

ON ECALLE'S SENARY RELATION AND DIMORPHIC TRANSPORT

川村花道 (東京理科大学理学研究科 M1)

HANAMICHI KAWAMURA

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE

1. INTRODUCTION

この文章で主に扱うのは *dimorphy* と呼ばれる, Ecalle による *flexion* 理論における概念です. 後述する *bimould* という数学的対象があり, それらについて成り立つことのある特別な性質の総称が *dimorphy* です. とくに, *dimorphy* が二種類与えられたときに, それぞれを満たす *bimould* たちの集合どうしにどのような関係があるか, というところに主眼を置いています. もちろん単独の研究対象としても面白いのですが, *bimould* の中でも特別なクラスは非可換な冪級数とぴったり対応がつくことがわかっており¹, たとえばその中で “al/il” と “pushu/pusinu” という二種類の *dimorphy* はそれぞれ double shuffle Lie 代数 $\mathfrak{d}\mathfrak{s}_0$ と Kashiwara–Vergne Lie 代数 $\mathfrak{k}\mathfrak{v}_2$ に対応することがわかっています. 本稿では, *flexion* 理論の枠組みの中でこれらの *dimorphy* を詳しく調べ, [S2], [EF2] による包含 $\mathfrak{d}\mathfrak{s}_0 \hookrightarrow \mathfrak{k}\mathfrak{v}_2$ や, Brown の持ち上げ $\chi_B: \mathfrak{ls}_0 \rightarrow \mathfrak{d}\mathfrak{s}_0$ に対して *flexion* 理論的な解釈・別証明を与えます.

本稿を通して, \mathbb{K} は標数 0 の体, R は可換で結合的な \mathbb{K} 代数とします.

注意 1.1. 以下の本文に現れる主張のほとんどは [E1], [E3], [E2] に証明なしで述べられていたものです.

2. BIMOULDs

各非負整数 r に対し, “ R 係数の $2r$ 変数関数たちがなす R 加群” $\text{BIMU}_r(R)$ が与えられているとします². これの元を $M \begin{pmatrix} u_1, \dots, u_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix}$ という風に変数を二段に分けて書きます. $2r$ 変数, と一緒にたにして書いてしまいましたが, 上下の変数は役割を異にすることが多いです: たとえば, 有限巡回群 Γ に対して

$$\text{Hom}_{\text{Set}}(\Gamma^r, R[[u_1, \dots, u_r]]) = \left\{ M \begin{pmatrix} u_1, \dots, u_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix} \in R[[u_1, \dots, u_r]] \mid v_1, \dots, v_r \in \Gamma \right\}$$

などが典型的な例です. さらに, 添字の部分を保つ積

$$\text{BIMU}_r(R) \otimes_R \text{BIMU}_s(R) \rightarrow \text{BIMU}_{r+s}(R)$$

があることを仮定します. この設定のもと, 直積

$$\text{BIMU}(R) := \prod_{r=0}^{\infty} \text{BIMU}_r(R)$$

の元のことを *bimould* と呼びます. 直積の $r = 0$ 成分は R であると仮定します. *Bimould* $A = (A^{(r)})_{r \geq 0}$ に対し, 各 $2r$ 変数関数 $A^{(r)}$ を “ A の長さ r 成分” と呼ぶことが多いです. 長さ 0 成分 $A(\emptyset)$ は R の元ですが, これを A の “定数項” と呼びます. 変数のペアを $w_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$ とする略記を

¹紙面の都合上, この対応の詳細については一切触れられないことをお許しください. たとえば [Ko2] や [FHK] がよい文献です.

²あいまいさの残る定義になってしまいましたが, 実際にどのような関数族を拾うかは後述する *flexion unit* ごとに変えます. 関数族の取り方に関する定式化の詳細は [FHK] をご覧ください.

しばしば使いますが, それぞれの bimould をあり得る w_i たちの生成する自由 \mathbb{K} 代数³ \mathfrak{M} からの線型写像だと思つて便利です (これに則つて, 上付きの (r) を省くこともよくあります). 上述した積構造から来る R 双線型な積

$$\text{mu}(A, B)(w_1 \cdots w_r) := \sum_{i=0}^r A(w_1 \cdots w_i) B(w_{i+1} \cdots w_r)$$

を用いて, $(\text{BIMU}(R), \text{mu})$ は R 代数になります. 単位元は $1 := (1, 0, 0, \dots)$ です. 長さに関する下降フィルターについて $\text{BIMU}(R)$ は完備になりますが, このことをもつて bimould A を無限和 $\sum_{r=0}^{\infty} A^{(r)}$ として表示することもあります. さらに, $\text{BIMU}(R)$ の部分集合

$$\text{MU}(R) := \{A \in \text{BIMU}(R) \mid A(\emptyset) = 1\}, \quad \text{LU}(R) := \{A \in \text{BIMU}(R) \mid A(\emptyset) = 0\}$$

がそれぞれ mu によって群になること, mu の交換子 lu によって Lie 代数になることもすぐに確認できます. さらに, MU は副冪単代数群であり, その Lie 代数がまさに $\text{LU}(\mathbb{K})$ になっています. 以降 R は動かさないので, 考える bimould の集合を (R) を省いて書いてしまうことにします.

3. SEVERAL SYMMETRIES

Bimould には様々な演算があります. よく使う単項演算を以下に挙げておきます (mantar 以外は定数項を保存します).

