Schur multiple zeta-functions of Hurwitz type

愛知工業大学工学部　松本耕二[1]
上智大学理工学部/東北大学大学院理学研究科　中筋麻貴 [2]
Kohji Matsumoto, Aichi Institute of Technology
Maki Nakasuji, Sophia University / Tohoku University

1　はじめに

よく知られているように，リーマンゼータ関数のフルビッツ型類似は，次のように定義される．

$$\zeta(s,x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+x)^s}\quad (s\in\mathbb{C}, 0<x\leq 1)$$

$x=1$ の時がリーマンゼータ関数であり，この関数は $\mathrm{Re}(s)>1$ の範囲で絶対収束する．この多変数化として，多重ゼータ関数のフルビッツ型が挙げられる．ここでは，Euler-Zagier 型多重ゼータ関数

$$\zeta(s_1,\ldots,s_k)=\sum_{0<m_1<\cdots<m_k}\frac{1}{m_1^{s_1}\cdots m_k^{s_k}}\quad (s_i\in\mathbb{C})$$

を扱い，このフルビッツ型は以下のように定義される：$0<x_i\leq 1$ に対し

$$\zeta(s_1,\ldots,s_k|x_1,\ldots,x_k)=\sum_{0<m_1<\cdots<m_k}\frac{1}{(m_1+x_1)^{s_1}\cdots(m_k+x_k)^{s_k}}.$$

同様に，Euler-Zagier 型等号付多重ゼータ関数（多重ゼータスター関数）

$$\zeta^\star(s_1,\ldots,s_k)=\sum_{0<m_1\leq\cdots\leq m_k}\frac{1}{m_1^{s_1}\cdots m_k^{s_k}}\quad (s_i\in\mathbb{C})$$

もフルビッツ型を定義することができる．ここでは，今後の議論のため，2 種類の記号を導入しておく．$x_i\geq 0$ に対し，

$$\zeta^\star(s_1,\ldots,s_k|x_1,\ldots,x_k)=\sum_{0<m_1\leq\cdots\leq m_k}\frac{1}{(m_1+x_1)^{s_1}\cdots(m_k+x_k)^{s_k}},$$

[1]本研究の一部は科学研究費補助金 (基盤 (C), 課題番号 22K03267) の助成を受けた．
[2]本研究の一部は科学研究費補助金 (基盤 (C), 課題番号 22K03274) の助成を受けた．

$$\zeta^{\star\star}(s_1,\dots,s_k|x_1,\dots,x_k) = \sum_{0\le m_1\le\cdots\le m_k} \frac{1}{(m_1+x_1)^{s_1}\cdots(m_k+x_k)^{s_k}}.$$

なお，Euler-Zagier 型 (等号付) 多重ゼータ関数および，それらのフルビッツ型は $\mathrm{Re}(s_1),\dots,\mathrm{Re}(s_{k-1})\ge 1$, $\mathrm{Re}(s_k)>1$ の範囲で絶対収束する．

2018 年に，Nakasuji, Phuksuwan, Yamasaki([7]) により，古典的な Schur 関数 s_λ の類似となる多重ゼータ関数が導入された．それは，分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\ell)$ に対し，$D_\lambda=\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2\,|\,1\le i\le\ell,\ 1\le j\le\lambda_i\}$, $T_\lambda(\mathbb{C})$ を形が λ の $\mathbb{C}$-値ヤング盤の集合，SSYT_λ を形が λ の半標準ヤング盤の集合とすると（ヤング盤の詳しい定義は次節で述べる），これらを用いて $\boldsymbol{s}=(s_{ij})\in T_\lambda(\mathbb{C})$ に対し，

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}) = \sum_{(m_{ij})\in\mathrm{SSYT}_\lambda}\prod_{(i,j)\in D_\lambda}\frac{1}{m_{ij}^{s_{ij}}} \tag{1.1}$$

と定義される多重ゼータ関数である．これを Schur 多重ゼータ関数と呼ぶ．Schur 多重ゼータ関数も同様にフルビッツ型を考えることができる：$\boldsymbol{s}\in T_\lambda(\mathbb{C}),\boldsymbol{x}\in T_\lambda(\mathbb{R}_{\ge0})$ に対し，

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x}) = \sum_{M\in\mathrm{SSYT}_\lambda}\prod_{(i,j)\in D_\lambda}\frac{1}{(m_{ij}+x_{ij})^{s_{ij}}}. \tag{1.2}$$

本稿では，このフルビッツ型 Schur 多重ゼータ関数について得られた関係式について紹介してゆく．証明など，詳細についてご興味がありましたら，[5] をご参照いただきたい．

本稿は，2025 年に京都大学数理解析研究所において開催された研究集会「多重ゼータ値の諸相」における講演内容をもとにまとめたものです．講演の機会を与えてくださった大野泰生先生ならびに関真一朗先生に心より御礼申し上げます．また，研究集会の場において本稿の不十分な点をご指摘くださった武田渉氏にも感謝いたします.

