多重 L 関数と保型反復積分

東北大学大学院理学研究科　横溝 真紘
Mahiro Yokomizo
Mathematical Institute, Tohoku University

1　はじめに

保型形式に付随する L 関数の解析的性質は，古典的には Mellin 変換による積分表示

$$\int_{i\infty}^{0} f(z)z^{s-1}\,dz = -\Gamma(s)L(f,s) \tag{1}$$

によって理解されてきた．この等式は，L 関数の解析接続や函数等式を与える基本的な道具であるのみならず, 臨界点における値が保型形式の周期として重要な算術的意味を持つことを示している．2005 年頃に Manin[4] は, 上式を反復積分の立場から一般化し, 保型形式に付随する反復積分を導入した．この着想は, 多重ゼータ値が反復積分として記述されることとの類似に強く動機づけられている．Manin はさらに, これらの反復積分の整数点における値が, ある種の多重 Dirichlet 級数によって記述されることを示唆した．その後, Choie–Ihara[2] , Brown[1] によって 多重 Hecke L 関数が導入された．Choie–Ihara らは定数項がない保型形式の反復積分を, 多重 Hecke L 関数の線形結合として明示的に表現し, さらに逆に多重 L 関数を反復積分で表すことができることを示した．これらの結果は, 古典的な Mellin 変換公式の自然な多重化とみなすことができる．本稿では, これらの流れを踏まえ, 多重 L 関数と保型反復積分の対応関係を一般の場合に拡張する．特に, 定数項の消失条件を課することなく, 両者の間に明示的な変換公式が成り立つことを述べる．また, $\Gamma_0(4)$ に対応するモジュラー曲線上の反復積分を考察し, 多重ゼータ値との関係を具体的に述べる．

2　保型反復積分と保型多重 L-関数

この節では Manin[4] により導入されたカスプ形式の反復積分を, より一般の保型形式に対して定義する．さらに Brown[1] および Choie-Ihara[2] により考察された多重 L-関数の定義を復習した後, それらの関係を説明する．

χ を N を法とする Dirichlet 指標とする．このとき重さ k の指標付き保型形式を以下のように定義する:

$$M_k(\Gamma_0(N),\chi)=\{f\in M_k(\Gamma_1(N)) \mid \text{任意の}\gamma=\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_0(N) \text{ に対して } f|[\gamma]_k=\chi(d)f\}.$$

任意の合同部分群は指標付き保型形式で表示できることが知られているので, 指標付き保型形式のみを考えることにする．

定義 2.1 ([4])**.** $f_j(z)\in M_{k_j}(\Gamma_0(N),\chi_j)$ $(j=1,\dots,n)$ に対して保型反復積分を

$$I_{i\infty}^{0}\begin{pmatrix} f_1,\dots,f_n\\ s_1,\dots,s_n\end{pmatrix}=\int_{i\infty}^{0}f_1(z_1)z_1^{s_1-1}dz_1\int_{i\infty}^{z_1}\cdots\int_{i\infty}^{z_{n-1}}f_n(z_n)z_n^{s_n-1}dz_n.$$

と定める．

この積分は, カスプにおける発散のためそのままでは意味を持たないが, Brown[1] によって導入された正則化された反復積分の枠組みにより, $(s_1,\dots,s_n)$ に関する有理型関数として解釈できる．さらに, 関数等式を持つことが Brown により示されている．

定義 2.2 ([1],[2])**.** $f_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(j)}q^k\in M_{k_j}(\Gamma_0(N),\chi_j)$ $(j=1,\dots,n)$ と十分実部が大きい s_1 に対して多重保型 L-関数を次で定義する:

$$\begin{aligned} L\begin{pmatrix} f_1,\dots,f_n\\ s_1,\dots,s_n\end{pmatrix}&=(-2\pi i)^{-(s_1+\cdots+s_n)}\\ &\times\sum_{m_1,\dots,m_n>0}\frac{a_{m_1}^{(1)}\cdots a_{m_n}^{(n)}}{(m_1+\cdots+m_n)^{s_1}(m_2+\cdots+m_n)^{s_2}\cdots(m_n)^{s_n}}.\end{aligned}$$

次の等式は Choie–Ihara[2] の等式の一般化であり, (1) の多重版である．

定理 2.3. 正整数 N と $f_j\in M_{k_j}(\Gamma_0,\chi_j)$ $(j=1,\dots,n)$ $s\in\mathbb{C},\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対

し, 以下が成り立つ.

