Summation formulas for hypergeometric functions and multiple zeta values

東北大学理学研究科　角野裕太 *
Yuta Kadono
Mathematical Institute, Tohoku University

Abstract

超幾何級数の特殊値をガンマ関数などで評価する和公式は、パラメータに適切な条件を課すことにより数多く得られている。一方で、それらを統一的に扱う枠組みを与えることは容易ではなく、古くから研究されてきた。本稿では、まず（q-）超幾何級数・超幾何関数の定義を簡単に復習し、次に和公式の導出で典型的に仮定される平衡条件や釣合条件といったパラメータ制約を課さずに得られる和公式について、今回得られた結果を中心に紹介する。

1　超幾何関数とその q-類似

複素数 α と非負整数 n に対し、**shifted factorial** を

$$(\alpha)_n := \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} = \prod_{i=0}^{n-1}(\alpha+i)$$

で定める。

複素数 $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ と、$\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ に対して、**超幾何級数**

$$ {}_{k+1}F_k \left(\left. \begin{matrix} \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \\ \beta_1, \ldots, \beta_k \end{matrix} \right| z \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_0)_n (\alpha_1)_n \cdots (\alpha_k)_n}{(1)_n (\beta_1)_n \cdots (\beta_k)_n} z^n \tag{1}$$

を考える。この級数は $|z| < 1$ で収束する。特に、shifted factorial の定義から、ある i に対して $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ が成り立つとき、$(\alpha_i)_n = 0$ となる n が存在するので、(1) は有限和となり多項式で与えられる。

また級数 (1) は、線型常微分方程式

$$\left[z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \prod_{j=1}^{s} \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \beta_j - 1 \right) - z \prod_{i=1}^{r} \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + \alpha_i \right) \right] y = 0, \tag{2}$$

* *E-mail address*: `hebigami.math@gmail.com`

の $z=0$ における正則解（$y(0)=1$ を満たす解）になっている。したがって線型微分方程式の一般論より、$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\}$ 上の多価正則関数として解析接続される。この解析接続した関数を**超幾何関数**と呼ぶ。

上で述べたように、$z=1$ は方程式 (2) の特異点であり、級数 (1) も一般には $z=1$ で発散するが、パラメータに条件を課すと $z=1$ で収束することが知られている。

補題 1. 級数 (1) が $z=1$ で収束する必要十分条件は、終端級数であるかまたは

$$\mathrm{Re}(\beta_1+\cdots+\beta_k-\alpha_0-\alpha_1-\cdots-\alpha_k)>0$$

である。

収束円の境界点 $z=1$ において級数が意味を持つとき、超幾何級数の $z=1$ での値を Γ 関数などの比で評価する公式を **和公式**と呼ぶ。以下では、代表的な和公式の例として Gauss の超幾何定理を挙げる。

定理 1 (Gauss の超幾何定理)**.** 複素数 α,β,γ が $\gamma\notin\mathbb{Z}_{\leq 0}$ および

$$\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0$$

を満たすとする。このとき

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\middle|\, 1\right)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

が成り立つ。

より一般の超幾何級数 ${}_{k+1}F_k(1)$ に関する和公式は、パラメータに関するさらなる条件を仮定して得られるものがいくつか知られている。例えば、次のような条件が典型的に現れる。

- **平衡条件（balanced）：** $1+\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_k=\beta_1+\cdots+\beta_k$
- **釣合条件（well-poised）：** $1+\alpha_0=\alpha_1+\beta_1=\cdots=\alpha_k+\beta_k$

この種の和公式については、Slater [4] などを参照されたい。

次に、超幾何級数の q-類似である q-超幾何級数を導入する。以下、$0<|q|<1$ を固定する。

複素数 a と非負整数 n に対し、**q-shifted factorial** を

$$(a;q)_n\coloneqq\prod_{i=0}^{n-1}(1-aq^i)$$

で定める。また無限積

$$(a;q)_\infty\coloneqq\prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i)$$

は $0<|q|<1$ の下で収束する。簡単のため

$$(a_1,\dots,a_m;q)_N \coloneqq (a_1;q)_N\cdots(a_m;q)_N, \qquad N\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$$

と書く。

複素数 $a_0,\,a_1,\,\dots,a_k\in\mathbb{C}$ と $b_1,\,\dots,\,b_k\in\mathbb{C}\setminus q^{-\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ に対し、**q-超幾何級数**を

$$ {}_{k+1}\phi_k\left(\begin{matrix}a_0,a_1,\dots,a_k\\ b_1,\dots,b_k\end{matrix}\,\middle|\,q,z\right)\coloneqq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_0,\,a_1,\,\cdots,\,a_k;q)_n}{(q,\,b_1,\,\cdots,\,b_k;q)_n}z^n, \tag{3}$$

で定める。$0<|q|<1$ のとき、この級数は $|z|<1$ で収束することが知られている（例えば、 Gasper–Rahman [3] や DLMF [1] などを参照）。

注意 1. 古典の場合と異なり、級数 (3) は一般に $z=1$ で収束しない。実際、(3) が終端級数でないと仮定すると、 $n\to\infty$ で $(a;q)_n\to(a;q)_\infty$, $(b;q)_n\to(b;q)_\infty$, $(q;q)_n\to(q;q)_\infty$ がいずれも有限非零極限を持つため、一般項は定数倍の z^n に漸近する。従って $z=1$ では一般項が 0 に収束せず、級数は発散する。