2 準備

まず最初に，Schur 多重ゼータ関数 (1.1) とそのフルビッツ型 (1.2) を定義する上で必要であった記号について改めて述べる．分割 λ を $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_\ell)$ と定める．ここで，$\lambda_i\in\mathbb{N}_{\ge0}$ $(1\le i\le\ell)$, $\lambda_1\ge\cdots\ge\lambda_\ell\ge0$ を満たすものとする．分割 λ は，D_λ の各 (i,j) を箱として図示するヤング図形と同一視される．λ を分割とし，X をある集合とする．λ に対するヤング図形 D_λ の各箱に，X の元を書き入れた図形 $T=(t_{ij})$ $(t_{ij}\in X)$ を「形が λ の X 上のヤング盤 (X-値盤)」と呼ぶ．また，形が λ の全ての X 上のヤング盤たちの集合を $T_\lambda(X)$ と書く．

例 2.1 $\lambda = (4,3,2)$ のとき，

$$T_\lambda(X) = \left\{ T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} t_{31} & t_{32} & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array} \,\middle|\, t_{ij} \in X \right\}.$$

さらに，各列に対して下方向に狭義単調増加し ($t_{1j} < t_{2j} < \cdots$)，各行に対して広義単調増加する ($t_{i1} \leq t_{i2} \leq \cdots$) $\mathbb{N}$ 上のヤング盤を「半標準ヤング盤」と呼び，形が λ のすべての半標準ヤング盤たちの集合を SSYT_λ と書く.

次に，Schur 多重ゼータ関数 $\zeta_\lambda(\boldsymbol{s})$ とそのフルビッツ型 $\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x})$ の収束域について考える. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell)$ に対し, $C_\lambda \subset D_\lambda$ を λ の corner の集合とする．ここで，corner とは, $(i, j+1) \notin D_\lambda$ および $(j+1, i) \notin D_\lambda$ を満たす $(i,j) \in D_\lambda$ を意味する．例えば，$\lambda = (4,3,2)$ のとき，$C((4,3,2)) = \{(1,4),\ (2,3),\ (3,2)\}$ である．このとき，以下が成り立つ.

補題 2.2

$$W_\lambda := \left\{ \boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in T_\lambda(\mathbb{C}) \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathrm{Re}(s_{ij}) \geq 1 \text{ for } {}^\forall(i,j) \in D_\lambda \setminus C_\lambda \\ \mathrm{Re}(s_{ij}) > 1 \text{ for } {}^\forall(i,j) \in C_\lambda \end{array} \right\}$$

とする．このとき，$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s})$ および $\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x})$ は，$\boldsymbol{s} \in W_\lambda$ において絶対収束する.

ここで，$\boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in W_\lambda$ に対し，条件 $s_{i+k,j+k} = s_{i,j}$ を課した集合を

$$W_\lambda^{\mathrm{diag}} := \{\boldsymbol{s} \in W_\lambda | s_{i+k,j+k} = s_{i,j} \text{ for } {}^\forall k \in \mathbb{Z}\}$$

とおく．$\boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in W_\lambda^{\mathrm{diag}}$ に対し，$s_{ij} = z_{j-i}$ とおいてヤング盤の元を表すことで，$W_\lambda^{\mathrm{diag}}$ の元を $\{z_k\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ を用いて表すことができる．$j - i$ を content と呼ぶことから，この条件を「content-parametrized」と呼ぶ．同様に，集合 X に対し，content-parametrized な $T_\lambda(X)$ の元を $T_\lambda^{\mathrm{diag}}(X)$ と書く.

3 Jacobi-Trudi formula

Nakasuji, Phuksuwan, Yamasaki は，[7] において，content-parametrized な条件のもと，Schur 多重ゼータ関数の Jacobi-Trudi 公式と呼ばれる行列式表示を得た．H.Yamamoto は，[8] において，これをフルビッツ型に拡張した.

定理 3.1 ([8, Theorem 4.2], [5, Theorem 3.4]) $\boldsymbol{s}=(s_{ij})\in W_\lambda^{\mathrm{diag}}$ に対し，$s_{ij}=z_{j-i}$ とおく．$\lambda'=(\lambda'_1,\ldots,\lambda'_s)$ を λ の共役とする．すなわち, 対応するヤング図形が λ のヤング図形の転置になる分割とする．$\boldsymbol{x}\in T_\lambda^{\mathrm{diag}}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ に対し，以下が成り立つ．ここで，$x_{ij}=y_{j-i}$ とおく．

(1) $\mathrm{Re}(s_{i,\lambda'_i})>1$ $(1\leq i<\lambda_1)$ に対し，

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x})=\det\left[\zeta(z_{j-1},\ldots,z_{j-(\lambda'_i-i+j)}|y_{j-1},\ldots,y_{j-(\lambda'_i-i+j)})\right]_{1\leq i,j\leq\lambda_1}.$$