$$\begin{aligned} \text{neg}(A) \begin{pmatrix} u_1, \dots, u_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix} &:= A \begin{pmatrix} -u_1, \dots, -u_r \\ -v_1, \dots, -v_r \end{pmatrix}, \\ \text{pus}(A) \begin{pmatrix} u_1, \dots, u_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix} &:= A \begin{pmatrix} u_r, u_1, \dots, u_{r-1} \\ v_r, v_1, \dots, v_{r-1} \end{pmatrix}, \\ \text{push}(A) \begin{pmatrix} u_1, \dots, u_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix} &:= A \begin{pmatrix} -(u_1 + \dots + u_r), u_1, \dots, u_{r-1} \\ -v_r, v_1 - v_r, \dots, v_{r-1} - v_r \end{pmatrix}, \\ \text{pari}(A) \begin{pmatrix} u_1, \dots, u_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix} &:= (-1)^r A \begin{pmatrix} u_1, \dots, u_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix}, \\ \text{anti}(A) \begin{pmatrix} u_1, \dots, u_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix} &:= A \begin{pmatrix} u_r, \dots, u_1 \\ v_r, \dots, v_1 \end{pmatrix}, \\ \text{mantar}(A) \begin{pmatrix} u_1, \dots, u_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix} &:= (-1)^{r-1} A \begin{pmatrix} u_r, \dots, u_1 \\ v_r, \dots, v_1 \end{pmatrix}, \\ \text{swap}(A) \begin{pmatrix} u_1, \dots, u_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix} &:= A \begin{pmatrix} v_r, v_{r-1} - v_r, \dots, v_1 - v_2 \\ u_1 + \dots + u_r, \dots, u_1 + u_2, u_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

swap だけはすこし特殊で, “上下の変数の役割を入れ替えている” ことに注意してください⁴. 具体例をいくつか後述しますが, これらの作用素のもとの不変性や対称性は総称して *monomorphy* と呼ばれます.

注意 3.1. Flexion 理論において極めて頻繁に現れる

$$\begin{aligned} \text{neg} \circ \text{push} &= \text{anti} \circ \text{swap} \circ \text{anti} \circ \text{swap} \\ &= \text{mantar} \circ \text{swap} \circ \text{mantar} \circ \text{swap} \end{aligned}$$

という作用素間の等式があります. 後述する flexion unit による捻りのように, push という作用素に着目するときは, むしろこれを push の定義として考える状況もあります.

³これはもちろん w_i たちの作る自由モノイド \mathfrak{M} が張るベクトル空間と思つてもよいわけですが, 後々用いる u_i たちの和や v_i たちの差とこの空間 R に入る和は同じ演算ではありません.

⁴Flexion 理論のしくみとしては swap を対合だと思つべきですが, 文章を読むうえでは異なる空間を行き来していると考えた方がわかりやすいかもしれません.

また, bimould に入るような変数たちの列がなす代数 \mathfrak{A} は先述したように自由代数ですから, 通常の shuffle 積 $\mathfrak{m}: \mathfrak{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ を入れることができます. これによって, $A \in \text{MU}$ (resp. $A \in \text{LU}$) に対して条件

$$A(\mathbf{w} \mathfrak{m} \mathbf{w}') = A(\mathbf{w})A(\mathbf{w}') \quad (\text{resp. } A(\mathbf{w} \mathfrak{m} \mathbf{w}') = 0) \quad \text{for } \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathfrak{A} \setminus \{\emptyset\}$$

を考えることができます. これらの要件を満たす bimould A はそれぞれ *symmetrized*, *alternated* であるという言い方をします. Shuffle 積の双対を取った余積を BIMU に入れればこれらの要件はそれぞれ group-like や Lie-like (primitive) であるということに他なりません, こういった対称性も monomorphy の一種です.

さて, ここまで来ると dimorphy の何たるかを説明することが叶います⁵. 先述したような monomorphy を二つとり X, Y と書きます: たとえば X が alternated 性で, Y が push のもとでの不変性, など. BIMU の部分集合⁶ S に対し,

$$S_{X/Y} := \left\{ A \in S \mid \begin{array}{l} A \text{ satisfies } X, \\ \text{swap}(A) \text{ satisfies } Y \end{array} \right\}$$

の元は dimorphy X/Y をもつ, というような言い方をします. 要するに「 X を満たしていて, swap 側は Y を満たす」という性質のことを「 X/Y という dimorphy を満たす」としているわけです. 文脈によっては X/Y の代わりに $X * Y$ と書いて, $\text{swap}(A)$ に何らかの補正をつけたものが Y を満たす, という風に条件を緩めることもあります⁷.

4. INFLECTED OPERATIONS

MU や LU にはそれぞれ deconcatenation から来る構造が入っていましたが, 同じ台集合に対してより複雑な積やブラケットを入れることで面白い部分構造を引き出すことができます. これらの演算に現れるのが *flexion marker* という 4 種類の演算です: $\mathbf{w} = w_1 \cdots w_r = \binom{u_1, \dots, u_r}{v_1, \dots, v_r} \in \mathfrak{A}$ に切れ目を入れ, $\mathbf{a} = w_1 \cdots w_i$, $\mathbf{b} = w_{i+1} \cdots w_r$ としておきます. このとき

$$\begin{aligned} \mathbf{a}[\mathbf{b}] &:= \binom{u_1 + \cdots + u_i + u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_r}{v_{i+1}, \dots, v_r}, & \mathbf{a}]_{\mathbf{b}} &:= \binom{u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + u_{i+1} + \cdots + u_r}{v_1, \dots, v_i}, \\ \mathbf{a}[\mathbf{b}] &:= \binom{u_{i+1}, \dots, u_r}{v_{i+1} - v_i, \dots, v_r - v_i}, & \mathbf{a}]_{\mathbf{b}} &:= \binom{u_1, \dots, u_i}{v_1 - v_{i+1}, \dots, v_i - v_{i+1}} \end{aligned}$$

という 4 種類の鍵括弧 (?) が flexion marker です. まずはブラケットを捻ったものを考えましょう: 各 $B \in \text{LU}$ に対し, BIMU 上の線型写像

$$\text{arit}(B): A \mapsto \left(\text{arit}(B)(A): \mathbf{w} \mapsto \sum_{\substack{\mathbf{w}=\mathbf{abc} \\ \mathbf{c} \neq \emptyset}} A(\mathbf{a}_{\mathbf{b}}[\mathbf{c}])B(\mathbf{b}]_{\mathbf{c}}) - \sum_{\substack{\mathbf{w}=\mathbf{abc} \\ \mathbf{a} \neq \emptyset}} A(\mathbf{a}[\mathbf{b}_{\mathbf{c}}])B(\mathbf{b}[\mathbf{c}]) \right)$$

を考えます. これを用いて

$$\begin{aligned} \text{ari}: \text{LU} \otimes_R \text{LU} &\rightarrow \text{LU}, \\ \text{preari}(A, B) &:= \text{arit}(B)(A) + \text{mu}(A, B), \\ \text{ari}(A, B) &:= \text{preari}(A, B) - \text{preari}(B, A) \end{aligned}$$

⁵いままさですが, 数学的に厳密な定義のある語ではありません. ある種の現象の名前だと考えるのがよさそうです.

