The profinite Grothendieck-Teichmüller group from the point of view of combinatorial anabelian geometry

南出 新 (ZEN 数学センター/京都大学数理解析研究所)
Arata Minamide
ZEN Mathematics Center, ZEN University/
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

§1. 序

本稿では,（[2] で得られた）グロタンディーク・タイヒミューラー群 GT の簡明な別定義について — 特に, その導出において, 組み合わせ論的遠アーベル幾何がどうのように用いられるかという点に重点をおいて — 入門的解説を行う.

まず §1 では, スキームのエタール基本群の理論を簡単に復習する（[6] を参照; 日本語での解説としては, 例えば, [10] を参照）. S を連結ネータースキームとする. このとき, S 上有限エタールなスキームを対象, それらの間の S 射を射とする圏 $\mathrm{Cov}(S)$ は**ガロア圏**となり, 特に,（基本関手/ファイバー関手を選択することで）その（副有限）**基本群**が定まる[*1]. この基本群を

$$\pi_1(S)$$

で表し, スキーム S の**エタール基本群**と呼ぶ.

例 1. k を体, k^s をその分離閉包とする. $S = \mathrm{Spec}(k)$ の場合, 例えば, 体の有限次分離拡

*1 異なる基本関手/ファイバー関手を選択することで新たな基本群が定まるが, これら 2 つの基本群の間には（内部自己同型の合成を除いて一意に定まる）同型射が存在する.

大 $k \subseteq k'$ $(\subseteq k^s)$ から定まるスキームの射

$$\mathrm{Spec}(k') \ \to \ S$$

は $\mathrm{Cov}(S)$ の対象を定める．この例の場合, $\pi_1(S)$ は k の**絶対ガロア群** $G_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(k^s/k)$ と同型になる．

例 2. $\mathbb{C}$ を複素数体, $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{C}$ 上の射影直線とする．$S = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$ の場合, 例えば, $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$; $t \mapsto t^n$ (n は正の整数) から定まるスキームの射

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \zeta_n, \zeta_n^2, \ldots, \zeta_n^{n-1}, \infty\} \ \to \ S$$

（ただし, $\zeta_n \in \mathbb{C}$ は 1 の原始 n 乗根）は $\mathrm{Cov}(S)$ の対象を定める．この例の場合, $\pi_1(S)$ は階数 2 の**自由副有限群**と同型になる．より一般に, S が標数 0 の代数閉体 k 上の (g, r) 型の**双曲的曲線** — すなわち, k 上の種数 g の非特異射影曲線から, r 個の閉点（＝カスプ）を除いて得られる曲線であって, $2g - 2 + r > 0$ をみたすもの — の場合, $\pi_1(S)$ は群

$$\left\langle a_1, \ldots, a_g, \ b_1, \ldots, b_g, \ \gamma_1, \ldots, \gamma_r \ \middle| \ \left(\prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \right) \cdot \gamma_1 \cdots \gamma_r = 1 \right\rangle$$

の**副有限完備化**と同型になる．

§2. グロタンディーク・タイヒミューラー群

　以下では, n を正の整数, $\mathbb{Q}$ を有理数体, $\overline{\mathbb{Q}}$ をその代数閉包, $X \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}} \setminus \{0, 1, \infty\}$, X_n を X の n 次配置空間 — すなわち,

$$X_n \ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ \{(x_1, \ldots, x_n) \in \overbrace{X \times \cdots \times X}^{n} \mid \text{任意の } 1 \leq i < j \leq n \text{ に対し,} \ x_i \neq x_j\}$$

— そして, $\Pi_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(X_n)$ とする．すると, 構造射

$$(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1, \infty\})_n \ \to \ \mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$$

は自然な連続[*2]準同型

$$\rho_n : G_{\mathbb{Q}} \ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \ \to \ \mathrm{Out}(\Pi_n)$$

[*2] Π_n が位相的に有限生成であることから, $\mathrm{Out}(\Pi_n)$ は自然な副有限群の構造を持つ．

を誘導する．（Belyi の定理の帰結により，この準同型は**単射**であることに注意する.）Drinfeld は，（[1] において）$\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{Z} * \mathbb{Z}})$[*3]の部分群であって, 次のような性質をみたす（副有限）群 — **グロタンディーク・タイヒミューラー群** GT — を定義した：

> 自然な単射連続準同型 $\iota : G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathrm{GT}$, および, 自然な単射連続準同型 $\overline{\rho}_n : \mathrm{GT} \hookrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_n)$ が存在し, それらの合成は ρ_n と一致する.