$$I^0_{i\infty}\binom{f_1,\dots,f_n}{s,\alpha_2,\dots,\alpha_n}=\sum_{l=1}^{n}\sideset{}{'}\sum_{\substack{n'_{l+1}=n+1\\ n_1,\dots,n_{l+1}\geq 0}}\Gamma^{(s,\alpha_2,\dots,\alpha_{n'_l-1},\alpha_{n'_l,n})}A_{n_1,\dots,n_l}B_{n_{l+1}}(s,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$$

$$\times\sum_{\substack{0\leq j_r<\alpha_r+j_{r+1}\\ (2\leq r\leq n'_l)}}\binom{s+j_2-1}{j_2}\binom{\alpha_{n'_l,n}-j_{n'_l}-1}{\alpha_{n'_l+1,n}}\binom{\alpha_{n'_l,n}-1}{\alpha_{n'_l+1,n}}^{-1}\prod_{k=3}^{n'_l}\binom{\alpha_{k-1}+j_k-1}{j_k}$$

$$\times L\binom{f_{n'_1},\dots,f_{n'_l}}{s+\alpha_{2,n'_1}+j_{n'_1+1},\boldsymbol{\alpha}_{n_1,\dots,n_l}(\mathbb{J}),\alpha_{n'_{l-1}+1,n}-j_{n'_{l-1}+1}}$$

ただし

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{(a_1,\cdot,a_n)}=\Pi_{k=1}^{n}-\Gamma(a_k)\\
&\boldsymbol{\alpha}_{n_1,\dots,n_l}(\mathbb{J})=(\alpha_{n'_1+1,n'_2}-j_{n'_1+1}+j_{n'_2+1},\dots,\alpha_{n'_{l-2}+1,n'_{l-1}}-j_{n'_{l-2}+1}+j_{n'_{l-1}+1}),\\
&n'_j=n_1+\cdots+n_j+j,\quad \alpha_{n,m}=\alpha_n+\alpha_{n+1}+\cdots+\alpha_m,\\
&A_{n_1,\dots,n_l}=\frac{\prod_{i=1}^{n}a_0^{(i)}}{a_0^{n'_1}\dots a_0^{n'_l}},\quad B_m(s_1,\dots,s_n)=\begin{cases}1 & m=0\\ \frac{1}{s_n(s_n+s_{n-1})\dots(s_n+\cdots+s_{n-m+1})} & m\neq 0.\end{cases}
\end{aligned}$$

であり, $\sum'$ は $l=1,n_1=0$ のとき $A_0B_{n-1}(s,\alpha_2,\dots,\alpha_n)(s+\alpha_{2,n}-1)\dots s\Gamma(s)L\binom{f_1}{s+\alpha_{2,n}}$ を足し上げる.

定理 2.4. 正整数 N と $f_j\in M_{k_j}(\Gamma_0,\chi_j)$ $(j=1,\dots,n)$ $s\in\mathbb{C},\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $L\binom{f_1,\dots,f_n}{s,\alpha_2\dots,\alpha_n}$ は保型反復積分の線形和で表される.

証明は概ね, Choie–Ihara の議論に倣う.

3 モジュラー曲線 $Y_0(4)$ 上の反復積分

この章では $Y_0(4)$ 上の反復積分を考える. $Y_0(4)$ は古典的に $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0,1,\infty\}$ に同型であることが知られている. このことから多重ゼータ値と関連することがわかる. 今 $k\geq 0$ に対して $\mathbb{Q}$-線型空間 $\mathcal{Z}_k$ を重さ k の多重ゼータ値で張られる空間とし $\mathcal{Z}=\sum\mathcal{Z}_k$ と定める, ただし $k=0,1$ のときは $\mathcal{Z}_0=\mathbb{Q},\mathcal{Z}_1=\{0\}$ とする. 同様に $\mathcal{Z}_k(M_2(\Gamma_0(4)))$ を $(2\pi i)^kI^0_{i\infty}\binom{f_1,\dots,f_k}{1,\dots,1},(f_i\in M_2(\Gamma_0(4)))$ で張られる $\mathbb{Q}$ 線型空間とし $\mathcal{Z}(M_2(\Gamma_0(4)))=\sum\mathcal{Z}_k(M_2(\Gamma_0(4)))$ とする. このとき以下が知られている.

定理 3.1 (Brown[1])**.** 線型空間として次の等号が成立する.

$$\mathcal{Z}(M_2(\Gamma_0(4))) = \mathcal{Z}[\log 2]$$

この定理から任意の多重ゼータ値はレベル 4 重さ 2 における保型反復積分の特殊値で表示できることが分かるが, 実際にどのような反復積分で表示できるかは分からない, そこでこの節では明示的に多重ゼータ値を保型反復積分で表示することを目指す.