⁶とは申しましたが, 筆者は S に該当するものとして MU か LU しか見たことがありません.

⁷後述する dimorphy al/il にこういった補正を付ける, というのがまさに double shuffle Lie 代数と対応しますが, この補正はちょうど多重ゼータ値の二種類の正規化を比較する際にガンマ関数が掛かることに対応します.

と定めると、これは Lie ブラケットになっており (証明はたとえば [FK, §A.1]), Lie 代数 $\text{ARI} := (\text{LU}, \text{ari})$ を定めます. さて先述したように、 ARI の台集合 LU はブラケット lu に基づいた指数関数⁸をとることで副代数群 MU になるのです. これと平行に、 ari から作った指数関数

$$\text{expari}(A) := A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\text{preari}(\cdots \text{preari}(\text{preari}(A, A), A), \cdots)}_{A \text{ が } n \text{ コ}}$$

をとることで副代数群が得られます. “Group of ARI ” ということなのでしょう⁹, これを GARI と書きます. 明示的な表示もわかっています: GARI の台集合は MU と同じで、積は線型写像

$$\text{garit}: \text{MU} \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{K}\text{-代数}}(\text{BIMU}),$$

$$\text{garit}(B): A \mapsto \left(\mathbf{w} \mapsto \sum_{\substack{\mathbf{w}=\mathbf{a}_1 b_1 \mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{a}_s b_s \mathbf{c}_s \\ s \geq 0}} A(\mathbf{a}_1 [b_1] \mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{a}_s [b_s] \mathbf{c}_s) \prod_{i=1}^s B(\mathbf{a}_i] b_i) \text{invmu}(B)(b_i [\mathbf{c}_i) \right)$$

を用いて¹⁰ $\text{gari}(A, B) := \text{mu}(\text{garit}(B)(A), B)$ と定まります¹¹. ここで太字を使わず b_i のように書いているのは \mathbf{w} の長さ 1 の部分列という意味で、 $\text{invmu}(B)$ は群 (MU, mu) における B の逆元です. 後々多用するので、 GARI から ARI への随伴作用を adari と書いておきましょう: つまり $S \in \text{GARI}$, $A \in \text{ARI}$ に対して

$$\text{expari}(\text{adari}(S)(A)) = \text{gari}(S, \text{expari}(A), \text{invgari}(S))$$

です (invgari は gari についての逆元).

Monomorphy あるいは dimorphy から別の対称性が従うとき、帰結となる部分を *subsymmetry* と呼ぶことがあります. 以下にいくつかの *subsymmetry*¹² を紹介し、本節を締めくくります.

定理 4.1 ([FK], [S1]). 以下の八つはすべて ARI の部分 Lie 代数である¹³.

- (1) $\text{ARI}_{\text{al}} := \{A \in \text{ARI} \mid A \text{ は alternal}\}$.
- (2) $\text{ARI}_{\text{al}} := \{A \in \text{ARI}_{\text{al}} \mid A \text{ の長さ 1 部分は neg 不変}\}$.
- (3) $\text{ARI}_{\text{al/al}} := \{A \in \text{ARI}_{\text{al}} \mid \text{swap}(A) \in \text{ARI}_{\text{al}}\}$.
- (4) $\text{ARI}_{\text{neg}} := \{A \in \text{ARI} \mid \text{neg}(A) = A\}$.
- (5) $\text{ARI}_{\text{mantar}} := \{A \in \text{ARI} \mid \text{mantar}(A) = A\}$.
- (6) $\text{ARI}_{\text{push}} := \{A \in \text{ARI} \mid \text{push}(A) = A\}$.
- (7) $\text{ARI}_{\text{pusnu}} := \{A \in \text{ARI} \mid (\text{id} + \text{pus} + \cdots + \text{pus}^r)(A)(w_1 \cdots w_r) = 0 \ (r \geq 2)\}$.
- (8) $\text{ARI}_{\text{push/pusnu}} := \{A \in \text{ARI}_{\text{push}} \mid \text{swap}(A) \in \text{ARI}_{\text{pusnu}}\}$.

さらに、包含関係

$$\begin{aligned} \text{ARI}_{\text{al}} &\subseteq \text{ARI}_{\text{mantar}} \cap \text{ARI}_{\text{pusnu}}, \\ \text{ARI}_{\text{al/al}} &\subseteq \text{ARI}_{\text{neg}} \cap \text{ARI}_{\text{push}} \end{aligned}$$

が成り立つ. とくに $\text{ARI}_{\text{al/al}} \subseteq \text{ARI}_{\text{push/pusnu}}$ である.

⁸Ecalte はこれを expmu と書いています.

⁹おそらく “ MU ” は multiplication と mould のダブルミーニングで、 LU は MU の Lie 環ということでそういう記号がつけられているのだと思います. ただ肝心の ARI という言葉が何のアクロニムなのかは筆者はよく知りません.

¹⁰Ecalte のオリジナルの定義とは見た目が異なりますが、一致することが示せます [Ka1, Lemma 3.9]. 様々な計算をする上ではこちらの表示の方が便利です.

¹¹Lie 代数の一般論から、 $B \in \text{LU}$ に対して $\text{exp}(\text{arit}(B)) = \text{garit}(\text{expari}(B))$ も成り立ちます.

¹²群のほう (GARI 側) でも似たことが成り立ちますが、本稿では線型な話に注目しているので省略しました.

¹³下線を付しているのが長さ 1 部分の *neg* 不変性を意味しています. この条件は長さ 1 部分が偶関数 $A \binom{u_1}{v_1} = A \binom{-u_1}{-v_1}$ である、と言っても同じことです. al/al にはこの要件を付けているのに push/pusnu のほうには無くて変だと思われるかもしれませんが、定義より長さ 1 部分に制限すると $\text{neg} = \text{push}$ です.