このとき, GT の理論における中心的な問いの一つが次の問題である：

問題. $\iota : G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathrm{GT}$ は**同型**か.

特に, この問題が肯定的であった場合, 数論的対象である $G_{\mathbb{Q}}$ の明示的な組み合わせ論的記述が得られることから, この問題は非常に興味深いものといえる.

次に, 本稿の主結果を紹介する．$\overline{\mathbb{Q}}$ スキーム上の $(0, n+3)$ 型曲線 — すなわち, $\overline{\mathbb{Q}}$ スキーム上の種数 0 の固有平滑曲線（の族）であって $(n+3)$ 個の（順序付けられた）相異なる切断が付随したもの — のモジュライスタックを $(\mathcal{M}_{0,n+3})_{\overline{\mathbb{Q}}}$ と書くことにする．このとき，（$\overline{\mathbb{Q}}$ スタックの）自然な同型 $(\mathcal{M}_{0,n+3})_{\overline{\mathbb{Q}}} \xrightarrow{\sim} X_n$ を介し, $(n+3)$ 次対称群 $\mathfrak{S}_{n+3}$ が X_n に自然に作用する．そして, この作用は自然な単射連続準同型 $s_n : \mathfrak{S}_{n+3} \hookrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_n)$ を誘導することに注意する.

定理. $n \geq 2$ とする．このとき, $\overline{\rho}_n : \mathrm{GT} \hookrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_n)$, $s_n : \mathfrak{S}_{n+3} \hookrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_n)$ は同型

$$\mathrm{GT} \ \times \ \mathfrak{S}_{n+3} \ \xrightarrow{\sim} \ \mathrm{Out}(\Pi_n)$$

を誘導する.

系. $n \geq 2$ とする．GT, $\mathfrak{S}_{n+3}$ を定理の同型を介して $\mathrm{Out}(\Pi_n)$ の部分群と見做すとき,

(i) $\mathfrak{S}_{n+3} = Z^{\mathrm{loc}}(\mathrm{Out}(\Pi_n))$,
(ii) $\mathrm{GT} = Z_{\mathrm{Out}(\Pi_n)}(\mathfrak{S}_{n+3}) = Z_{\mathrm{Out}(\Pi_n)}(Z^{\mathrm{loc}}(\mathrm{Out}(\Pi_n)))$

が成り立つ．（ここで, 副有限群 G とその閉部分群 H に対し, H の G における中心化群を $Z_G(H)$ で表す．また, $Z^{\mathrm{loc}}(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{N \subseteq G:\ \text{開部分群}} Z_G(N)$ と書くことにする.）

[*3] $\widehat{(-)}$ で $(-)$ の副有限完備化を表す.

§3. 主結果の証明の概略

主結果の証明の詳細については, すでに, 日本語での解説 [8], [9] があるため省略する. 例えば, 定理については, 大雑把には, 以下のような流れで証明される：

ステップ 1： 簡単のため, $n=2$ の場合を考える. i（$1 \leq i \leq 5$）番目の切断を忘れることによって得られる射影 $\pi_i : X_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{0,5} \to \mathcal{M}_{0,4} \xrightarrow{\sim} X$ は全射 $p_i : \Pi_2 \twoheadrightarrow \Pi_1$ を誘導することに注意する. まず, 任意の $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Pi_2)$ が集合 $\{\mathrm{Ker}(p_i)\}_{1 \leq i \leq 5}$ を保つことを示す. その帰結として, 短完全列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Out}^*(\Pi_2) \longrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_2) \xrightarrow{\phi} \mathfrak{S}_5 \longrightarrow 1$$

— ただし, $\mathrm{Out}^*(\Pi_2) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ker}(\phi)$ — が得られる.（ここで, ϕ の全射性は, 等式 “$\phi \circ s_2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_5}$” より従う.）

ステップ 2： $\mathrm{Out}^*(\Pi_2) \subseteq Z_{\mathrm{Out}(\Pi_2)}(\mathrm{Im}(s_2))$ を示す. その帰結として, 自然な直積分解 $\mathrm{Out}^*(\Pi_2) \times \mathfrak{S}_5 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Out}(\Pi_2)$ が得られる.