ここで，$\lambda'_i-i+j=0$ の時 $\zeta(...)=1$ とし，$\lambda'_i-i+j<0$ の時は $\zeta(...)=0$ とおく．

(2) $\mathrm{Re}(s_{i,\lambda_i})>1$ $(1\leq i<\lambda_1{}')$ に対し，

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x})=\det\left[\zeta^\star(z_{-j+1},\ldots,z_{-j+(\lambda_i-i+j)}|y_{-j+1},\ldots,y_{-j+(\lambda_i-i+j)})\right]_{1\leq i,j\leq\lambda'_1}.$$

ここで，$\lambda_i-i+j=0$ の時 $\zeta^\star(...)=1$ とし，$\lambda_i-i+j<0$ の時は $\zeta^\star(...)=0$ とおく．

注意 1 定理 *3.1* において，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の場合が *[7]* で得られた *Schur* 多重のゼータ関数の *Jacobi-Trudi* 公式である．

定理 3.1 の系として次の代数的関係式を得る．

系 3.2 $\boldsymbol{s}=(s_{ij})\in W_\lambda^{\mathrm{diag}}$, $\boldsymbol{x}\in T_\lambda^{\mathrm{diag}}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ に対し，以下が成り立つ．ここで，$s_{ij}=z_{j-i}$, $x_{ij}=y_{j-i}$ とおく．

$$\det(\zeta^\star(z_{-j+1},z_{-j+2},\cdots,z_{-j+(\lambda_i+j-i)}|y_{-j+1},y_{-j+2},\cdots,y_{-j+(\lambda_i+j-i)}))$$

$$=\det(\zeta(z_{j-1},z_{j-2},\cdots,z_{j-(\lambda'_i+j-i)}|y_{j-1},y_{j-2},\cdots,y_{j-(\lambda'_i+j-i)})).$$

例 3.3 $\lambda=(2)$, $\boldsymbol{x}=\boxed{x\,|\,x}$ に対し，以下が成り立つ．

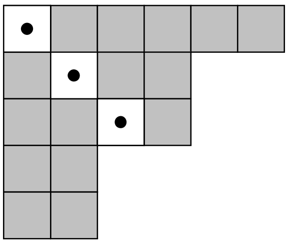
$$\zeta_\lambda\left(\boxed{z_0\,|\,z_1}\,|\boldsymbol{x}\right)=\det\left(\zeta^\star(z_0,z_1|x,x)\right)=\det\begin{pmatrix}\zeta(z_0|x) & \zeta(z_1,z_0|x,x)\\ 1 & \zeta(z_1|x)\end{pmatrix}$$

すなわち，関係式 $\zeta^\star(z_0,z_1|x,x)=\zeta(z_0|x)\zeta(z_1|x)-\zeta(z_1,z_0|x,x)$ が導かれる．

4 Giambelli formula

4.1 定理

N を λ の対角成分の数とする．$1 \le i \le N$ に対し，$p_i = \lambda_i - i$, $q_i = \lambda'_i - i$ を満たす 2 つの数列 $p_1, \ldots, p_N, q_1, \ldots, q_N$ を準備する．ここで，$\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ は，λ の共役を表す．このとき，$\lambda = (p_1, \cdots, p_N \,|\, q_1, \cdots, q_N)$ をフロベニウス記法と呼ぶ．例えば，$\lambda = (6,4,4,2,2) = (5,2,1|4,3,0)$ と表される．



言葉を変えれば，主対角成分（上の図におけるすべての $\bullet$）に対し，主対角成分の箱の数 ($\bullet$ の数）を N とおくと，$\{p_i\}_{1\le i\le N}$ は主対角成分の右側を上から順に各行の箱の数を並べたものであり，$\{q_i\}_{1\le i\le N}$ は主対角成分の左側を左から順に各列の箱の数を並べたものである．フロベニウス記法で $(p_i \,|\, q_j)$ で表される 1 行 1 列から成るヤング図形の形を「hook 型」と呼ぶ．

Nakasuji, Phuksuwan, Yamasaki は，[7] において，content-parametrized な条件のもと，Schur 多重ゼータ関数を hook 型 Schur 多重ゼータ関数を元とする次に示す行列式表示を得た．これを Schur 多重ゼータ関数の Giambelli 公式と呼ぶ．本研究では，これをフルビッツ型 Schur 多重ゼータ関数に拡張した．

定理 4.1 ([5, Theorem 4.4]) λ をフロベニウス記法 $\lambda = (p_1, \cdots, p_N | q_1, \cdots, q_N)$ で表される分割とする．$\boldsymbol{s} \in W_\lambda^{\mathrm{diag}}$, $\boldsymbol{x} \in T_\lambda^{\mathrm{diag}}(\mathbb{R}_{\ge 0})$ とする．この時，以下が成り立つ．

