Multiple zeta-star values for indices of infinite length

北九州市立大学 経済学部　村原英樹
Hideki Murahara
Faculty of Economics, The University of Kitakyushu

概要

インデックスの長さが無限長の多重ゼータスター値について考察する。いくつかの明示公式を与えるとともに，インデックス（あるいはそれと対応する $[0,1]$ の元）を多重ゼータスター値に写す写像を定義し，その解析的性質について述べる。本研究の成果は，鹿児島大学の広瀬稔氏と大分大学の小野塚友一氏との共同研究に基づく。

1　無限長の多重ゼータスター値と特殊値

多重ゼータスター値は

$$\zeta^\star(k_1,\dots,k_r)=\sum_{n_1\geq\cdots\geq n_r\geq 1}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

で定義される多重級数であり，$(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ かつ $k_1\geq 2$ を満たすときに定義される。この値は多重ゼータ値とともに，様々に研究されてきた。特殊値として，例えば以下のものが知られている。

例 1.1.

$$\zeta^\star(2,1)=2\zeta(3),\quad \zeta^\star(2,2)=\frac{7\pi^4}{360},\quad \zeta^\star(3,1)=\frac{\pi^4}{72}$$

この他にも，次のような特殊値が知られている。これらを見ると，一番下の行のようなことが予想されるだろう。

例 1.2.

$$\begin{aligned}
\zeta^\star(2,1)&=2\zeta(3),\\
\zeta^\star(2,2,1)&=2\zeta(5),\\
\zeta^\star(2,2,2,1)&=2\zeta(7),\\
\zeta^\star(2,2,2,2,1)&=2\zeta(9),\\
\zeta^\star(2,2,2,2,2,1)&=2\zeta(11),\\
&\cdots\\
\zeta^\star(2,2,2,2,2,\dots)&\overset{?}{=}2\zeta(\infty)\ (=2)
\end{aligned}$$

講演では，$\zeta^\star(2,2,2,2,2,\ldots)$ のような，インデックス[*1]の長さが無限長の多重ゼータスター値（無限長の多重ゼータスター値）について考えた。

定義 1.3. $k_1 \geq 2$ を満たす $(k_1, k_2, \ldots) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{\infty}$ に対し，無限長の多重ゼータスター値を次で定義する。

$$\zeta^\star(k_1, k_2, \ldots) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots} \qquad (= \lim_{r \to \infty} \zeta^\star(k_1, \ldots, k_r))$$

ここで，和は $\lim_{r\to\infty} m_r = 1$ を満たす正の整数の単調減少列 $(m_j)_{j=1}^{\infty}$ 全体にわたる。

上記の級数は，$k_1 = 2$ かつすべての $j > 1$ に対して $k_j = 1$ である場合を除いて収束する[*2]。まず，無限長の多重ゼータスター値について，いくつかの公式を示す。本稿ではすべての定理の証明を省略し，結果のみを示す。証明については [HMO25] を参照されたい。また以降において，$\{k\}^r$ は k の r 回の繰り返しを表すものとし，例えば $(\{k\}^3) = (k,k,k)$ である。

定理 1.4. 以下の等式が成り立つ。

(1) $k_1 \geq 2$ を満たす $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ に対して，

$$\zeta^\star(k_1, \ldots, k_{r-1}, k_r + 1, \{1\}^{\infty}) = \zeta^\star(k_1, \ldots, k_r)$$

(2) $k_1 \geq 2$ を満たす $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\zeta^\star(k_1, \ldots, k_r, \{2\}^{\infty}) \\
&= (-1)^{k_1 + \cdots + k_r} \left(2 - 2 \sum_{s=1}^{r} {\sum_{j=2}^{k_s - 1}}' (-1)^{k_1 + \cdots + k_{s-1} + j} \zeta^\star(k_1, \ldots, k_{s-1}, j) \right)
\end{aligned}$$

ここで和の記号 $\sum'$ は，次のように解釈する：${\sum'}_{j=a}^{b-1}$ は，$b < a$ ならば $-\sum_{j=b}^{a-1}$ を意味し，$b = a$ ならば 0 を意味し，$b > a$ ならば $\sum_{j=a}^{b-1}$ を意味する。