ステップ 3： $(\mathrm{GT} \xrightarrow{\sim})\ \mathrm{Im}(\overline{\rho}_2) = \mathrm{Out}^*(\Pi_2)$ を示す.

特に, ステップ 2, ステップ 3 の証明において, **組み合わせ論的遠アーベル幾何**の理論が本質的な役割を果たす.

§4. 組み合わせ論的遠アーベル幾何

かなり大雑把に述べてしまうと, 遠アーベル幾何では次のようなテーマを扱う.

> $\mathcal{O}$ を “幾何学的対象” とする. このとき, その “基本群”$\pi_1(\mathcal{O})$ からどれだけ $\mathcal{O}$ の幾何学的情報を “復元” できるか.

例えば,（古典的な）遠アーベル幾何の代表的な結果 — いわゆる, 数体上の双曲的曲線に対する**グロタンディーク予想** — は次のようなものである（例えば, [11] を参照）:

例 3. C を数体 $K \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ 上の双曲的曲線とする. 特に, 構造射 $C \to \mathrm{Spec}(K)$ は自然な連続準同型 $\rho_C : G_K \to \mathrm{Out}(\pi_1(C \times_K \overline{\mathbb{Q}}))$ を誘導することに注意する. このとき, 自然な準同型

$$\mathrm{Aut}_K(C) \ \to \ Z_{\mathrm{Out}(\pi_1(C \times_K \overline{\mathbb{Q}}))}(\mathrm{Im}(\rho_C))$$

— ただし, $\mathrm{Aut}_K(C)$ は C の K 自己同型群 — は**同型**.

実際, この例の場合, $\pi_1(C)$ から短完全列

$$1 \longrightarrow \pi_1(C \times_K \overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \pi_1(C) \longrightarrow G_K \longrightarrow 1$$

を復元できる — より具体的には, 部分群 $\pi_1(C \times_K \overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \pi_1(C)$ は $\pi_1(C)$ 内の最大の位相的有限生成正規閉部分群として特徴付けられる — ことが知られているため, 特に,

$\pi_1(C)$ から $\mathrm{Aut}_K(C)$ という C の幾何学的情報を復元できる

ということを主張していると見做せる.

一方, **組み合わせ論的遠アーベル幾何**では, 標数 0 の代数閉体上の標点付安定曲線 Z に付随した組み合わせ論的対象 — 具体的には, Z に付随する双対半グラフに Z の既約成分から生じる様々なガロア圏を乗せたもの — を主な幾何学的対象として扱う．このような幾何学的対象を,（Z に付随する）**PSC 型遠半グラフ**と呼ぶ（[3] を参照; 日本語での解説としては, [7] を参照）．PSC 型遠半グラフ $\mathcal{G}$ が与えられたとき, その（副有限）**基本群** $\pi_1(\mathcal{G})$ を考えることもできる．このとき, 組み合わせ論的遠アーベル幾何の代表的な結果 — いわゆる, **組み合わせ論的グロタンディーク予想**[*4] — は次のようなものである：

例 4. $\mathcal{G}$ を PSC 型遠半グラフ, I を副有限群, $\rho_{\mathcal{G}} : I \to \mathrm{Out}(\pi_1(\mathcal{G}))$ を適切な “条件”をみたす連続準同型とする．このとき, $Z_{\mathrm{Out}(\pi_1(\mathcal{G}))}(\mathrm{Im}(\rho_{\mathcal{G}}))$ の任意の元は $\mathcal{G}$ の “**自己同型**”から生じる.

