right| z\right)$ *は Gauss の超幾何関数である;*

$${}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}\right| z\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n.$$

ここで $z \in \mathbb{C}$ は $|z| < 1$ とし、$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ $(\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0})$ とする。また $(X)_0 = 1$, $(X)_n = X(X+1)\cdots(X+n-1)$ は *Pochhammer* 記号であり、$\Gamma(s)$ はガンマ関数である。

Proof. 細かい解説は [WW27, §14.53] 等の教科書に譲るが、Gauss の超幾何関数 ${}_2F_1$ は次の関係式を満たすのであった。$0 < z < 1$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ は $\alpha, \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \beta, \pm(\alpha + \beta - \gamma) + 1 \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ を満たすとすると

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}\right| z\right) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \alpha+\beta-\gamma+1 \end{matrix}\right| 1-z\right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} \gamma-\alpha,\ \gamma-\beta \\ \gamma-\alpha-\beta+1 \end{matrix}\right| 1-z\right) \end{aligned}$$

が成り立つ。この等式で $\alpha = s+t, \beta = 1, \gamma = s+1, z = \frac{x}{x+y}$ とおくと次のようになる。

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} s+t,\ 1 \\ s+1 \end{matrix}\right| \frac{x}{x+y}\right) &= \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(-t)}{\Gamma(1-t)\Gamma(s)} {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} s+t,\ 1 \\ t+1 \end{matrix}\right| \frac{y}{x+y}\right) + \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)\Gamma(1)} \left(\frac{y}{x+y}\right)^{-t} {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} 1-t,\ s \\ 1-t \end{matrix}\right| \frac{y}{x+y}\right) \\ &= -\frac{s}{t}\, {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} s+t,\ 1 \\ t+1 \end{matrix}\right| \frac{y}{x+y}\right) + s \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} \frac{(x+y)^{s+t}}{x^s y^t}. \end{aligned}$$

後は両辺整理して主張の式を得る。 □

部分分数分解公式 (2.1) を一般化するにあたり一つ記号を確認しておこう。複素数 $s, t \in \mathbb{C}$ に対し

$$\binom{s}{t} := \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(t+1)\Gamma(s-t+1)} \tag{2.2}$$

とおく。もし $s, t \in \mathbb{N}$, $s \geq t$ なら $\binom{s}{t}$ は古典的な二項係数に一致する。

Proposition 2.2 (無限部分分数分解, IPFD)**.** 複素数 $s,\ t \in \mathbb{C}$ は $\mathrm{Re}(s),\ \mathrm{Re}(t) > 0$ を満たすとせよ。任意の $x,$ $y \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^s y^t} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\binom{t+k-1}{k}\frac{1}{x^{s-k}(x+y)^{t+k}} - \binom{s+t+k-1}{s+k}\frac{1}{x^{-k}(x+y)^{s+t+k}}\right] \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\binom{s+k-1}{k}\frac{1}{y^{t-k}(x+y)^{s+k}} - \binom{s+t+k-1}{t+k}\frac{1}{y^{-k}(x+y)^{s+t+k}}\right].\end{aligned} \tag{IPFD}$$

Proof. Lemma 2.1 を用いると次が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^s y^t} &= \frac{1}{x^s y^t} - \frac{\Gamma(s+t)}{\Gamma(s)\Gamma(t)}\,\frac{1}{s}\,\cdot {}_2F_1\left(\left.{s+t,1 \atop s+1}\,\right|\,\frac{x}{x+y}\right)\frac{1}{(x+y)^{s+t}} \\ &\quad + \frac{1}{x^s y^t} - \frac{\Gamma(s+t)}{\Gamma(s)\Gamma(t)}\,\frac{1}{t}\,\cdot {}_2F_1\left(\left.{s+t,1 \atop t+1}\,\right|\,\frac{y}{x+y}\right)\frac{1}{(x+y)^{s+t}}.\end{aligned}$$

あとは右辺にある 2 つの $\frac{1}{x^s y^t}$ を

$$\frac{1}{x^s y^t} = \frac{1}{x^s (x+y)^t (1-\frac{x}{(x+y)})^t} = \frac{1}{x^s (x+y)^t}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{t+k-1}{k}\left(\frac{x}{x+y}\right)^k$$

などと一般二項展開を用いて変形すれば良い。 □

大事なことだが (IPFD) について $s, t \in \mathbb{N}$ とすると項の打ち消し合い (telescoping) が起き、もとの部分分数分解公式 (2.1) に一致する。この意味で (IPFD) は (2.1) の自然な拡張であると見做せる。

Remark 2.3. MZV のシャッフル積関係式は、MZV の Mellin 変換表示からも証明できるのであった。MZF についても Mellin 変換表示が成り立つが、これを計算していくことでも (IPFD) が証明できることを [KS26] では述べている。