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x}) = \det(\zeta_{i,j}(\mathbf{s}_{i,j}^F|\mathbf{x}_{i,j}^F))_{1\le i,j\le N}.$$

ここで $\zeta_{i,j}(\mathbf{s}_{i,j}^F|\mathbf{x}_{i,j}^F) = \zeta_{(p_i+1,1^{q_j})}(\mathbf{s}_{i,j}^F|\mathbf{x}_{i,j}^F)$ とし，$s_{ij} = z_{j-i}$, $x_{ij} = y_{j-i}$ を満たす $\{z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{y_k\}_{k\in\mathbb{R}_{\ge 0}}$ を用いて

$$\mathbf{s}_{i,j}^F = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{p_i} \\ \hline z_{-1} \\ \cline{1-1} \vdots \\ \cline{1-1} z_{-q_j} \\ \cline{1-1} \end{array} \in W_{(p_i+1,1^{q_j})}, \quad \mathbf{x}_{i,j}^F = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{p_i} \\ \hline y_{-1} \\ \cline{1-1} \vdots \\ \cline{1-1} y_{-q_j} \\ \cline{1-1} \end{array} \in T_{(p_i+1,1^{q_j})}$$

を表すものとする．

また，フルビッツ型の hook 型 Schur 多重ゼータ関数をフルビッツ型多重ゼータ関数とフルビッツ型等号付多重ゼータ関数の積和で表す以下の表示を得ることができる．

定理 4.2 ([5, Theorem 5.1]) $\lambda = (p+1, 1^q)$, $\boldsymbol{s} \in W_\lambda^{\mathrm{diag}}$, $\boldsymbol{x} \in T_\lambda^{\mathrm{diag}}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ とする．$s_{ij} = z_{j-i}$, $x_{ij} = y_{j-i}$ とすると，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x}) = &\sum_{j=0}^{q}(-1)^j \times \zeta^\star(z_{-j}, \dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots, z_p | y_{-j}, \dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots, y_p)\\ &\qquad \times \zeta(z_{-j-1}, \dots, z_{-q} | y_{-j-1}, \dots, y_{-q}), \qquad (4.1)\\ \zeta_\lambda(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x}) = &\sum_{j=0}^{p}(-1)^j \times \zeta(z_j, \dots, z_1, z_0, z_{-1}, \dots, z_{-q} | y_j, \dots, y_1, y_0, y_{-1}, \dots, y_{-q})\\ &\qquad \times \zeta^\star(z_{j+1}, \dots, z_p | y_{j+1}, \dots, y_p).\end{aligned}$$

$\mathfrak{S}_N$ を N 次対称群とする．定理 4.2 を定理 4.1 に適用することで，一般のフルビッツ型 Schur 多重ゼータ関数をフルビッツ型多重ゼータ関数とフルビッツ型等号付多重ゼータ関数の積和で表す表示が得られる．

定理 4.3 ([5, Theorem 5.2]) λ をフロベニウス記法 $\lambda = (p_1, \cdots, p_N | q_1, \cdots, q_N)$ で表される分割とする．$\boldsymbol{s} \in W_\lambda^{\mathrm{diag}}$, $\boldsymbol{x} \in T_\lambda^{\mathrm{diag}}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ とする．この時，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x}) = &\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\sum_{j_1=0}^{q_1}\cdots\sum_{j_N=0}^{q_N}(-1)^{j_1+\cdots+j_N}\\ &\times \zeta^\star(z_{-j_1}, \dots, z_0, \dots, z_{p_{\sigma(1)}} | y_{-j_1}, \dots, y_0, \dots, y_{p_{\sigma(1)}})\\ &\quad \times \zeta^\star(z_{-j_2}, \dots, z_0, \dots, z_{p_{\sigma(2)}} | y_{-j_2}, \dots, y_0, \dots, y_{p_{\sigma(2)}})\\ &\quad \times \cdots \times \zeta^\star(z_{-j_N}, \dots, z_0, \dots, z_{p_{\sigma(N)}} | y_{-j_N}, \dots, y_0, \dots, y_{p_{\sigma(N)}})\\ &\times \zeta(z_{-j_1-1}, \dots, z_{-q_1} | y_{-j_1-1}, \dots, y_{-q_1})\zeta(z_{-j_2-1}, \dots, z_{-q_2} | y_{-j_2-1}, \dots, y_{-q_2})\\ &\quad \times \cdots \times \zeta(z_{-j_N-1}, \dots, z_{-q_N} | y_{-j_N-1}, \dots, y_{-q_N}).\end{aligned}$$

4.2 定理 4.1 の証明

Schur 関数の Giambelli 公式の証明にはいくつかの方法がある．Nakasuji, Puksuwan, Yamasaki は，Schur 多重ゼータ関数の Giambelli 公式 ([7, Theorem 4.5]) の証明において，Nakagawa, Noumi, Shirakawa, Yamada が [6] で用いた証明の手法を用いた．これに対し，定理 4.1 では，Eğecioğlu, Remmel ([1]) の証明の手法を用いて証明することに成功した．本節ではそのアウトラインを述べる．