組み合わせ論的グロタンディーク予想の重要性は, $\pi_1(\mathcal{G})$ の外部自己同型の次の性質にある：

> $(\star)$ $\mathcal{G}$ を $\mathbb{G}$ の下部半グラフ, $\Pi_v \subseteq \pi_1(\mathcal{G})$（それぞれ, $\Pi_e \subseteq \pi_1(\mathcal{G})$）を頂点 $v \in \mathbb{G}$（それぞれ, 辺 $e \in \mathbb{G}$）が（共役を除いて一意に）定める**頂点部分群**（それぞれ, **辺部分群**）, $\overline{\sigma}$ を $\pi_1(\mathcal{G})$ の外部自己同型, $\sigma \in \mathrm{Aut}(\pi_1(\mathcal{G}))$ を $\overline{\sigma}$ の持ち上げとする．このとき, $\overline{\sigma}$ が $\mathcal{G}$ の自己同型から生じている場合, $\sigma(\Pi_v) \subseteq \pi_1(\mathcal{G})$（それぞれ, $\sigma(\Pi_e) \subseteq \pi_1(\mathcal{G})$）は**頂点部分群**（それぞれ, **辺部分群**）となる.

例えば, §3 のステップ 2 の証明では, まず, 第 1 射影 $X_2 \to X; (x_1, x_2) \mapsto x_1$ から誘導

[*4] 現在までに, 様々なヴァージョンの組み合わせ論的グロタンディーク予想型の結果が得られているが, その元祖ともいえる結果は [4] に現れる.

される準同型 ($p_1 : \Pi_2 \twoheadrightarrow \Pi_1$ から誘導される準同型)

$$\mathrm{Out}^*(\Pi_2) \;\to\; \mathrm{Out}^*(\Pi_1)$$

の**単射性**を示すことが鍵となる．この単射性の証明において, 組み合わせ論的グロタンディーク予想（そしてその帰結である性質 $(\star)$）がどのように活用されるのかを概説し, 本稿を締めくくりたい. 以下, 簡単のため,

任意の $\overline{\alpha} \in \mathrm{Out}^*(\Pi_2)$（の持ち上げ $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Pi_2)$）は C 適合的[*5]である

という技術的条件を仮定する．このとき, 上述の単射性は, 大雑把には, 以下のように証明される（[5] を参照）：

ステップ 1： 第 2 射影 $X_2 \to X; (x_1, x_2) \mapsto x_2$ から誘導される準同型を $p_2 : \Pi_2 \twoheadrightarrow \Pi_1$ と書くことにする．X_2 の幾何学的性質を考察することで, 上述の単射性の証明は, 次の性質の証明に帰着される：$\beta \in \mathrm{Aut}(\Pi_2)$ であって,

(a) $\beta(\mathrm{Ker}(p_1)) = \mathrm{Ker}(p_1)$,
(b) $\beta(\mathrm{Ker}(p_2)) = \mathrm{Ker}(p_2)$,
(c) $\beta \in \mathrm{Aut}(\Pi_2)$ が p_1 を介して誘導する $\beta_1 \in \mathrm{Aut}(\Pi_1)$（(a) を参照）は恒等写像,
(d) $\beta \in \mathrm{Aut}(\Pi_2)$ が p_2 を介して誘導する $\beta_2 \in \mathrm{Aut}(\Pi_1)$（(b) を参照）は恒等写像,
(e) β は C 適合的

をみたすものは $\Xi \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ker}(p_1) \cap \mathrm{Ker}(p_2)$ 内部自己同型に限る.

ステップ 2： 短完全列

$$1 \longrightarrow \Pi_{2/1} \longrightarrow \Pi_2 \xrightarrow{p_1} \Pi_1 \longrightarrow 1$$

— ただし, $\Pi_{2/1} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ker}(p_1)$ — を考える. 第 1 射影 $X_2 \to X$ の "カスプ 0 での対数幾何的ファイバー"を考えることで, ある PSC 型遠半グラフ $\mathcal{G}^0$ — ただし, $\mathcal{G}^0$ の下部半グラフは 2 つの頂点 v_1^0, v_2^0 とそれを結ぶ 1 つの辺からなる — および, 自然な同型 $\pi_1(\mathcal{G}^0) \xrightarrow{\sim} \Pi_{2/1}$ であって,（この同一視の下）p_2 : (v_1^0 が（共役を除いて一意に）定める頂点部分群) ($\subseteq \Pi_{2/1}$) $\xrightarrow{\sim} \Pi_1$ をみたすものが存在することを確認できる.