5. FLEXION UNITS

前節最後の定理で, いくつかの monomorphy および dimorphy を満たす Lie 代数を紹介しました. これらの対称性は *flexion unit* と呼ばれる特殊な bimould によって捻ることができます.

定義 5.1. 長さ 1 の¹⁴ bimould \mathfrak{E} が

- (1) imparity 条件 $\text{neg}(\mathfrak{E}) = -\mathfrak{E}$,
- (2) tripartite 関係式 $\mathfrak{E}(w_1)\mathfrak{E}(w_2) = \mathfrak{E}(w_1]w_2)\mathfrak{E}(w_1[w_2) + \mathfrak{E}(w_1[w_2)\mathfrak{E}(w_1]w_2)$

とともに満たすとき, \mathfrak{E} は flexion unit である, という.

Tripartite 関係式は Fay の恒等式と本質的に同じであることが指摘されています (cf. [Ba, §2.3]). それぞれの flexion unit \mathfrak{E} に対して, 変数の上下を入れ替えた

$$\mathfrak{D} := \text{swap}(\mathfrak{E}), \quad \mathfrak{D}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \mathfrak{E}\begin{pmatrix} v_1 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

も flexion unit ですが, これを \mathfrak{E} の 共役 *unit* といいます¹⁵. 重要な具体例として, *polar unit* と呼ばれる

$$\text{Pa}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} := \frac{1}{u_1}, \quad \text{Pi}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} := \frac{1}{v_1}$$

があります. これらは定義より互いに共役で, tripartite 関係式はちょうど部分分数分解に対応します.

以下では特記しない限り flexion unit \mathfrak{E} およびその共役 \mathfrak{D} を固定して考えます. これらに付随する *primary bimould* を

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}_3 &:= \text{invmu}(1 - \mathfrak{D}) = 1 + \mathfrak{D} + \text{mu}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}) + \cdots, & \mathfrak{o}_3(w_1 \cdots w_r) &= \mathfrak{D}(w_1) \cdots \mathfrak{D}(w_r), \\ \text{es} &:= \text{expari}(\mathfrak{E}), & \text{es}\begin{pmatrix} u_1, \dots, u_r \\ v_1, \dots, v_r \end{pmatrix} &= \mathfrak{E}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 - v_2 \end{pmatrix} \cdots \mathfrak{E}\begin{pmatrix} u_1 + \cdots + u_{r-1} \\ v_{r-1} - v_r \end{pmatrix} \mathfrak{E}\begin{pmatrix} u_1 + \cdots + u_r \\ v_r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で定めます. これらは swap で移り合います.

定義 5.2. A が \mathfrak{D} -symmetr'al (resp. \mathfrak{D} -altern'al) であるとは, bimould $\text{ganit}(\mathfrak{o}_3)^{-1}(A)$ が symmetr'al (resp. altern'al) であることをいう¹⁶. ここで, $\text{ganit}(B)$ とは先述した $\text{garit}(B)$ の定義において $B, \text{invmu}(B)$ であった部分をそれぞれ $1, B$ に置き換えたもの.

注意 5.3. Bimould $0 := (0, 0, \dots)$ はもちろん flexion unit ですが, このとき $\text{ganit}(\text{invmu}(1 - 0)) = \text{id}$ ですから, 0-symmetr'al (altern'al) 性とは元々の symmetr'al (altern'al) 性そのものです.

注意 5.4. いくつかの特別な flexion unit には, 上記の捻った対称性に名前がついています. たとえば, Pi-symmetr'al (resp. Pi-altern'al) 性のことを *symmetr'il* (resp. *altern'il*) という風に言います. 共役な組 (Pa, Pi) が典型例ですが, flexion 理論においては swap で移り合うものどうしを “名前の中にある母音 a, i を入れ替える” ことで表現することが多いです. たとえば gari 積の swap による共役は $\text{gira}(A, B) := \text{swap}(\text{gari}(\text{swap}(A), \text{swap}(B)))$ と書かれます. しかし symmetr'ial な bimould を swap したところで symmetr'a'l になったり, あるいは Pa-symmetr'al になったりするわけではありません¹⁷.

¹⁴ほかの長さで消えている, という意味です.

¹⁵ここで共役な組に用いている記号 $\mathfrak{E}, \mathfrak{D}$ はそれぞれ Fraktur での E, O です.

¹⁶Ecalte の定義をそのまま採用しましたが, Pi-symmetr'al 性が多重ゼータ値の調和関係式に対応していることを考えると, quasi-shuffle algebra の文脈に沿った定式化も存在するべきです. [Ko1, Proposition 3.20 の証明の冒頭] に “ほとんどこれでいだろう” と思える等式がありますが, 特異点の取り扱いなどの問題は残っており “ベストな定義” が何かは未定かではありません.

¹⁷Flexion unit に付随する概念に限っては移り変わる母音を a ではなく u にするようで, Pa-symmetr'al のことを symmetr'ul といいます. 後述する \mathfrak{e} -ter も, $\mathfrak{E} = \text{Pa}, \text{Pi}$ のときはそれぞれ teru, teri になりますが, 本来 ter あるいは tera と呼ばれるべき “zero unit に付随する写像” は恒等写像になってしまいます.

前節で dimorphic な Lie 代数の一種である $\text{ARI}_{\text{al}/\text{al}}$ とその subsymmetry を紹介しましたが、片方をこの捻った対称性に置き換えても類似したことがいくつか成り立ちます。

定理 5.5 ([Ka2]). ふたつの R 加群

$$\begin{aligned}\text{ARI}_{\mathfrak{E}\text{-push}/\mathfrak{D}\text{-pusnu}} &:= \{A \in \text{ARI} \mid \mathfrak{E}\text{-push}(A) = A, \text{ganit}(\alpha_3)^{-1}(A) \in \text{ARI}_{\text{pusnu}}\}, \\ \text{ARI}_{\text{al}/\text{al}} &:= \{A \in \text{ARI}_{\text{al}} \mid \text{swap}(A) \text{ は } \mathfrak{D}\text{-alternat}\}\end{aligned}$$