λをフロベニウス記法$\lambda=(p_1,\cdots,p_N|q_1,\cdots,q_N)$で表される分割とする．ここで，$\alpha(\lambda)=(p_1,\ldots,p_N)$, $\beta(\lambda)=(q_1,\ldots,q_N)$とし，主対角成分のセルの集合を$D^{\mathrm{main}}(\lambda)$とする．

$\sigma\in\mathfrak{S}_N$に対し，ヤング盤$T=(t_{i,j})\in T_\lambda(\mathbb{N})$が次の条件を満たすとき，$T$を「$\sigma$-タブロー」と呼ぶ:

(I) Tの元が，$\alpha(\lambda)$において各行ごとに広義単調増加する．

(II) Tの元が，$\beta(\lambda)\cup D^{\mathrm{main}}(\lambda)$において各列ごとに狭義単調増加する．

(III) $i\le\lambda_i-1$ $(i=1,2,\ldots,d)$のとき，$t_{\sigma(i),\sigma(i)}\le t_{i,i+1}$.

注意 2 形$\lambda=(p_1,\ldots,p_N|q_1,\ldots,q_N)$に対するヤング盤$T=(t_{ij})\in T_\lambda(\mathbb{N})$が$\sigma$-タブローであるとする．このとき，

$$T_k(\sigma)=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline t_{\sigma(k),\sigma(k)} & t_{k,k+1} & \cdots & t_{k,k+p_k} \\ \hline t_{\sigma(k),\sigma(k)+1} \\ \cline{1-1} \vdots \\ \cline{1-1} t_{\sigma(k),\sigma(k)+q_{\sigma(k)}} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

は，$\mathrm{SSYT}_{(p_k|q_{\sigma(k)})}$ $(1\le k\le N)$の元である．

$\boldsymbol{s}\in T_\lambda(\mathbb{C})$, $T\in T_\lambda(\mathbb{N})$に対し，

$$Z_\lambda(\boldsymbol{s},T):=\prod_{(i,j)\in D_\lambda}\frac{1}{t_{ij}^{s_{ij}}}$$

とする．このとき，Tがσ-タブローであれば，

$$Z_\lambda(\boldsymbol{s},T)=\prod_{k=1}^{N}Z(\boldsymbol{s}^F_{k,\sigma(k)},T_k(\sigma))$$

と書けるため，

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s})=\sum_{M\in SSYT_\lambda}Z_\lambda(\boldsymbol{s},M),\quad \zeta_\lambda(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x})=\sum_{M\in SSYT_\lambda}Z_\lambda(\boldsymbol{s},M+\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．ここで，

$$\mathbb{X}:=\{(\sigma,T)|\sigma\in\mathfrak{S}_N,T:\sigma\text{-tableau of shape }\lambda\}$$

とおく．恒等置換 id を用いて，$\mathbb{X}^{\dagger} := \{(\mathrm{id}, T) | T \in \mathrm{SSYT}_{\lambda}\}$ とし，$\mathbb{X} = \mathbb{X}^{\dagger} \cup \mathbb{X}^{\dagger\dagger}$ と分ける．すなわち，$\mathbb{X}^{\dagger\dagger} = \mathbb{X} \setminus \mathbb{X}^{\dagger}$ を表す．このとき次の補題が成り立つ．

補題 4.4 $(\sigma, T) \in \mathbb{X}^{\dagger\dagger}$ に対し，以下を満たす元 $(\sigma', T') \in \mathbb{X}^{\dagger\dagger}$ $((\sigma, T) \neq (\sigma', T'))$ が存在する．

$$\mathrm{sgn}(\sigma) Z_{\lambda}(\boldsymbol{s}, T) + \mathrm{sgn}(\sigma') Z_{\lambda}(\boldsymbol{s}, T') = 0. \tag{4.2}$$

このため，次が成り立つ．

$$\sum_{(\sigma,T)\in\mathbb{X}} \mathrm{sgn}(\sigma) Z_{\lambda}(\boldsymbol{s}, T) = \sum_{(\mathrm{id},T)\in\mathbb{X}} \mathrm{sgn}(\mathrm{id}) Z_{\lambda}(\boldsymbol{s}, T)$$