さて [KMT11] では部分分数分解公式 (2.1) の両辺について、全ての自然数 $x, y \in \mathbb{N}$ について和を取ることで 2 重の場合のシャッフル積関係式 (1.2) を得たのであった。そこで無限部分分数分解公式 (IPFD) の両辺についても、全ての自然数 $x, y \in \mathbb{N}$ について和を取り 2 重ゼータ関数の間の関数関係式を期待したくなるのは自然であろう。これを実行するために一つ補題を示しておく。

Lemma 2.4. $\mathrm{Re}(s),\ \mathrm{Re}(t) > 1$ を満たす複素数 $s,\ t \in \mathbb{C}$ に対し次の級数は絶対収束する。

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\binom{t+k-1}{k}\zeta_2(s-k, t+k) - \binom{s+t+k-1}{s+k}\zeta_2(-k, s+t+k)\right].$$

Proof. k についての和の中身を評価する。十分大きな k に対して次の評価ができる。

$$\begin{aligned}
&\left|\binom{t+k-1}{k}\zeta_2(s-k,t+k)-\binom{s+t+k-1}{s+k}\zeta_2(-k,s+t+k)\right| \\
&\le \sum_{m,n\in\mathbb{N}}\left|\binom{t+k-1}{k}\frac{1}{m^{s-k}(m+n)^{t+k}}-\binom{s+t+k-1}{s+k}\frac{1}{m^{-k}(m+n)^{s+t+k}}\right| \\
&= \sum_{m,n\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{\Gamma(t)}\frac{1}{(m+n)^t}\left(\frac{m}{m+n}\right)^k\right|\cdot\left|\frac{\Gamma(t+k)}{\Gamma(k+1)}\frac{1}{m^s}-\frac{\Gamma(s+t+k)}{\Gamma(s+k+1)}\frac{1}{(m+n)^s}\right| \\
&= \sum_{m,n\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{\Gamma(t)}\frac{1}{(m+n)^t}\left(\frac{m}{m+n}\right)^k k^{t-1}(1+o(1))\right|\cdot\left|\frac{1}{m^s}-\frac{1}{(m+n)^s}\right|.
\end{aligned}$$

ただし最後の等式において Tricomi と Erdélyi([TE51]) の次の結果を用いた;

$$\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)}=x^{a-b}\left(1+\frac{(a-b)(a+b-1)}{2x}+O(x^{-2})\right)\quad(\text{as } x\to\infty,\ a,\ b\in\mathbb{C}).$$

すると k による部分は二項定理によって次のように評価できる。

$$\left|k^{t-1}\left(\frac{m}{m+n}\right)^k\right|=\left|\frac{k^{t-1}}{(1+n/m)^k}\right|=\left(\frac{m}{n}\right)^{\lfloor\mathrm{Re}(t)\rfloor+1}O\left(\frac{1}{k^{2-\{\mathrm{Re}(t)\}}}\right)$$

ここで実数 $x\in\mathbb{R}$ に対して $\lfloor x\rfloor$ (resp. $\{x\}$) で x の整数部分 (resp. 小数部分) を表している。故に k によっていない部分、つまり

$$\sum_{m,n\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{m^{-\lfloor\mathrm{Re}(t)\rfloor-1}n^{\lfloor\mathrm{Re}(t)\rfloor+1}(m+n)^t}\right|\left|\frac{1}{m^s}-\frac{1}{(m+n)^s}\right| \tag{2.3}$$

が絶対収束するならば結論を得るので、以下この級数を調べよう。

まずは次の評価に注意せよ。

$$\left|\frac{1}{m^s}-\frac{1}{(m+n)^s}\right|=\left|\int_{m+n}^{m}(-s)u^{-s-1}du\right|\le|s|\int_{m}^{m+n}u^{-\mathrm{Re}(s)-1}du=\frac{|s|}{\mathrm{Re}(s)}\left(\frac{1}{m^{\mathrm{Re}(s)}}-\frac{1}{(m+n)^{\mathrm{Re}(s)}}\right).$$

先に $\mathrm{Re}(s)>2$ として収束性を調べる。このとき当然 $|(\frac{m}{m+n})^{\mathrm{Re}(s)}|<1$ なので、

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{m^{\mathrm{Re}(s)-\lfloor\mathrm{Re}(t)\rfloor-1}n^{\lfloor\mathrm{Re}(t)\rfloor+1}(m+n)^t}\left(1-\left(\frac{m}{m+n}\right)^{\mathrm{Re}(s)}\right)\right| \\
&\le \sum_{m,n\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{m^{\mathrm{Re}(s)-\lfloor\mathrm{Re}(t)\rfloor-1}n^{\lfloor\mathrm{Re}(t)\rfloor+1}(m+n)^t}\right|=\sum_{m,n\in\mathbb{N}}\frac{1}{m^{\mathrm{Re}(s)-\lfloor\mathrm{Re}(t)\rfloor-1}n^{\lfloor\mathrm{Re}(t)\rfloor+1}(m+n)^{\mathrm{Re}(t)}}
\end{aligned}$$