(3) $k \geq 2$ に対して，

$$\zeta^\star(\{k\}^{\infty}) = \prod_{m=2}^{\infty} \left(\frac{m^k}{m^k - 1} \right) = \prod_{c^k = 1} \Gamma(2 - c)$$

(4) $n \geq 2$ に対して，

$$\zeta^\star(\{2, \{1\}^{n-2}\}^{\infty}) = n$$

(5) $n \geq 1$ に対して，

$$\zeta^\star(\{\{2\}^n, 1\}^{\infty}) = 2 \prod_{c^{2n+1} = 1} \frac{\Gamma(2 - c)}{\Gamma(2 + c)}$$

(6) $n \geq 0$ に対して，

$$\zeta^\star(\{\{2\}^n, 3, \{2\}^n, 1\}^{\infty}) = 2 \prod_{s \in \{\pm 1\}} \prod_{c^{2n+2} = s} \Gamma(2 - c)^{-s} \Gamma\left(1 - \frac{c}{2}\right)^{2s}$$

[*1] インデックスとは，$(k_1, \ldots, k_r)$ のような自然数の組を指す。

[*2] 収束性は，定理 1.4 の $\zeta^\star(\{2, \{1\}^{n-2}\}^{\infty}) = n$ と定理 2.3 からわかる。

注意 1.5. Li は我々の研究とは独立に，定理 1.4 (1), (4) および 定理 2.3 と同じ結果を得ており，さらに関連する話題を研究している。詳細は [Li25] を参照されたい。また菅野隼氏は，独立に，定理 1.4 の (3), (4) を含むいくつかの結果を得ている。

以下に，定理 1.4 の例を順に挙げる[*3]。

例 1.6.

$$\begin{aligned}
&\zeta^\star(3,1,1,1,\ldots)=\zeta^\star(2)=\zeta(2),\\
&\zeta^\star(4,1,1,1,\ldots)=\zeta^\star(3)=\zeta(3),\\
&\zeta^\star(2,2,1,1,1,\ldots)=\zeta^\star(2,1)=2\zeta(3),\\
&\zeta^\star(3,2,1,1,1,\ldots)=\zeta^\star(3,1)=\pi^4/72
\end{aligned}$$

例 1.7.

$$\begin{aligned}
&\zeta^\star(2,2,2,\ldots)=2,\\
&\zeta^\star(3,2,2,\ldots)=2\zeta(2)-2,\\
&\zeta^\star(4,2,2,\ldots)=2\zeta(3)-2\zeta(2)+2
\end{aligned}$$

例 1.8.

$$\begin{aligned}
\zeta^\star(3,3,3,\ldots)&=\frac{6\pi}{e^{\sqrt{3}\pi/2}+e^{-\sqrt{3}\pi/2}},\\
\zeta^\star(4,4,4,\ldots)&=\frac{8\pi}{e^{\pi}-e^{-\pi}},\\
\zeta^\star(6,6,6,\ldots)&=\frac{24\pi^2}{2+e^{\sqrt{3}\pi}+e^{-\sqrt{3}\pi}},\\
\zeta^\star(8,8,8,\ldots)&=\frac{64\pi^3}{(e^{\pi}-e^{-\pi})(e^{\sqrt{2}\pi}+e^{-\sqrt{2}\pi}-2\cos(\sqrt{2}\pi))}
\end{aligned}$$

例 1.9.

$$\begin{aligned}
&\zeta^\star(2,2,2,\ldots)=2,\\
&\zeta^\star(2,1,2,1,2,1,\ldots)=3,\\
&\zeta^\star(2,1,1,2,1,1,2,1,1,\ldots)=4,\\
&\zeta^\star(2,1,1,1,2,1,1,1,2,1,1,1,\ldots)=5,\\
&\zeta^\star(2,1,1,1,1,2,1,1,1,1,2,1,1,1,1,\ldots)=6
\end{aligned}$$

例 1.10.

$$\zeta^\star(2,1,2,1,2,1,\ldots)=3$$

例 1.11.

$$\zeta^\star(3,1,3,1,3,1,\ldots)=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}$$