はともに ARI の部分 Lie 代数であり、包含関係 $\text{ARI}_{\text{al}/\text{al}} \subseteq \text{ARI}_{\mathfrak{E}\text{-push}/\mathfrak{D}\text{-pusnu}}$ が成り立つ。

さて、ここまでに四種類の dimorphic Lie algebra

$$\text{ARI}_{\text{al}/\text{al}}, \text{ARI}_{\text{al}/\text{al}}, \text{ARI}_{\text{push}/\text{pusnu}}, \text{ARI}_{\mathfrak{E}\text{-push}/\mathfrak{D}\text{-pusnu}}$$

を紹介しました。Introduction の節で “bimould の中には非可換冪級数と一対一対応のつくクラスがある” と申しましたが、そのクラスの中でこれらの四種類を polar units の設定 $(\mathfrak{E}, \mathfrak{D}) = (\text{Pa}, \text{Pi})$ で考えたとき、すでに研究されているいくつかの Lie 代数と対応します。まず捻りの入った $\text{ARI}_{\text{al}/\text{al}}$ は double shuffle Lie 代数 $\mathfrak{d}_{\mathfrak{s}_0}$ と対応します ([S1])。また、捻っていない $\text{ARI}_{\text{al}/\text{al}}$ は $\mathfrak{d}_{\mathfrak{s}_0}$ の線型化である $\mathfrak{l}_{\mathfrak{s}_0}$ に対応しており、 $\text{ARI}_{\text{al}} \cap \text{ARI}_{\text{push}/\text{pusnu}}$ は Kashiwara–Vergne Lie 代数 \mathfrak{kv}_2 の線型化 $\mathfrak{l}_{\mathfrak{kv}_2}$ に対応します。この事実と先述した subsymmetry (定理 4.1) を合わせると $\mathfrak{l}_{\mathfrak{s}_0} \leftrightarrow \mathfrak{l}_{\mathfrak{kv}_2}$ がわかります。さてそうすると、残りのひとつ (の alternat 部分) $\text{ARI}_{\text{al}} \cap \text{ARI}_{\mathfrak{E}\text{-push}/\mathfrak{D}\text{-pusnu}}$ は $\text{ARI}_{\text{al}} \cap \text{ARI}_{\text{push}/\text{pusnu}}$ の捻りつき variant なので、Kashiwara–Vergne Lie 代数 \mathfrak{kv}_2 そのものに対応してほしいという期待があります。それを説明するのが次節の senary relation です。

6. SENARY RELATION

Flexion unit \mathfrak{E} に付随する作用素

$$\mathfrak{E}\text{-ter}: \text{LU} \rightarrow \text{LU},$$

$$\mathfrak{E}\text{-ter}(A)(w_1 \cdots w_r) := A(w_1 \cdots w_r) - A(w_1 \cdots w_{r-1})\mathfrak{E}(w_r) + A(w_1 \cdots w_{r-1})\mathfrak{E}(w_r)$$

を考えます。定義域が LU であることに注意すると可逆であることがわかります。これを用いて

$$\mathfrak{E}\text{-sena} := \mathfrak{E}\text{-ter}^{-1} \circ \text{push} \circ \text{mantar} \circ \mathfrak{E}\text{-ter} \circ \text{mantar}$$

と定めます¹⁸。先述した母音の規則に従い、 $\text{senu} := \text{Pa}\text{-sena}$ としましょう。ある bimould B がこの作用 $\mathfrak{E}\text{-sena}$ のもとで不変なとき、 B は「senary relation を満たす」という言い方をします。

注意 6.1. $\mathfrak{E} = 0$ のとき、senary relation とは push 不変性そのものです。

この関係式の重要な点のひとつは、[S1] や [FK] で指摘されているように、 $\mathfrak{E} = \text{Pa}$ ととったときに Lie 代数における退化版 Kashiwara–Vergne 条件 (KV1) と同値になっていることです¹⁹。また、簡単な計算により、非可換冪級数と対応する bimould においては、もうひとつの Kashiwara–Vergne 条件 (KV2) は swap 側が pusi-neutral になること、すなわち $\text{ganit}(\text{invmu}(1 - \text{Pi}))^{-1} \circ \text{swap}$ による像が $\text{ARI}_{\text{pusnu}}$ に入ること、と言い換えられます²⁰。つまり、「(KV1) と (KV2) を満たす Lie-like elements

¹⁸原論文では $\mathfrak{E}\text{-push}_*$ という記号だったのですが、可読性を考えて変更しました。いままで述べてきたように、bimould に対する作用素ごとに、それに対する不変性の条件を「空間の添字にその作用素を付ける」ことで表していました：たとえば push 不変な空間は ARI_{push} など。一方で [FK] においては ($\mathfrak{E} = \text{Pa}$ としたときの) senary relation を満たす空間を ARI_{sena} と表しており、この表記との整合性がほしかったという理由もあります：しかし sena では何の flexion unit を反映しているかわからないので、本稿では Ecalle の流儀も一部採用してこれを senu と書くことにします。

¹⁹本講究録の古庄先生の記事にある “inertia-preserving 条件” はこれの Lie 群における対応物を言っています。Ecalle 流の記法だと 「genu-invariance」といったところでしょうか。

²⁰[FK] では捻りを入れず、単に pusnu と同値であるという定式化にしています。これは [FK] で考えている Kashiwara–Vergne Lie 代数に “divergence が消えている” という条件を課しているため ([AT] の記号でいえば \mathfrak{kv}_2^0 に対応) で、cocycle の条件にまで緩めれば pusi-neutrality に対応します。なお、 pusnu のことは [RS] において circneut という書かれ方をしていますが、同論文での circonst はちょうど pusnu のことです。

の空間」として定式化されている Kashiwara–Vergne Lie 代数は $\text{ARI}_{\text{al}} \cap \text{ARI}_{\text{senu}/\text{pusinu}}$ に対応します。ですので、 $\text{pushu} := \text{Pa-push}$ としますと、先述した

$\text{ARI}_{\text{al}} \cap \text{ARI}_{\text{pushu}/\text{pusinu}}$ は Kashiwara–Vergne Lie 代数に対応してほしいという願いは、空間の等式

$$\text{ARI}_{\text{al}} \cap \text{ARI}_{\text{pushu}/\text{pusinu}} \stackrel{?}{=} \text{ARI}_{\text{al}} \cap \text{ARI}_{\text{senu}/\text{pusinu}}$$