と上から評価できる。すると最後、右辺の級数は Mordell-Tornheim の 2 重ゼータ関数に他ならず、[*1] その収束性は簡単にわかる。また $1<\mathrm{Re}(s)\le 2$ のときでも、$|1-(\frac{m}{m+n})^{\mathrm{Re}(s)}|\le|1-(\frac{m}{m+n})^2|=\frac{2mn}{(m+n)^2}+\frac{n^2}{(m+n)^2}$ から同様にして (2.3) が収束することがわかる。 □

以上の準備のもと MZF たちの関数関係式としてのシャッフル積関係式の最も単純な場合を示そう。

Proposition 2.5. $\mathrm{Re}(s),\ \mathrm{Re}(t)>1$ なる複素数 $s,\ t\in\mathbb{C}$ について次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\zeta(s)\zeta(t)=&\sum_{k=0}^{\infty}\left[\binom{t+k-1}{k}\zeta_2(s-k,t+k)-\binom{s+t+k-1}{s+k}\zeta_2(-k,s+t+k)\right] \\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\binom{s+k-1}{k}\zeta_2(t-k,s+k)-\binom{s+t+k-1}{t+k}\zeta_2(-k,s+t+k)\right].
\end{aligned} \tag{2.4}$$

---

*1 Mordell-Tornheim の 2 重ゼータ関数 $\sum_{m,n\in\mathbb{N}}m^{-r}n^{-s}(m+n)^{-t}$ は $\mathrm{Re}(r+t)>1,\ \mathrm{Re}(s+t)>1,\ \mathrm{Re}(r+s+t)>2$ のとき絶対収束する。

Proof. (IPFD) の両辺を $\sum_{x,y\in\mathbb{N}}$ で和を取り、右辺については無限和 $\sum_{k\geq 0}$ と $\sum_{x,y\in\mathbb{N}}$ の交換が Lemma 2.4 によって保証されるので (2.4) を得る。 □

Remark 2.6. 式 (2.4) において $s,t\in\mathbb{N}_{>1}$ とすると打ち消しあい (telescoping) が起き、(1.2) を得る。この意味で (2.4) は、無限和になってしまってはいるが、MZV のシャッフル積関係式の MZF の関数関係式への自然な拡張と見做せるだろうと筆者は考えている。はたして (2.4) の右辺を MZF の有限和で表すことは可能なのだろうか。

Remark 2.7. (2.4) は $\mathrm{Re}(s),\mathrm{Re}(t)>1$ なる複素数 $s,t\in\mathbb{C}$ について述べているが、小野寺氏 (千葉工大) によるとこの式の成立範囲を広げられるようである。一般には任意の $s,t\in\mathbb{C}$ での成立を期待している。[KS26] の最後で述べているが、(2.4) がもし任意の $s,t\in\mathbb{C}$ で成り立つなら、例えば t を非正整数 $-l$ ($l\in\mathbb{N}_0$) に特殊化することで MZF の帰納的関係式

$$\zeta_2(s,-l)=-\frac{1}{l+1}\zeta(s-l-1)+\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\zeta(s-l+k)\zeta(-k)$$

と同値な式が得られる。これは偶然の一致なのだろうか。

すでに述べたとおり MZV の調和積公式は MZF の関数関係式に自然に拡張できるのであった。よって 2 重の場合には関数関係式としての調和積公式とシャッフル積公式を比較することで、関数関係式版の複シャッフル関係式が得られる。

Corollary 2.8. $\mathrm{Re}(s)$, $\mathrm{Re}(t)>1$ なる複素数 $s,\ t\in\mathbb{C}$ に対し次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\zeta_2(s,t)+\zeta_2(t,s)+\zeta(s+t)=\sum_{k=0}^{\infty}&\left[\binom{t+k-1}{k}\zeta_2(s-k,t+k)-\binom{s+t+k-1}{s+k}\zeta_2(-k,s+t+k)\right]\\&+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\binom{s+k-1}{k}\zeta_2(t-k,s+k)-\binom{s+t+k-1}{t+k}\zeta_2(-k,s+t+k)\right].\end{aligned}\tag{2.5}$$

Remark 2.9. 松本氏は [Mat04] で 2 重ゼータ関数の関数等式を示している。詳細な式は [Mat04] を見てもらいたいが、雑に言うと 2 重ゼータ関数 $\zeta_2(s_1,s_2)$ と $\zeta_2(1-s_2,1-s_1)$ の間の対称性を述べている。MZV については正規化複シャッフル関係式から MZV たちの全ての $\mathbb{Q}$ 線形関係式が従うという井原-金子-Zagier の予想があるが、MZF についてはどうだろうか。すなわち (2.5) から松本氏による 2 重ゼータ関数の関数等式は導けるのだろうか。