[*3] 煩雑になるため省略するが，所々，既知の多重ゼータスター値に関する関係を使用して，結果が単純になるように変形している。重複するものも，敢えて載せている。

2　写像 $Z^\star$ の定義と性質

定義 2.1. $Z^\star : [0,1] \to [1,\infty]$ を $Z^\star(0)=1$ および

$$Z^\star\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k_1+\cdots+k_j}}\right)=\zeta^\star(k_1+1,k_2,k_3,\dots)$$

によって定義する[*4]。ここで，$k_1,k_2,\dots\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ である。

例 2.2.

$$\begin{aligned}
Z^\star\left(\frac{1}{2}\right)&=Z^\star\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^{2+1}}+\frac{1}{2^{2+1+1}}+\cdots\right)=\zeta^\star(2+1,1,1,\dots)=\zeta(2),\\
Z^\star\left(\frac{1}{4}\right)&=Z^\star\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^{3+1}}+\frac{1}{2^{3+1+1}}+\cdots\right)=\zeta^\star(3+1,1,1,\dots)=\zeta(3),\\
Z^\star\left(\frac{1}{3}\right)&=Z^\star\left(\frac{1}{2^2}\times\frac{4}{3}\right)=Z^\star\left(\frac{1}{2^2}\times\frac{1}{1-1/2^2}\right)\\
&=Z^\star\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^{2+2}}+\frac{1}{2^{2+2+2}}+\cdots\right)\\
&=\zeta^\star(2+1,2,2,\dots)\ =2\zeta(2)-2
\end{aligned}$$

写像 $Z^\star$ は，無限長のインデックスに対する，すべての多重ゼータスター値の情報を含んでいる。2 つのインデックス $(k_1,k_2,\dots)$ と $(l_1,l_2,\dots)$ が与えられたとき，ある j が存在して $k_i=l_i$ および $k_j<l_j$ $(i\in\{1,\dots,j-1\})$ が成り立つならば，前者は後者よりも辞書式順序で小さいということにすると，以下のような性質がある。

定理 2.3. $Z^\star$ は連続かつ全単射である。言い換えれば，写像

$$(k_1,k_2,k_3,\dots)\mapsto\zeta^\star(k_1+1,k_2,k_3,\dots)$$

は，辞書式順序 $\prec$ を備えた $(\mathbb{Z}_{\geq 1}^{\infty},\prec)$ と $(1,\infty]$ の間の順序を反転させる全単射を与える。

注意 2.4. 多重ゼータ値の集合の順序構造は，[Kum16] により研究されている。

定理 2.5. $z\in[0,1)$ で定義された写像 $Z^\star$ は，ある稠密な集合上で微分不可能である。より正確には，以下が成り立つ。

(1) 写像 $Z^\star$ は $0\leq z<1$ に対して z で右微分可能である。
(2) $z\notin\{1-\frac{1}{2^n}\mid n>0\}$ ならば，写像 $Z^\star$ は z で左微分可能である。
(3) $z\in\{1-\frac{1}{2^n}\mid n>0\}$ ならば，写像 $Z^\star$ は z で左微分不可能である。

[*4] 「$[0,1]$ の元」と「無限長のインデックス」とは，1 対 1 に対応する。それは例 2.2 の $Z^\star$ の括弧の中身と $\zeta^\star$ の括弧の中身を見比べればわかる。

(4) $z \in (0,1) \setminus \left\{ \frac{a}{2^n} \mid 0 < a < 2^n, n > 0 \right\}$ ならば，左微分 $\partial_- Z^\star(z)$ は右微分 $\partial_+ Z^\star(z)$ と等しい。

(5) $z \in \left\{ \frac{a}{2^n} \mid 0 < a < 2^n - 1, n > 0 \right\}$ ならば，左微分 $\partial_- Z^\star(z)$ は右微分 $\partial_+ Z^\star(z)$ よりも大きい。

講演では，定理 2.5 を述べたが，より詳細には次のようなことがわかる。

定理 2.6. $z = \sum_{j=1}^\infty \frac{a_j}{2^j}$ とし，$a_j \in \{0,1\}$ とする。$\sum_{j=1}^\infty a_j = \infty$ かつ，ある t に対して $\sum_{j=1}^t (1-a_j) \geq 2$ が成り立つと仮定する。このとき

$$\partial_- Z^\star(z) := \lim_{x \to z-0} \frac{Z^\star(z) - Z^\star(x)}{z-x} = \frac{1}{2} + \sum_{d=1}^\infty a_d \left(\sum_{m_1 \geq \cdots \geq m_d \geq 3} \frac{a_1^{m_1-m_2} \cdots a_{d-1}^{m_{d-1}-m_d}}{m_1^2 m_2 \cdots m_d} \right) 2^d$$