が成り立っていてほしい、という形で純粋に flexion 理論の文脈に落とすことができます。本稿の主結果のひとつは、この疑問を肯定的に解決する以下の恒等式です。

定理 6.2 ([Ka2, Theorem 5.3]). 任意の $B \in \text{LU}$ に対し

$$\text{mu}(1 - \Omega, \text{swap}(B) - \text{swap}(\mathfrak{E}\text{-sena}(B))) = \text{swap}(B) - \text{swap}(\mathfrak{E}\text{-push}(B))$$

が成り立つ。とくに $\mathfrak{E}\text{-push}$ 不変な空間 $\text{ARI}_{\mathfrak{E}\text{-push}}$ と senary relation の解空間 $\text{ARI}_{\mathfrak{E}\text{-sena}}$ は一致する。

この証明もまた flexion 理論に閉じた形で与えられます。初等的な計算を繰り返すのですが、その中では次節に述べる様々な道具が使われます。

7. DIMORPHIC TRANSPORTATION

7.1. Secondary bimoulds. 先ほど挙げた四つの dimorphic 構造、

$$\text{ARI}_{\text{al}/\text{al}}, \text{ARI}_{\text{al}/\text{ol}}, \text{ARI}_{\text{push}/\text{pusnu}}, \text{ARI}_{\mathfrak{E}\text{-push}/\Omega\text{-pusnu}}$$

は、non-swap 側に alternal 性を補うことにより、非可換冪級数な世界における

$$\mathfrak{ls}_0, \mathfrak{ds}_0, \mathfrak{ltv}_2, \mathfrak{rtv}_2$$

に対応するのです。そして、双方の世界において、一つ目と三つ目がそれぞれ二つ目と四つ目の“線型化” variant である²¹、ということもすでに述べました。このうち double shuffle の文脈については、オリジナル版とその線型化の間にきわめて非自明な同型

$$\chi_B: \mathfrak{ls}_0 \rightarrow \mathfrak{ds}_0$$

がある、ということが Brown によって指摘されています。Brown の論文ではこの同型性の証明は省略されており、[KT] では予想として紹介されています。同報告 [KT] においてはほかにも、

- (1) Ecalle による別の同型写像 $\text{adari}(\text{pal})$ があること、
- (2) Brown と Ecalle のそれぞれの同型写像は長さの短いところでは一致すること、
- (3) Brown 同型の構成に用いた有理関数 ψ_0 を別のものに取り換えることで Ecalle 同型が得られるかもしれないこと、

が述べられています。今回やったことのひとつに、Ecalle の “dimorphic transportation” を詳しく調べ、これらに対するアプローチを行った結果があります。adari(pal) のことは既に Schneps [S1] や Komiyama [Ko1] などでも触れられているのですが、今回は一般の flexion unit でやっているのです。pal にあたる部分の構成が必要です。Flexion unit に付随する “primary bimoulds”, \mathfrak{o}_3 や \mathfrak{es} など、をすでに紹介しましたが、それに次ぐ secondary bimoulds というのもあり、その polar units への特殊化がまさに pal です。以下の定理は、実際にそれを作ってみてどういうことがいえるか、に言及したものに なります。

²¹多重ゼータ値の言葉でいうと深さの filtration から作った次数付き空間の関係式を抽出したものであり、重さによって入る次数もそのままあるので、 \mathfrak{ls}_0 や \mathfrak{ltv}_2 は “bigraded 版” という風には呼ばれることもしばしばあります。かたや flexion 理論のほうの文脈では必ずしも重さに対応する構造を入れているとは限らないので、単に linearized と言うことにしています。

定理 7.1 ([Ka1], [Ka2]). 正整数 r に対し

$$\mathfrak{r}_1 := \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{r}_{r+1} := \text{arit}(\mathfrak{r}_r)(\mathfrak{E})$$

という規則で帰納的に bimould の列 $\{\mathfrak{r}_r\}_{r \geq 1}$ を定め, また有理数列 $\{\varepsilon_r\}_{r \geq 1}$ を

$$x + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\varepsilon_r x \frac{d}{dx} \right)^r x = 1 - \exp(-x)$$

となるように定める²². これらを用いて

$$\mathfrak{ess} := \text{expari} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon_r \mathfrak{r}_r \right) \in \text{MU}$$

と定め, \mathfrak{E} の代わりに \mathfrak{D} を使ってまったく同じ構成を行い \mathfrak{oess} も作っておく²³. このとき次が成り立つ.

(1) $\mathfrak{ess}, \mathfrak{oess} \in \text{GARI}_{\text{as/as}}$. つまり \mathfrak{ess} と \mathfrak{oess} も, それぞれの swap をとった $\mathfrak{öess}, \mathfrak{ëss}$ もすべて symmetral である.

(2) $\text{slash}(B) := \text{gari}((\text{neg} \circ \text{pari})(B), \text{invgari}(B))$ と書くと

$$\text{slash}(\mathfrak{ess}) = \text{slash}(\mathfrak{ëss}) = \text{expari}(\mathfrak{E}), \quad \text{slash}(\mathfrak{oess}) = \text{slash}(\mathfrak{öss}) = \text{expari}(\mathfrak{D}).$$

(3) 写像 $\text{crash}: \text{MU} \rightarrow \text{MU}$ を

$$\text{crash}(B) := \text{mu}((\text{push} \circ \text{swap} \circ \text{invmu} \circ \text{invgari} \circ \text{swap})(B), (\text{swap} \circ \text{invgari} \circ \text{swap})(B))$$

で定めると

$$\text{crash}(\mathfrak{ess}) = \text{crash}(\mathfrak{ëss}) = \text{invmu}(1 - \mathfrak{E}), \quad \text{crash}(\mathfrak{oess}) = \text{crash}(\mathfrak{öss}) = \text{invmu}(1 - \mathfrak{D}).$$

これらの定義において, 多重ゼータ値的な設定 $(\mathfrak{E}, \mathfrak{D}) = (\text{Pa}, \text{Pi})$ にとったときの \mathfrak{ess} が pal と書かれるものです. 他にも名前はあり, この状況だと

$$\text{par} := \mathfrak{ess}, \quad \text{pir} := \mathfrak{öss}, \quad \text{pil} := \mathfrak{oess}$$

といった具合です. [S1] では $\text{crash}(\text{pal}) = \text{pac} := \text{invmu}(1 - \text{Pa})$ が既に証明されている一方で, $\text{crash}(\text{pil}) = \text{pic} := \text{invmu}(1 - \text{Pi})$ という予想もなされていました. 上記の定理にある $\text{crash}(\mathfrak{oess}) = \text{invmu}(1 - \mathfrak{D})$ はこれの肯定的解決でもあります.