3　シャッフル積とルート系のゼータ関数

前章では 2 重の場合にシャッフル積関係式が関数関係式に拡張できることを見たのであった。当然一般の場合がどうなるのか気になるところだが、[KMT11] 同様に（一旦収束性の細かい議論を除けば）(IPFD) を帰納的に使っていくことで MZF の関数関係式としてのシャッフル積関係式が得られる。MZV の場合もそうだが一般に MZF たちのシャッフル積関係式を書き下すことは容易ではない。この章では**ルート系のゼータ関数**を用いると MZF のシャッフル積関係式の帰納的な計算が (比較的) 明快になることを説明する。

ルート系のゼータ関数の理論については近年教科書 [KMT24] が出版されたので厳密な定義等はそちらを参照されたい。本稿では A_r 型のゼータ関数のみを扱うが、A_r 型のゼータ関数は次のような明示式を持つのであった。

Proposition 3.1 (cf. [KMT24, Proposition 3.5])**.** 自然数 $r \in \mathbb{N}$ と複素数 $\boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in \mathbb{C}^{r(r+1)/2}$ について次が成り立つ。

$$\zeta_r(\boldsymbol{s}; A_r) = \sum_{m_1,\ldots,m_r \in \mathbb{N}} \prod_{1 \le i \le j \le r} (m_i + \cdots + m_j)^{-s_{ij}}.$$

一般的でないことは承知だが、本稿ではこの等式をもって $\zeta_r(\boldsymbol{s}; A_r)$ の定義とする。簡単にわかるが $\zeta_r(\boldsymbol{s}; A_r)$ は $\{(s_{ij}) \in \mathbb{C}^{r(r+1)/2} \mid \mathrm{Re}(s_{ij}) > 1,\ 1 \le i \le j \le r\}$ において絶対収束する。

MZF の帰納的なシャッフル積を計算するために、一つ記法を導入する。

Notation 3.2. A_r 型のゼータ関数 $\zeta_r(\boldsymbol{s}; A_r)$ について、変数 s_{ij} たちを以下のように並べて書くことにする。

$$\zeta_r(\boldsymbol{s}; A_r) = \zeta_r \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1r} \\ & s_{22} & \cdots & s_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & s_{rr} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Remark 3.3. A_r 型のゼータ関数 $\zeta_r(\boldsymbol{s}; A_r)$ について、$s_{ij} = 0\ (i \ge 2)$ とすると $\zeta_r(\boldsymbol{s}; A_r)$ は Euler-Zagier 型の MZF に一致する。

$$\zeta_r(s_{11}, \ldots, s_{1r}, \boldsymbol{0}; A_r) = \zeta_r \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1r} \\ & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \zeta_r(s_{11}, \ldots, s_{1r}).$$

また一般に (3.1) の表示において、対角成分 s_{ii} から始めて右か上のみの移動で右上の成分 s_{1r} まで、r 個の複素変数を取りそれ以外を 0 にすると Euler-Zagier 型の MZF に一致する。

Example 3.4. Proposition 3.1 より、$s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{C}\ (\mathrm{Re}(s_i) > 1)$ に対して次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\zeta_3(s_1, s_2, s_3) &= \zeta_3 \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \zeta_3 \begin{pmatrix} 0 & s_2 & s_3 \\ & s_1 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \zeta_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_3 \\ & s_1 & s_2 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \zeta_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_3 \\ & 0 & s_2 \\ & & s_1 \end{pmatrix}, \\
\zeta_4(s_1, s_2, s_3, s_4) &= \zeta_4 \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \zeta_4 \begin{pmatrix} 0 & s_2 & s_3 & s_4 \\ & s_1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \zeta_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_3 & s_4 \\ & s_1 & s_2 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \zeta_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s_4 \\ & s_1 & s_2 & s_3 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\
&= \zeta_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_3 & s_4 \\ & 0 & s_2 & 0 \\ & & s_1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \zeta_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s_4 \\ & 0 & s_2 & s_3 \\ & & s_1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \zeta_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s_4 \\ & 0 & 0 & s_3 \\ & & s_1 & s_2 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \zeta_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s_4 \\ & 0 & 0 & s_3 \\ & & 0 & s_2 \\ & & & s_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

次のような等式が成り立つことも注意しておく。

$$\zeta_3 \begin{pmatrix} s_1 & 0 & s_2 \\ & 0 & 0 \\ & & s_3 \end{pmatrix} = \zeta_3 \begin{pmatrix} s_1 & 0 & s_2 \\ & s_3 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta_4 \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & 0 & s_3 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & s_4 \end{pmatrix} = \zeta_4 \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & 0 & s_3 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & s_4 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