このため、basic 超幾何級数においては、収束円の内部（典型的には $|z|<1$ を満たす点）での特殊値を無限積（あるいは q-ガンマ関数）で評価する公式が重要となる。これらを **q-和公式**と呼ぶ。以下では、その代表例として Heine の定理（q-Gauss の和公式）を挙げる。

定理 2 (Heine の定理（q-Gauss の和公式）)**.** 複素数 a,b,c が $c\notin q^{-\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ および

$$\left|\frac{c}{ab}\right|<1$$

を満たすとする。このとき

$${}_2\phi_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix}\,\middle|\,q,\frac{c}{ab}\right)=\frac{(c/a,\,c/b;q)_\infty}{(c,\,c/(ab);q)_\infty}$$

が成り立つ。

古典の場合と同様に、より高階の ${}_{k+1}\phi_k$ に関する q-和公式も多数知られており、その際には平衡条件（balanced）や釣合条件（well-poised）などのパラメータ条件が典型的に現れる。

2 主結果

本節では、典型的な和公式の導出にしばしば現れる平衡条件（balanced）や釣合条件（well-poised）といったパラメータ制約を前提とせずに、(q-) 超幾何級数の和公式を構成する結果を述べる。基本方針は、ある無限積を Euler の補題を用いてべき級数として展開することである。

まず、q-超幾何級数に関する基本的な例を挙げる。自然数 k に対して 1 の原始 k 乗根を

$$\zeta_k \coloneqq \exp(2\pi\sqrt{-1}/k)$$

とおく。

定理 3. 自然数 k に対して、

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{q^k X^k}{(1-qa)^k}\,{}_{k+1}\phi_k\left(\left.\begin{matrix} q,\, q(a+\zeta_k X),\, q(a+\zeta_k^2 X),\, \ldots,\, q(a+\zeta_k^k X) \\ q^2 a,\, \ldots,\, q^2 a \end{matrix}\,\right|\, q,\, q^k\right) \\
&\quad = \prod_{j=1}^{k} \frac{(qa + q\zeta_k^j X; q)_\infty}{(qa;q)_\infty}
\end{aligned}$$

が成り立つ。

証明の鍵は、次の無限積

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{q^{nk}X^k}{(1-q^n a)^k}\right)$$

を以下の Euler による恒等式を用いて展開することである。

補題 2 (Euler [2])**.**

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x_n) = 1 - x_1 - \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$$

注意 2. この無限積は、 X に関する形式的べき級数環上で級数に展開することにより、各係数に Hurwitz 型の q-多重ゼータ値

$$\zeta_q(\{k\}^r; \{a\}^r) \coloneqq \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \prod_{i=1}^{r} \frac{q^{m_i k}}{(1-q^{m_i}a)^k}$$

が現れる。

次に、適切なパラメータ調整の下で古典極限をとることにより、古典超幾何級数に関する次の和公式が得られる。

定理 4. 自然数 k に対して、

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{X^k}{(\alpha+1)^k}\,{}_{k+1}F_k\left(\left.\begin{matrix} 1,\, 1+\alpha-\zeta_k X,\, 1+\alpha-\zeta_k^2 X,\, \ldots,\, 1+\alpha-\zeta_k^k X \\ 2+\alpha,\, \ldots,\, 2+\alpha \end{matrix}\,\right|\, 1\right) \\
&\quad = \prod_{j=1}^{k} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-\zeta_k^j X)}
\end{aligned}$$

が成り立つ。

さらに、上の例を多項式の因子分解という代数的データにより一般化できる。ここでは balanced や well-poised のような加法的・乗法的な条件を直接仮定する代わりに、分子・分母パラメータの間に「ある多項式が別の多項式で補正された後に一次因子へ分解する」という形の制約を課す。

定理 5. 複素数 $b_1, \ldots, b_k$ に対して、多項式

$$g(T) \coloneqq \prod_{i=1}^{k}(1 - b_i T)$$

を考える。また、1 以上の整数 k' と複素数 C に対して、

$$g(T) - Ct^{k'} = \prod_{i=1}^{K}(1 - a_i T)$$

とおく（ただし、$K \coloneqq \max\{k, k'\}$ とする）。このとき、

$$1 - C\frac{q^K}{g(q)}\,{}_{K+1}\Phi_k \left(\begin{matrix} q,\, qa_1,\, \ldots,\, qa_K \\ q^2 b_1,\, \ldots,\, q^2 b_k \end{matrix} \middle|\, q,\, q^{k'} \right)$$

が成り立つ。ただし、

$${}_r\Phi_s \left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix} \middle|\, q, z \right) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_r; q)_n}{(q,\, b_1,\, \cdots,\, b_s; q)_n} z^n.$$

上の定理は、$g(T)$ の選び方に応じて多様な q-和公式を統一的に与える。特に、具体的なパラメータ配置に対して $g(T) - CT^{k'}$ の分解が明示できる場合には、対応する q-超幾何級数が無限積（あるいは既知の特殊関数）で評価される。

謝辞

RIMS 共同研究 (公開型) 多重ゼータ値の諸相での講演機会をくださいました研究代表者の大野 泰生先生、関 真一朗先生に心より感謝申し上げます。

References

[1] NIST Digital Library of Mathematical Functions. https://dlmf.nist.gov/, Release 1.2.5 of 2025-12-15. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds.

[2] L. Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum 1-2*, Marcum-Michaelem Bousquet & socios, (1748), pp.1-320,

[3] G. Gasper and M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Cambridge University Press, Cambridge, (2004)

[4] L.J. Slater,*Generalized hypergeometric functions*, Cambridge University Press, Cambridge, (1966)