補題 4.4 を用いることにより，以下の計算を通して，定理 4.1 の証明が完成する．

$$\begin{aligned}
&\det(\zeta_{i,j}(\boldsymbol{s}^F_{i,j} | \boldsymbol{x}^F_{i,j}))_{1\le i,j\le N} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{N} \zeta_{k,\sigma(k)}(\boldsymbol{s}^F_{k,\sigma(k)} | \boldsymbol{x}^F_{k,\sigma(k)}) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{N} \sum_{M_k(\sigma)\in SSYT(p_k|q_{\sigma(k)})} Z_{(p_k|q_{\sigma(k)})}(\boldsymbol{s}^F_{k,\sigma(k)}, M_k(\sigma) + \boldsymbol{x}^F_{k,\sigma(k)}) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d} \mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{T:\sigma-\mathrm{tableau}} Z_{\lambda}(\boldsymbol{s}, T + \boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{(\sigma,T)\in\mathbb{X}} \mathrm{sgn}(\sigma) Z_{\lambda}(\boldsymbol{s}, T + \boldsymbol{x}) = \sum_{(\mathrm{id},T)\in\mathbb{X}^{\dagger}} \mathrm{sgn}(\mathrm{id}) Z_{\lambda}(\boldsymbol{s}, T + \boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{T\in SSYT_{\lambda}} Z_{\lambda}(\boldsymbol{s}, T + \boldsymbol{x}) = \zeta_{\lambda}(\boldsymbol{s} | \boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

5 Anti-hook type Giambelli formula

次に歪ヤング図形に対する Schur 多重ゼータ関数を定義する．2 つの分割 λ と μ を $\lambda \supset \mu$ を満たすものとする．すなわち，各 i について，$\lambda_i \geq \mu_i$ を満たすとする．$\lambda \backslash \mu$ を歪ヤング図形といい，λ/μ で表す．ヤング盤と同様に，各列に対して下方向に狭義単調増加し，各行に対して右方向に広義単調増加する正の整数を箱に書き入れた盤を歪半標準ヤング盤と呼び，形が λ/μ のすべての歪半標準ヤング盤の集合を $\mathrm{SSYT}_{\lambda/\mu}$ と書く．

定義 5.1 $\boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in T_{\lambda/\mu}(\mathbb{C})$, $\boldsymbol{x} = (x_{ij}) \in T^{\mathrm{diag}}_{\lambda}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ とする．歪型 *Schur* 多重ゼータ関数およびフルビッツ型の歪型 *Schur* 多重ゼータ関数を以下で定義する：

$$\zeta_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{s}) = \sum_{(m_{ij})\in SSYT_{\lambda/\mu}} \prod_{(i,j)\in D_{\lambda/\mu}} \frac{1}{{m_{ij}}^{s_{ij}}}, \quad \zeta_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x}) = \sum_{(m_{ij})\in SSYT_{\lambda/\mu}} \prod_{(i,j)\in D_{\lambda/\mu}} \frac{1}{(m_{ij} + x_{ij})^{s_{ij}}}.$$

収束域については，補題 2.2 と同様に以下を得る．

補題 5.2 $C_{\lambda/\mu} \subset D_{\lambda/\mu}$ を λ/μ の *corner* の集合とする．

$$W_{\lambda/\mu} := \left\{ (s_{ij}) \in T_{\lambda/\mu}(\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{Re}(s_{ij}) \geq 1 \ \mathit{for}\ {}^{\forall}(i,j) \in D_{\lambda/\mu} \setminus C_{\lambda/\mu} \\ \mathrm{Re}(s_{ij}) > 1 \ \mathit{for}\ {}^{\forall}(i,j) \in C_{\lambda/\mu} \end{array} \right\}$$

とする．このとき，$\zeta_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{s})$ および $\zeta_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x})$ は，$\boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in W_{\lambda/\mu}$ において絶対収束する．

$\boldsymbol{s}^{\#}$ を $\boldsymbol{s}$ の anti-diagonal な転置とする．また，$\boldsymbol{s}$ の形が λ のとき，$\boldsymbol{s}^{\#}$ の形を $\lambda^{\#}$ と書く．例えば,

$$\boldsymbol{s} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline z_{-1} & z_0 & z_1 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-3} z_{-2} & z_{-1} & z_0 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-3} \end{array}, \quad \boldsymbol{s}^{\#} = \begin{array}{ccc} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & z_3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{z_0} & z_1 & z_2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{z_{-1}} & z_0 & z_1 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{z_{-2}} & z_{-1} & z_0 \\ \hline \end{array}$$

は anti-diagonal な転置の一例である．このとき，$\lambda^{\#} = (4,3,3)^{\#} = (3,3,3,3)/(2)$ となる．本研究では，フルビッツ型 Schur 多重ゼータ関数の Giambelli 公式のすべての成分を anti-diagonal な転置に置き換える以下の表示を得た．

定理 5.3 ([5, Theorem 4.7]) λ をフロベニウス記法 $\lambda = (p_1, \cdots, p_N | q_1, \cdots, q_N)$ で表される分割とする．$\boldsymbol{s} \in W_{\lambda}^{\mathrm{diag}}$, $\boldsymbol{x} \in T_{\lambda}^{\mathrm{diag}}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ とする．この時，以下が成り立つ．

$$\zeta_{\lambda^{\#}}(\boldsymbol{s}^{\#}|\boldsymbol{x}^{\#}) = \det(\zeta_{(p_i, 1^{q_j})^{\#}}(\boldsymbol{s}_{ij}^{F\#}|\boldsymbol{x}_{ij}^{\#}))_{1 \leq i,j \leq N}. \tag{5.1}$$