続けて MZF の積もまた A_r 型のゼータ関数で表されることを確認しておく。

Example 3.5. 複素数 $s, t \in \mathbb{C}$ は $\mathrm{Re}(s), \mathrm{Re}(t) > 1$ を満たすとする。次が成り立つ。

$$\zeta(s)\zeta(t) = \sum_{m_1 \in \mathbb{N}} \frac{1}{m_1^s} \sum_{m_2 \in \mathbb{N}} \frac{1}{m_2^t} = \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{N}} \frac{1}{m_1^s m_2^t (m_1 + m_2)^0} = \zeta_2 \begin{pmatrix} s & 0 \\ & t \end{pmatrix} = \zeta_2 \begin{pmatrix} t & 0 \\ & s \end{pmatrix}.$$

また $\mathrm{Re}(s_i), \mathrm{Re}(t_i) > 1$ なる複素数 $s_1, s_2, s_3\ t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ について次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\zeta_2(s_1, s_2)\zeta(t_1) &= \zeta_3 \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & t_1 \end{pmatrix} = \zeta_3 \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ & s_1 & s_2 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \zeta_3 \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ & 0 & s_2 \\ & & s_1 \end{pmatrix}, \\
\zeta_3(s_1, s_2, s_3)\zeta(t_1) &= \zeta_4 \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & t_1 \end{pmatrix} = \zeta_4 \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ & s_1 & s_2 & s_3 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \\
\zeta_2(s_1, s_2)\zeta_2(t_1, t_2) &= \zeta_4 \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & t_1 & t_2 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \zeta_4 \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & t_2 \\ & & & t_1 \end{pmatrix} = \zeta_4 \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & s_2 \\ & & & s_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

これらの記法が MZF のシャッフル積の帰納的な計算に有効であることを説明しよう。

Proposition 3.6. 自然数 $p,\ q \in \mathbb{N}$ をとる。複素数 $(s_1,\ldots,s_p) \in \mathbb{C}^p$, $(t_1,\ldots,t_q) \in \mathbb{C}^q$ たちは $\mathrm{Re}(s_p) > 1$, $\mathrm{Re}(t_q) > 1$ かつ $\mathrm{Re}(s_i), \mathrm{Re}(t_j) \geq 1$ $(1 \leq i \leq p-1,\ 1 \leq j \leq q-1)$ を満たすとせよ。このとき次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\zeta_p(s_1,\ldots,s_p)\zeta_q(t_1,\ldots,t_q)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\binom{t_q+k-1}{k}\zeta(\boldsymbol{s}', s_p-k; \boldsymbol{t}'; t_q+k) - \binom{s_p+t_q+k-1}{s_p+k}\zeta(\boldsymbol{s}', -k; \boldsymbol{t}'; s_p+t_q+k)\right]\\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\binom{s_p+k-1}{k}\zeta(\boldsymbol{s}'; \boldsymbol{t}', t_q-k; s_p+k) - \binom{s_p+t_q+k-1}{t_q+k}\zeta(\boldsymbol{s}'; \boldsymbol{t}', -k; s_p+t_q+k)\right],
\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{s}' := (s_1,\ldots,s_{p-1})$, $\boldsymbol{t}' := (t_1,\ldots,t_{q-1})$ とおいた。また $\boldsymbol{s} = (s_1,\ldots,s_p)$, $\boldsymbol{t} = (t_1,\ldots,t_q)$ に対して記号 $\zeta(\boldsymbol{s};\boldsymbol{t};u)$ は次の省略形である。

$$\zeta(\boldsymbol{s};\boldsymbol{t};u) = \zeta_{p+q+1}\begin{pmatrix}
s_1 & \cdots & \cdots & s_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 & u\\
 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0\\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
 & & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0\\
 & & & & t_1 & \cdots & \cdots & t_q & 0\\
 & & & & & 0 & \cdots & 0 & 0\\
 & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots\\
 & & & & & & & 0 & \vdots\\
 & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}.$$

Proof. 大まかなアイデアを述べる。自然数 $m_1,\ldots,m_p,\ n_1,\ldots,n_q \in \mathbb{N}$ に対し $M_j := \sum_{i=1}^{j} m_i$ $(1 \leq j \leq p)$, $N_j := \sum_{i=1}^{j} n_i$ $(1 \leq j \leq q)$ とおく。このとき $\zeta_p(s_1,\ldots,s_p)\zeta_q(t_1,\ldots,t_q)$ の和の中身は

$$\frac{1}{M_1^{s_1}\cdots M_p^{s_p}} \cdot \frac{1}{N_1^{t_1}\cdots N_q^{t_q}}$$