[*5] この条件の一つは, $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Pi_2)$ が p_1 を介して誘導する $\alpha_1 \in \mathrm{Aut}(\Pi_1)$ が, X の（3 つの）カスプたちが定める惰性群 $\subseteq \Pi_1$ の共役類の（3 元）集合に置換を誘導するというものである.

ステップ 3： 条件 (c), (d), (e), および, **組み合わせ論的グロタンディーク予想**（そしてその帰結である性質 ($\star$)）を用いることで, 次のことがわかる：

> β を "(適当な Ξ 内部自己同型) $\circ\, \beta$" に置き換え, また, v_1^0 の定める頂点部分群 $\Pi_{v_1^0} \subseteq \Pi_{2/1}$ を（その共役類の中から）上手く選択することで, $\beta|_{\Pi_{2/1}}(\Pi_{v_1^0}) = (\Pi_{v_1^0})$ とできる.

いま $p_2 : \Pi_{v_1^0}$ $(\subseteq \Pi_{2/1}) \xrightarrow{\sim} \Pi_1$ であるため, 条件 (d) より, β の $\Pi_{v_1^0}$（$\subseteq \Pi_{2/1}$）への制限が恒等写像であることが従う. さらに, 第 1 射影 $X_2 \to X$ の "カスプ ∞ での対数幾何的ファイバー" を考えることで, 同様の議論により, β の "$\Pi_{v_1^\infty}$"（$\subseteq \Pi_{2/1}$）への制限が恒等写像であることが従う.

ステップ 4： $\Pi_{2/1}$ が $\Pi_{v_1^0}, \Pi_{v_1^\infty}$ により位相的に生成されていることが簡単に確認できるため, ステップ 3 より, $\beta|_{\Pi_{2/1}}$ が恒等写像であることが従う. よって, 条件 (c), および, $\Pi_{2/1}$ の中心自明性から, β が恒等写像であることが従う.

§5. 謝辞

本稿は, 2025 年度 RIMS 共同研究（公開型）"多重ゼータ値の諸相" での筆者による講演を整理したものです. 講演の機会を与えてくださった研究代表者の大野泰生先生, 関真一朗先生に感謝申し上げます. 本稿の執筆に際し, 筆者は JSPS 科研費 24K16898, 京都大学数理解析研究所国際共同利用・共同研究拠点事業, および, 京都大学数理解析研究所次世代幾何学国際センターの助成を受けております.

参考文献

[1] V. G. Drinfeld, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Algebra i Analiz **2** (1990), pp. 149–181.

[2] Y. Hoshi, A. Minamide, S. Mochizuki, Group-theoreticity of numerical invariants and distinguished subgroups of configuration space groups, Kodai Math. J. **45** (2022), pp. 295–348.

[3] S. Mochizuki, Semi-graphs of anabelioids, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **42** (2006), pp.221–322.

[4] S. Mochizuki, A combinatorial version of the Grothendieck conjecture, Tohoku Math. J. **59** (2007), pp. 455–479.

[5] S. Mochizuki, On the combinatorial cuspidalization of hyperbolic curves, Osaka J. Math. **47** (2010), pp. 651–715.

[6] Revêtement étales et groupe fondamental, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA1), Directed by A. Grothendieck, With two papers by M. Raynaud, Doc. Math. (Paris), **3** (2003).

[7] 星裕一郎, 組み合わせ論的カスプ化の単射性部分について, In: Algebraic number theory and related topics 2008, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B19** (2010), pp. 81–106.

[8] 南出新, The Grothendieck-Teichmüller group as an open subgroup of the outer automorphism group of the étale fundamental group of a configuration space, In: Profinite monodromy, Galois representations, and Complex functions, 数理解析研究所講究録, **2120** (2019), pp. 166–171.

[9] 南出新, グロタンディーク・タイヒミューラー群と関連したある直積分解について, In: Algebraic number theory and related topics 2017, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B83** (2020), pp. 195–203.

[10] 森下昌紀, ガロア圏と基本群, 森北出版 (2024).

[11] 中村博昭, 玉川安騎男, 望月新一, 代数曲線の基本群に関する Grothendieck 予想, 数学, **50** (1998), pp. 113–129.