形が $(p_i + 1, 1^{q_j})^{\#}$ を「Anti-hook 型」と呼ぶ．定理 5.3 は，長方形から左上が欠けた形で表される歪型の Schur 多重ゼータ関数を，各成分が Anti-hook 型の Schur 多重ゼータ関数となる行列式表示で表せることを主張している．

注意 3 形が $\lambda = (\ell, \ldots, \ell)$ で表される正方形のヤング盤に対し，定理 *4.1*，定理 *5.3* を適用したものを組み合わせることで，*Schur* 多重ゼータ関数のある種の行列型の関係式を得ることができる．

6 ζ および $\zeta^{\star\star}$ による表示

2007 年，Komori, Matsumoto, Tsumura ([2]) によって，ルート系ゼータ関数が導入された．[3] では古典型ルート系の一つである A_r 型ルート系に対応するルート系のゼータ関数の変形版としてある種のフルビッツ型のルート系のゼータ関数が定義された．その特殊なものが，ζ および $\zeta^{\star\star}$ であることに注意すると，以下の表示が得られる．

定理 6.1 ([4, Theorem 4.3]) λ をフロベニウス記法 $\lambda=(p_1,\cdots,p_N|q_1,\cdots,q_N)$ で表される分割とする．$\boldsymbol{s}\in W_\lambda^{\mathrm{diag}}$ とする．この時，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}) = &\sum_{m_{11},m_{22},\dots,m_{NN}\geq 1} (m_{11}\dots m_{NN})^{-z_0}\\ &\times \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{N}\zeta^{\star\star}(z_1,\dots,z_{p_k}|m_{\sigma(k)\sigma(k)},\dots,m_{\sigma(k)\sigma(k)})\\ &\quad\times\prod_{j=1}^{N}\zeta(z_{-1},\dots,z_{-q_j}|m_{jj},\dots,m_{jj}).\end{aligned}$$

注意 4 定理 *6.1* の表示は，*[4, Theorem 4.3]* では，ζ や $\zeta^{\star\star}$ ではなく，フルビッツ型の変形版ルート系のゼータ関数の言葉で書かれている．

定理 6.1 はフルビッツ型に拡張することができる．

定理 6.2 ([5, Theorem 6.1]) λ をフロベニウス記法 $\lambda=(p_1,\cdots,p_N|q_1,\cdots,q_N)$ で表される分割とする．$\boldsymbol{s}\in W_\lambda^{\mathrm{diag}}$, $\boldsymbol{x}\in T^{\mathrm{diag}}(\lambda,\mathbb{R}_{\geq 0})$ とする．この時，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x}) = &\sum_{m_{11},m_{22},\dots,m_{NN}\geq 1} ((m_{11}+y_0)\dots(m_{NN}+y_0))^{-z_0}\\ \times &\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^{N}\zeta^{\star\star}(z_1,\dots,z_{p_k}|m_{\sigma(k)\sigma(k)}+y_1,\dots,m_{\sigma(k)\sigma(k)}+y_{p_k})\\ \times&\prod_{j=1}^{N}\zeta(z_{-1},\dots,z_{-q_j}|m_{jj}+y_{-1},\dots,m_{jj}+y_{-q_j}).\end{aligned} \tag{6.1}$$

7 微分公式

Hurwitz 型を導入したことによるひとつの新しい視点として，パラメーターに関する微分が考えられる．すなわち，定理 4.2 で得られた式を微分することにより，新たな関係式が得られる．$\boldsymbol{s}\in W_\lambda^{\mathrm{diag}}$, $\boldsymbol{x}\in T_\lambda^{\mathrm{diag}}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ とする．$s_{ij}=z_{j-i}$, $x_{ij}=y_{j-i}$ とおくと，(4.1) の左辺は次のように書ける．

$$\begin{aligned}\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x}) &= \sum_{M\in SSYT_\lambda}\prod_{(i,j)\in D_\lambda}\frac{1}{(m_{ij}+x_{ij})^{s_{ij}}}\\ &= \sum_{M\in \mathrm{SSYT}_\lambda}\Bigg(\prod_{\substack{(i,j)\in D(\lambda)\\ j-i\neq\ell}}(m_{ij}+y_{j-i})^{-s_{ij}}\Bigg)\Bigg(\prod_{\substack{(i,j)\in D_\lambda\\ j-i=\ell}}(m_{ij}+y_\ell)^{-z_\ell}\Bigg)\end{aligned}$$