7.2. Double shuffle 側の transportation. さて, これらの secondary bimoulds の真価は表題の *dimorphic transportation* にあります. 先ほど述べた $\text{adari}(\text{pal})$ が同型 $\text{ARI}_{\text{al/al}} \rightarrow \text{ARI}_{\text{al/il}}$ をもたらず, という事実は一般の flexion unit の枠組みで述べられます.

定理 7.2 (Dimorphic transportation の double shuffle 版; [Ka2]). 二つの Lie 代数射 $\text{adari}(\mathfrak{ess}), \text{adari}(\mathfrak{ëss})$ はともに同型 $\text{ARI}_{\text{al/al}} \rightarrow \text{ARI}_{\text{al/ol}}$ を与える²⁴.

先ほど述べた $\text{adari}(\text{pal})$ が同型をもたらずことは, もちろんこの定理で polar units $(\mathfrak{E}, \mathfrak{D}) = (\text{Pa}, \text{Pi})$ を考えて得られる帰結なわけですが, 一方でもうひとつの同型 $\text{adari}(\mathfrak{ess}) = \text{adari}(\text{par})$ があることも主張されています. 今回の研究では, Brown の同型 χ_B はこの $\text{adari}(\text{par})$ と本質的に一致することが分かりました.

定理 7.3 ([Ka3]). 二つの写像 χ_B と $\text{anti} \circ \text{swap} \circ \text{adari}(\text{par}) \circ \text{swap} \circ \text{anti}$ は, 非可換冪級数への言い換え ma^{-1} を除いて一致する.

²²この列 $\{\varepsilon_r\}_r$ には Kostzul 数という名前があるそうです. ご教示いただいた古庄英和先生に感謝申し上げます.

²³Ecalte の論文では, この“素材になる unit を共役に取り換える”操作を syap と書いています: たとえば $\text{syap}(\mathfrak{ess}) = \mathfrak{oess}$, $\text{syap}(\mathfrak{o}_3) = \mathfrak{e}_3$ など.

²⁴ \mathfrak{E} から作った写像ですが, 値域の swap 側は \mathfrak{D} -alternat になっていることに注意してください. 今回は使いませんが, $(\mathfrak{E}, \mathfrak{D})$ を逆向きに取り換えるとももちろん $\text{adari}(\mathfrak{oess})$ などが $\text{ARI}_{\text{al/ol}}$ (swap 側が \mathfrak{E} -alternat になっている) への同型になっていることもいえます.

この証明には *dilator* と呼ばれる道具を用います。紙面の都合上割愛せざるを得ませんでしたが, secondary bimoulds の構成に用いた “副代数群 $\text{GARI}_{\mathfrak{sc}}$ ” の理論とも深くかかわる, きわめて useful な道具です。この *dilator* の理論を用いることで, [KT] で考えられた

「Brown 同型の構成に用いた有理関数 ψ_0 を別のものに取り換える」

という戦略もまた flexion 理論に持つてくることができます。少しだけ触れると, bimould $B \in \text{MU}$ の gari-dilator $\text{di}(B) \in \text{LU}$ が等式

$$rB(w_1 \cdots w_r) = \text{preari}(B, \text{di}(B))(w_1 \cdots w_r)$$

によって帰納的に定まり, Brown の ψ_0 は $2\text{di}(\text{invgari}(\text{par}))$ に一致します。まったく同じ理屈で, ψ_0 の代わりに $2\text{di}(\text{invgari}(\text{pal}))$ を使えば $\text{adari}(\text{pal})$ をこの方法で作ることもできます。したがって, χ_B と $\text{adari}(\text{pal})$ のズレは pal と par のズレ, つまり「 \mathfrak{E} からそのまま作るか, \mathfrak{D} から作って swap するか」という違いに帰着されます。残念ながらここはまだあまりよくわかっておらず, gari で比を取ると $\text{GARI}_{\text{as/as}}$ という parity 条件を満たす群に入ることまでしか言えていません。

7.3. Kashiwara–Vergne 側の transportation. ここまでをまとめると, 以下のような Lie 代数の図式になります:

$$\begin{array}{ccc} \text{ARI}_{\text{al}} \cap \text{ARI}_{\text{push/pusnu}} & \text{ARI}_{\text{al}} \cap \text{ARI}_{\mathfrak{E}\text{-push}/\mathfrak{D}\text{-pusnu}} \xrightarrow{=} & \text{ARI}_{\text{al}} \cap \text{ARI}_{\mathfrak{E}\text{-sena}/\mathfrak{D}\text{-pusnu}} \\ \uparrow & & \downarrow \\ \text{ARI}_{\text{al}/\text{al}} & \xrightarrow[\text{adari}(\text{ess}), \text{adari}(\ddot{\text{ess}})]{\simeq} & \text{ARI}_{\text{al}/\text{al}} \end{array}$$

右側の縦列はそれぞれ double shuffle と Kashiwara–Vergne の構造に対応しており, かねてより (flexion 理論と独立に) $\mathfrak{ds}_0 \stackrel{?}{\simeq} \mathfrak{trv}_2$ が期待されていることを考えると, その “状況証拠” として, この図式の上の辺にも $\text{adari}(\text{ess}), \text{adari}(\ddot{\text{ess}})$ という同型があってほしいです。今回の最後の主結果はまさにその同型です。