命題 3.2. $M_2(\Gamma_0(4))$ は F と G で生成される, ただし

$$F(z) := -\frac{1}{24}(E_2(z) - 3E_2(2z) + 2E_2(4z)),$$
$$G(z) := \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}\right)^4,$$

とする.

命題 3.3. $\lambda = \frac{16F}{G}$ と定める, このとき $\lambda : Y_0(4) \to \mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$ は同型写像である.

これらの命題は基本的なので証明を省略する. 同型写像 λ を用いて $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$ 上における微分形式の引き戻しを計算する. そのためにデデキントの η 関数を用いる. デデキントの η 関数は以下のように定義される上半平面上の関数である.

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n).$$

命題 3.4. 任意の正整数 l に対して次が成り立つ.

$$\frac{d}{dz}\log(\eta(lz)) = \frac{2\pi il}{24}E_2(lz).$$

命題 3.5. $F, G.$ は以下のようにデデキント η 関数で表示できる.

$$F(z) = \frac{\eta(4z)^8}{\eta(2z)^4},$$
$$G(z) = \frac{\eta(2z)^{20}}{\eta(z)^8\eta(4z)^8},$$
$$G(z) - 16F(z) = \frac{\eta(z)^8}{\eta(2z)^4}.$$

では $\omega_0 = \frac{dz}{z}$ の λ による引き戻しを計算する:

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda(z)}{\lambda(z)} &= d\mathrm{log}(\lambda(z)) \\ &= d\mathrm{log}\left(16\frac{F(z)}{G(z)}\right) \\ &= d\mathrm{log}\left(\frac{\eta(4z)^{16}\eta(z)^8}{\eta(2z)^{24}}\right) \\ &= d(16\mathrm{log}\eta(4z) + 8\mathrm{log}\eta(z) - 24\mathrm{log}\eta(2z)) \\ &= \frac{2\pi i}{3}(E_2(z) + 8E_2(4z) - 6E_2(2z))dz \\ &= 2\pi i(G(z) - 16F(z))dz.\end{aligned}$$

最後の等式は q 展開における係数を比較すればよい. 同様に $\omega_1 = \frac{dz}{1-z}$ の λ による引き戻しを計算する.

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda(z)}{1-\lambda(z)} &= -d\mathrm{log}(1-\lambda(z)) \\ &= -d\mathrm{log}\left(1 - \frac{16F(z)}{G(z)}\right) \\ &= -d\mathrm{log}\left(\frac{G(z) - 16F(z)}{G(z)}\right) \\ &= -d\mathrm{log}\left(\frac{\eta(z)^{16}\eta(4z)^8}{\eta(2z)^{24}}\right) \\ &= -\frac{4\pi i}{3}(E_2(z) + 2E_2(4z) - 3E_2(2z))dz \\ &= 32\pi i F(z)dz\end{aligned}$$

よって以下の定理を得る.

定理 3.6. $k_1 \geq 2, k_2, \ldots, k_d \in \mathbb{N}$ に対し以下の等号を得る.

$$\begin{aligned}&\zeta(k_1, \ldots, k_d) \\ &= (2\pi i)^w\, 16^d \int_{\lambda^*(\mathrm{dch})} (F(z)dz)((G(z) - 16F(z))dz)^{k_1-1} \\ &\ldots (F(z)dz)((G(z) - 16F(z))dz)^{k_d-1}\end{aligned}$$

謝辞

2025 年度 RIMS 共同研究（公開型）「多重ゼータ値の諸相」での講演機会をくださいました研究代表者の大野泰生先生（東北大学），関真一朗先生（長浜バイオ大学）に心より感謝申し上げます．本研究は東北大学人工知能エレクトロニクス大学院プログラムから支援を受けております．

参考文献

[1] F. Brown, A multi-variable version of the completed Riemann zeta function and other L-functions, arXiv:1904.00190(2019)

[2] Y. J. Choie and K. Ihara, Iterated period integrals and multiple Hecke L-functions, Manuscripta Math. **142** (2013), no. 1-2, 245–255.

[3] G ,Köhler. Eta Products and Theta Series Identities. Springer, (2011)

[4] Y. I. Manin. Iterated integrals of modular forms and noncommutative modular symbols. Progr. Math., 253, Birkhäuser, (2006).