これを y_ℓ で偏微分することにより，次が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial y_\ell}\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}|\boldsymbol{x}) = -z_\ell \sum_{M\in\mathrm{SSYT}(\lambda)} \prod_{\substack{(i,j)\in D(\lambda)\\ j-i\neq\ell}} (m_{ij}+x_{ij})^{-s_{ij}} \times \sum_{\substack{(i_1,j_1)\in D(\lambda)\\ j_1-i_1=\ell}} (m_{i_1j_1}+y_\ell)^{-z_\ell-1} \prod_{\substack{(i,j)\in D(\lambda)\\ j-i=\ell\\ (i,j)\neq(i_1,j_1)}} (m_{ij}+y_\ell)^{-z_\ell}$$

一方，(4.1) の右辺を y_ℓ で偏微分することにより，次が得られる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_\ell}(RHS) = -z_\ell \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\sum_{j_1=0}^{q_1}\cdots\sum_{j_N=0}^{q_N}(-1)^{j_1+\cdots+j_N}\\ \times\sum_{u=1}^{N}\zeta^\star(z_{-j_u},\dots,z_0,\dots,z_{p_{\sigma(u)}}|y_{-j_u},\dots,y_0,\dots,y_{p_{\sigma(u)}})\\ \times\prod_{\substack{a\le v\le N\\ v\neq u}}\zeta^\star(z_{-j_v},\dots,z_0,\dots,z_{p_{\sigma(v)}}|y_{-j_v},\dots,y_0,\dots,y_{p_{\sigma(v)}})\\ \times\prod_{a\le v\le N}\zeta(z_{-j_v-1},\dots,z_{-q_v}|y_{-j_v-1},\dots,y_{-q_v})\end{aligned}$$

これより，次の関係式が得られる．

定理 7.1 ([5, Theorem 7.2]) $\boldsymbol{s}$ において，s_{i_1,j_1} を $s_{i_1,j_1}+a$ に置き換えたものを $\boldsymbol{s}_a(i_1,j_1)$ とする．$\lambda=(p+1,1^q)$ に対し，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{(i_1,j_1)\in D(\lambda)\\ j_1-i_1=\ell}}\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}_1(i_1,j_1)|\boldsymbol{x}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\sum_{j_1=0}^{q_1}\cdots\sum_{j_N=0}^{q_N}(-1)^{j_1+\cdots+j_N}\\ \times\sum_{u=1}^{N}\zeta^\star(z_{-j_u},\dots,z_0,\dots,z_{p_{\sigma(u)}}|y_{-j_u},\dots,y_0,\dots,y_{p_{\sigma(u)}})\\ \times\prod_{\substack{a\le v\le N\\ v\neq u}}\zeta^\star(z_{-j_v},\dots,z_0,\dots,z_{p_{\sigma(v)}}|y_{-j_v},\dots,y_0,\dots,y_{p_{\sigma(v)}})\\ \times\prod_{a\le v\le N}\zeta(z_{-j_v-1},\dots,z_{-q_v}|y_{-j_v-1},\dots,y_{-q_v}).\end{aligned}\tag{7.1}$$

偏微分で得られた式をさらに y_ℓ で偏微分するごとに，新たな関係式が得られる．詳細は [5] を見られたい．

References

[1] Ö. N. Eğecioğlu and J. B. Remmel, A combinatorial proof of the Giambelli identity for Schur functions, *Adv. Math.* **70** (1988), 59–86.

[2] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta-functions of root systems, in *The Conference on L-functions*, Fukuoka, 2006 (L. Weng and M. Kaneko eds.), World Scientific, 2007, pp. 115–140.

[3] K. Matsumoto and M. Nakasuji, Expressions of Schur multiple zeta-functions of anti-hook type by zeta-functions of root systems, *Publ. Math. Debrecen* **98** (2021), 345–377.

[4] K. Matsumoto and M. Nakasuji, Expressions of content-parametrized Schur multiple zeta-functions via the Giambelli formula, *Funct. Approx. Comment. Math.* **71** (2024), 7–20.

[5] K. Matsumoto and M. Nakasuji, Schur multiple zeta-functions of Hurwitz type, to appear in Conference Proceedings "Lie algebras and Number Theory" of ICLANT-2024, arXiv: 2503.14850.

[6] J. Nakagawa, M. Noumi, M. Shirakawa and Y. Yamada, Tableau representation for Macdonald's ninth variation of Schur functions, in *Physics and Combinatorics 2000*, Proc. Nagoya 2000 Intern. Workshop (A. N. Kirillov and N. Liskova eds.), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000, pp. 180–195.

[7] M. Nakasuji, O. Phuksuwan, and Y. Yamasaki, On Schur multiple zeta functions: A combinatoric generalization of multiple zeta functions, *Adv. Math.* **333** (2018), 570–619.

[8] H. Yamamoto, Factorial Schur multiple zeta function and Schur multiple Bernoulli polynomial, *Sophia University*, Master's thesis (2022).