である。$\frac{1}{M_p^{s_p}}$ と $\frac{1}{N_q^{t_q}}$ の積について (IPFD) を適用し $m_1,\ldots,m_p \in \mathbb{N}$ と $n_1,\ldots,n_q \in \mathbb{N}$ について和を取ることで主張の式を得る。無限和 $\sum_{m_1,\ldots,m_p\in\mathbb{N}}$, $\sum_{n_1,\ldots,n_q\in\mathbb{N}}$ と $\sum_{k\geq 0}$ の交換については Lemma 2.4 と同様にすれば良い。 □

Example 3.7. Depth $2 \times$ **depth** 1**.** 複素数 $s_1, s_2, t \in \mathbb{C}$ は $\mathrm{Re}(s_1) \geq 1$, $\mathrm{Re}(s_2) > 1$, $\mathrm{Re}(t) > 1$ を満たすとせよ。このとき (IPFD) によって次を得る。右辺の和の収束性については省略する。

$$\begin{aligned}
\zeta_2(s_1,s_2)\zeta(t) = \zeta_3\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & 0\\ & 0 & 0\\ & & t\end{pmatrix} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\binom{t+k-1}{k}\zeta_3\begin{pmatrix} s_1 & s_2-k & t+k\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{pmatrix} - \binom{t+s_2+k-1}{s_2+k}\zeta_3\begin{pmatrix} s_1 & -k & s_2+t+k\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{pmatrix}\right]\\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\binom{s_2+k-1}{k}\zeta_3\begin{pmatrix} s_1 & 0 & s_2+k\\ & 0 & 0\\ & & t-k\end{pmatrix} - \binom{s_2+t+k-1}{t+k}\zeta_3\begin{pmatrix} s_1 & 0 & s_2+t+k\\ & 0 & 0\\ & & -k\end{pmatrix}\right].
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ここで Example 3.4 で見たように、右辺 1 つ目の和に現れる $\zeta_3\begin{pmatrix} s_1 & s_2-k & t+k\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{pmatrix}$ と $\zeta_3\begin{pmatrix} s_1 & -k & s_2+t+k\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{pmatrix}$ は Euler-Zagier 型の MZF である。次に右辺 2 つ目の和に現れる A_3 型のゼータ関数について考える。上述した (3.2) と (IPFD) によって

$$\begin{aligned}
\zeta_3\begin{pmatrix} s_1 & 0 & s_2+k\\ & 0 & 0\\ & & t-k\end{pmatrix} = \zeta_3\begin{pmatrix} s_1 & 0 & s_2+k\\ & t-k & 0\\ & & 0\end{pmatrix} &= \sum_{j=0}^{\infty}\left[\binom{t-k+j-1}{j}\zeta_3\begin{pmatrix} s_1-j & t-k+j & s_2+k\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{pmatrix} - \binom{s_1+t-k+j-1}{s_1+j}\zeta_3\begin{pmatrix} -j & s_1+t-k+j & s_2+k\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{pmatrix}\right]\\
&\quad + \sum_{j=0}^{\infty}\left[\binom{s_1+j-1}{j}\zeta_3\begin{pmatrix} 0 & s_1+j & s_2+k\\ & t-k-j & 0\\ & & 0\end{pmatrix} - \binom{s_1+t-k+j-1}{t-k+j}\zeta_3\begin{pmatrix} 0 & s_1+t-k+j & s_2+k\\ & -j & 0\\ & & 0\end{pmatrix}\right]
\end{aligned}$$

と変形できる。また

$$m_2^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (m_1+m_2)^{k-j} m_1^j$$

より、任意の $k \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\zeta_3 \begin{pmatrix} s_1 & 0 & s_2+t+k \\ & 0 & 0 \\ & & -k \end{pmatrix} = \zeta_3 \begin{pmatrix} s_1 & 0 & s_2+t+k \\ & -k & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \zeta_3 \begin{pmatrix} s_1-j & -k+j & s_2+t+k \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

となる。以上まとめると深さ 2 と深さ 1 の MZF のシャッフル積は次のようになる。

$$\begin{aligned} \zeta_2(s_1,s_2)\zeta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Bigg[& \binom{t+k-1}{k} \zeta_3(s_1, s_2-k, t+k) - \binom{t+s_2+k-1}{s_2+k} \zeta_3(s_1, -k, s_2+t+k) \Bigg] \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \Bigg[& \binom{s_2+k-1}{k} \sum_{j=0}^{\infty} \Bigg[\binom{t-k+j-1}{j} \zeta_3(s_1-j, t-k+j, s_2+k) \\ & \qquad - \binom{s_1+t-k+j-1}{s_1+j} \zeta_3(-j, s_1+t-k+j, s_2+k) \Bigg] \\ & + \binom{s_2+k-1}{k} \sum_{j=0}^{\infty} \Bigg[\binom{s_1+j-1}{j} \zeta_3(t-k-j, s_1+j, s_2+k) \\ & \qquad - \binom{s_1+t-k+j-1}{t-k+j} \zeta_3(-j, s_1+t-k+j, s_2+k) \Bigg] \\ & - \binom{s_2+t+k-1}{t+k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \zeta_3(s_1-j, -k+j, s_2+t+k) \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