したがって，$z \notin \{1 - \frac{1}{2^n} \mid n > 0\}$ ならば，$Z^\star$ は z において左微分可能である。

定理 2.7. $z = \sum_{j=1}^\infty \frac{a_j}{2^j}$ とし，$a_j \in \{0,1\}$ とする。さらに $\sum_{j=1}^\infty (1-a_j) = \infty$ を仮定する。このとき

$$\partial_+ Z^\star(z) := \lim_{x \to z+0} \frac{Z^\star(z) - Z^\star(x)}{z-x} = \frac{1}{2} + \sum_{d=1}^\infty a_d \left(\sum_{m_1 \geq \cdots \geq m_d \geq 3} \frac{a_1^{m_1-m_2} \cdots a_{d-1}^{m_{d-1}-m_d}}{m_1^2 m_2 \cdots m_d} \right) 2^d$$

したがって，任意の $0 \leq z < 1$ に対して，$Z^\star$ は z において右微分可能である。

定理 2.8. $z = \sum_{j=1}^r \frac{a_j}{2^j}$ とし，$a_j \in \{0,1\}$，$a_r = 1$ とする。このとき

$$\partial_+ Z^\star(z) = \frac{1}{2} + \sum_{d=1}^r a_d \left(\sum_{m_1 \geq \cdots \geq m_d \geq 3} \frac{a_1^{m_1-m_2} \cdots a_{d-1}^{m_{d-1}-m_d}}{m_1^2 m_2 \cdots m_d} \right) 2^d$$

が成り立ち，さらに

$$\partial_- Z^\star(z) = \partial_+ Z^\star(z) + \sum_{m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq 3} \frac{a_1^{m_1-m_2} \cdots a_{r-1}^{m_{r-1}-m_r}}{m_1^2 m_2 \cdots m_r} 2^r (m_r - 2) \qquad (z \neq 1 - 1/2^r)$$

が成り立つ。

定理 2.9. $p > 0$ を固定し，$z = 1 - \frac{1}{2^p}$ とおく。$q > p$ を満たす $h = \frac{1}{2^q}$ に対して

$$\frac{Z^\star(z) - Z^\star(z-h)}{h} \asymp q$$

が成り立つ。したがって，$Z^\star$ は $1 - \frac{1}{2^p}$ において左微分可能ではない。

注意 2.10. 定理 2.6 および 2.7 によれば，z が $\sum_{j=1}^\infty \frac{a_j}{2^j}$ という 2 進展開をもち，かつ $\sum_{j=1}^\infty a_j = \sum_{j=1}^\infty (1-a_j) = \infty$ を満たすならば，$\partial_+ Z^\star(z) = \partial_- Z^\star(z)$ が成り立つ。これは定理 2.5 (4) を含意する。

謝辞

この度は，RIMS「多重ゼータ値の諸相」にて，講演の機会をいただきありがとうございました。本研究は，JSPS 科研費 JP18K13392, JP19K14511, JP22K03244, JP22K13897 の助成を受けたものである。

参考文献

[HMO25] Minoru Hirose, Hideki Murahara, and Tomokazu Onozuka, *Multiple zeta-star values for indices of infinite length*, J. Math. Soc. Japan **77** (2025), no. 2, 513–535 (English).

[Kum16] K. Senthil Kumar, *Order structure and topological properties of the set of multiple zeta values*, Int. Math. Res. Not. **2016** (2016), no. 5, 1541–1562 (English).

[Li25] Jiangtao Li, *The topology of the set of multiple zeta-star values*, Preprint, arXiv:2309.07569 [math.NT] (2025), 2025.

Faculty of Economics
The University of Kitakyushu
4-2-1 Kitagata, Kokuraminami-ku, Kitakyushu,
Fukuoka, 802-8577, Japan
E-mail address: hmurahara@mathformula.page