確認しておくが、$(s_1, s_2) = (b, c)$, $t = a$ ($b \in \mathbb{N}$, $c, a \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$) とおくと (3.4) はもとの深さ 2 と深さ 1 の MZV のシャッフル積関係式になる：

$$\begin{aligned} \zeta(b,c)\zeta(a) = & \sum_{k=0}^{c-1} \binom{a+k-1}{k} \zeta(b, c-k, a+k) + \sum_{k=0}^{a-1} \sum_{j=0}^{b-1} \binom{c+k-1}{k} \binom{a-k+j-1}{j} \zeta(b-j, a-k+j, c+k) \\ & + \sum_{k=0}^{a-1} \sum_{j=0}^{a-k-1} \binom{c+k-1}{k} \binom{b+j-1}{j} \zeta(a-k-j, b+j, c+k). \end{aligned}$$

Remark 3.8. (3.3) において $s_2 = a, t = b$ ($a, b \in \mathbb{N}$) とすると右辺は有限和になり、[KMT11] の式 (42) と一致する。

Example 3.9. Depth 2 × depth 2. $\mathrm{Re}(s_1), \mathrm{Re}(t_1) \geq 1, \mathrm{Re}(s_2), \mathrm{Re}(t_2) > 1$ なる複素数 $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ について 2 重ゼータ関数たちの積を考える。式が煩雑になるので計算の大まかなアイデアだけ (IPFD を適用していくだけだが) を紹介するが、Example 3.5 で見たように

$$\zeta_2(s_1,s_2)\zeta_2(t_1,t_2) = \zeta_4 \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & t_1 & t_2 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \sum_{m_1,m_2,m_3,m_4 \in \mathbb{N}} \frac{1}{m_1^{s_1}(m_1+m_2)^{s_2} m_3^{t_1}(m_3+m_4)^{t_2}}$$

と書ける。このとき和の中身の $\frac{1}{(m_1+m_2)^{s_2}}$ と $\frac{1}{(m_3+m_4)^{t_2}}$ について (IPFD) を用いることにより、次を得る。

$$\begin{aligned} \zeta_4 \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & t_1 & t_2 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = & \sum_{k=0}^{\infty} \Bigg[\binom{t_2+k-1}{k} \zeta_4 \begin{pmatrix} s_1 & s_2-k & 0 & t_2+k \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & t_1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} - \binom{s_2+t_2+k-1}{s_2+k} \zeta_4 \begin{pmatrix} s_1 & -k & 0 & s_2+t_2+k \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & t_1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \Bigg] \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \Bigg[\binom{s_2+k-1}{k} \zeta_4 \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & s_2+k \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & t_1 & t_2-k \\ & & & 0 \end{pmatrix} - \binom{s_2+t_2+k-1}{t_2+k} \zeta_4 \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & s_2+t_2+k \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & t_1 & -k \\ & & & 0 \end{pmatrix} \Bigg] \end{aligned} \tag{3.5}$$

ここで (3.5) の右辺について、

$$\zeta_4\begin{pmatrix} s_1 & s_2-k & 0 & t_2+k \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & t_1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix},\quad \zeta_4\begin{pmatrix} s_1 & -k & 0 & s_2+t_2+k \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & t_1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

は depth 2 × depth 1 でやったのと同様の計算により MZF の無限和になることがわかる。また

$$\zeta_4\begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & s_2+k \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & t_1 & t_2-k \\ & & & 0 \end{pmatrix},\quad \zeta_4\begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & s_2+t_2+k \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & t_1 & -k \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

については (3.2) と同様にして

$$\zeta_4\begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & s_2+k \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & t_1 & t_2-k \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \zeta_4\begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & s_2+k \\ & t_1 & t_2-k & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix},\quad \zeta_4\begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & s_2+t_2+k \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & t_1 & -k \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \zeta_4\begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & s_2+t_2+k \\ & t_1 & -k & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\zeta_4\begin{pmatrix} s_1-j & 0 & j-k & s_2+t_2+k \\ & t_1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

となるので、前者は先述した depth 2 × depth 1 の例と同様の計算で、後者は前セクションの深さ 1 同士の場合と同様の計算で MZF の無限和になることがわかる。

以上より (収束性の議論を一旦省くが)A_r 型のゼータ関数を用いると MZF のシャッフル積を帰納的に計算でき、最終的には MZF のみの無限和で表すことが可能である。これらをまとめて次の主結果を得る。

Theorem 3.10. *MZV のシャッフル積関係式は (IPFD) を通じて MZF の関数関係式に拡張可能である。*

Remark 3.11. MZF の調和積由来以外の関数関係式の先駆けとなった研究に [Nak06] と [Tsu07] が挙げられる。両氏は以下の式を別々の方法で示した。$k, l \in \mathbb{N}_0$ と $s \in \mathbb{C}$ (特異点を除く) に対し次が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\zeta_2\begin{pmatrix} k & s \\ & l \end{pmatrix} + (-1)^k\zeta_2\begin{pmatrix} s & l \\ & k \end{pmatrix} + (-1)^l\zeta_2\begin{pmatrix} l & k \\ & s \end{pmatrix} \\ &= 2\sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor}\binom{k+l-2j-1}{l-1}\zeta_2\begin{pmatrix} 2j & 0 \\ & s+k+l-2j \end{pmatrix} + 2\sum_{j=0}^{\lfloor l/2 \rfloor}\binom{k+l-2j-1}{k-1}\zeta_2\begin{pmatrix} 2j & 0 \\ & s+k+l-2j \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

小さい $k, l \in \mathbb{N}$ について ($k = l = 0$ を除いていることに注意) について (3.6) が (2.5) から従うことが確認できている。おそらく一般の場合にも (2.5) は (3.6) を導くだろうと予想している。

Remark 3.12. 広瀬-村原-小野塚は [HMO24] で MZV の和公式を MZF の関数関係式に拡張している。[HMO24] 内では一般の深さの場合に示しているが、例えば 2 重の場合は次のようになる。複素数 $s \in \mathbb{C}$ ($s \neq 2$) に対し、

$$\zeta(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\zeta_2(s-k-2, k+2) - \zeta_2(-k, s+k)\right] \tag{3.7}$$

が成り立つ。(3.7) も (2.5) から導けることを [KS26] で説明している。アイデアは雑に言えば (2.5) において $t = 1$, s を $s-1$ と書き換えて計算すれば良い。

以上まとめると MZV のシャッフル積関係式は MZF の関数関係式に拡張でき、Question 1.1 もとい松本の問はほとんど肯定的であることがわかった。しかしながら筆者の感覚ではまだまだ取り組むべき課題が残されているように思う。例えば MZV の双対関係式は MZV の反復積分表示において変数変換をすることで直ちに得られるが、2026 年 1 月現在正規化複シャッフル関係式から導出されるかどうかは未だ完全な形での解決はなされていない。そもそも双対関係式が MZF の他の整数点での値について拡張できるのかどうかもよく分か

らないが、MZF の関数関係式に拡張可能なのだろうか。色々と考察を述べていきたいところだが紙数が尽きかけているのでそろそろ筆を置くことにする。

謝辞

講演の機会をくださった世話人の大野先生、関先生に感謝申し上げます。本研究は JSPS 科研費 JP23KJ1420 および JP24KJ1252 の助成を受けています。

参考文献

[HMO24] M. Hirose, H. Murahara and T. Onozuka, *Sum formula for multiple zeta function,* amanujan J. **65** (2024), no. 4, 1607–1619.

[IKZ06] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values,* Compositio Math., **142**, 2006.

[Joy10] S. Joyner, *On a generalization of Chen's iterated integrals,* J. Number Theory **130** (2010), no. 2, 254–288.

[KMT11] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, *Shuffle products for multiple zeta values and partial fraction decompositions of zeta-functions of root systems,* Math. Z. **268** (2011), no. 3-4, 993–1011.

[KMT24] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, *The Theory of Zeta-Functions of Root Systems,* Springer, Singapore, 2023, ix+414 pp. ISBN: 978-981-99-0909-4; 978-981-99-0910-0

[KS26] N. Komiyama and T. Shinohara, *Shuffle product for multiple zeta functions,* preprint, arixiv:2503.03351.

[Mat02] K. Matsumoto, *On the analytic continuation of various multiple zeta-functions,* Number Theory for the Millenium (Urbana, 2000), **11**, M. A. Bennett et. al. (eds.), A. K. Peters, Natick, MA, 2002.

[Mat04] K. Matsumoto, *Functional equations for double zeta-functions,* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **136**, 2004.

[Mat06] K. Matsumoto, *Analytic properties of multiple zeta-functions in several variables,* in "Number Theory: Tradition and Modernization", W. Zhang and Y. Tanigawa (eds.), Springer, New York, 2006.

[Mat15] 松本耕二、ルート系のゼータ関数について、第 60 回代数学シンポジウム報告集 (2015), 162-194.

[Nak06] T. Nakamura, *A functional relation for the Tornheim double zeta function,* Acta Arith. **125**, 2006.

[Tsu07] H. Tsumura, *On functional relations between the Mordell-Tornheim double zeta functions and the Riemann zeta function,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **142**, 2007.

[TE51] F. G. Tricomi and A. Erdélyi, *The asymptotic expansion of a ratio of gamma functions,* Pacific J. Math. **1**, 1951.

[WW27] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A course of modern analysis,* 4th ed., Cambridge Univ. Press, 1927.