定理 7.4 ([Ka2]). 写像 $\text{adari}(\text{ess}), \text{adari}(\ddot{\text{ess}})$ はともに Lie 代数の同型 $\text{ARI}_{\text{push}} \simeq \text{ARI}_{\mathfrak{E}\text{-push}}$ をもたらす。

これらの写像が alternal 性を保つことはすでにわかっており²⁵, swap 側の制約条件が pusnu から $\mathfrak{D}\text{-pusnu}$ にうつることも (Ecalte の基本恒等式 [S1, Corollary 2.8.6] を用いて) 示せます。ですから残るは push 不変性と $\mathfrak{E}\text{-push}$ 不変性が互いに移り合うということですが, それが上記定理で保証されます。証明は以下の等式に帰着されます。

定理 7.5 ([Ka2, Theorem 6.6]). 任意に $B \in \text{LU}$ および $S \in \{\text{ess}, \ddot{\text{ess}}\}$ をとり, $B' := \text{adari}(S)^{-1}(B)$ とおけば

$$\mu(\text{swap}(S), \text{swap}(B' - \text{push}^{-1}(B'))) = \mu(\text{gari}(B - \mathfrak{E}\text{-push}^{-1}(B)), S)$$

が成り立つ。

8. 残された課題

まだできていないことがいくつもあります。その中でもとくに筆者の重要だと思う問題をいくつかこの節に挙げ, 本稿を締めくくりたく思います。

²⁵より一般に symmetrally な $S \in \text{MU}$ に対して $\text{adari}(S)$ は ARI_{al} を保ちます。

8.1. **Kimura–Tasaka の予想.** たとえば [KT, 予想 3.5] では, Brown と同じ構成で Lie 代数射 χ_ψ をつくった²⁶場合にそれが同型 $\mathfrak{ls}_0 \simeq \mathfrak{ds}_0$ をもたらす条件が予想されています. Flexion 理論に持つてくると次のようになるでしょうか.

予想 8.1. $B \in \text{GARI}$ をとる. このとき, $\text{adari}(B)$ が同型 $\text{ARI}_{\text{al}/\text{al}} \simeq \text{ARI}_{\text{al}/\text{ol}}$ をもたらすことは, B の長さ 1 部分が \mathfrak{e} であって, かつ $B \in \text{GARI}_{\text{as}/\text{as}}$ となることと同値であろう.

もちろん, 定理 7.4 が成り立っていることを考えれば, 同様の予想を Kashiwara–Vergne 側で考えることにも意味がありそうです.

8.2. **Double shuffle = Kashiwara–Vergne か?** さらに, 先ほども少しだけ触れました同型予想

$$\text{trv}_2 \stackrel{?}{\simeq} \mathfrak{ds}_0$$

は, dimorphic transportation で線型版に持つてくることで

$$\text{ARI}_{\text{al}} \cap \text{ARI}_{\text{push}/\text{pusnu}} \stackrel{?}{\simeq} \text{ARI}_{\text{al}/\text{al}}$$

という問になります. 右から左への包含はすでに言っているので逆向きがほしい状況ですが, すこし計算をすることで左辺は次の空間に含まれていることがわかります: alternal 条件をゆるめた

$$\text{空でない列 } w, w' \text{ のどちらかが長さ 1 ならば } A(w \text{ III } w') = 0$$

という monomorphism を al^{weak} と書きますと

$$\text{ARI}_{\text{al}} \cap \text{ARI}_{\text{push}/\text{pusnu}} \subseteq \text{ARI}_{\text{al}/\text{al}}^{\text{weak}}$$

となります²⁷. ここでなんと, [E3, §6.7, Lemma 1] において

$$\text{al}/\text{al} \text{ と } \text{al}/\text{al}^{\text{weak}} \text{ は同値である}$$

という記述を発見できます. しかし, (他の論文や資料も可能な範囲ですべて確認しましたが) 証明は書かれておらず, 解明が待たれるところです. 何にせよ, dimorphic transportation という道具を用いることで, “double shuffle と Kashiwara–Vergne の関係” という数論的にも Lie 理論的にも興味深い問題が, 比較的簡単に²⁸述べられる組合せ論的問題に帰着されるのは面白い現象のように思えます.

8.3. **ほかの flexion units.** 今回は研究のほとんどを一般的な flexion unit に対して行っており, 具体的な例を取って応用を確認できたのは今のところ polar units (Pa, Pi) のみです. しかし, [Ba, Examples 5,6] で触れられているように, ほかの flexion units の具体例, とくに “定義にすこしズレの出る場合” を考察することもまた極めて重要なように思えます. 多重ゼータ値の世界では shuffle 積や stuffle 積 (調和積) のほかにもさまざまな積構造, block shuffle や各種 t -interpolation ならびに q 類似など, が考えられていますが, こういったものも母関数を取ることで flexion units による制御が効くのでしょうか?

8.4. **Double shuffle 群の torsor.** Lie 代数 \mathfrak{ds}_0 が double shuffle 群 DS_0 の対数であったように, flexion の世界でも $\text{expari}: \text{ARI}_{\text{al}/\text{ol}} \rightarrow \text{GARI}_{\text{as}/\text{os}}$ となります. DS_0 はいわば

$$\text{double shuffle 関係式を満たす多重ゼータ値のようなものたちの集まり, ただし } \zeta(2) \text{ にあたるものは } 0$$

という説明ができ, この後者の「 $\zeta(2) = 0$ 」を省いた集合 DS には DS_0 が推移的に, しかも自由に作用します. このことは flexion 側だと, $\text{GARI}_{\text{as}/\text{is}}$ が $\text{GARI}_{\text{as}/\text{is}}$ に (より大きな群 GARI の中の積 gari によって) 作用している, という形になります. さてこれを dimorphic transportation で units に依存

²⁶オリジナルのものが $\chi_B = \chi_{\psi_0}$ に相当.

²⁷手で計算してみたところ, これの右辺の元がすべて push 不変であることは確認できましたが, swap 側が pusnu かどうかはまだ確認がありません.

²⁸Flexion units に依存しない現象になっているのも何気に凄いところです.

しない形に引っ張って来れば²⁹, $\text{GARI}_{\text{as/as}}$ が parity 条件付きの群 $\text{GARI}_{\text{as/as}}$ によって統制される, という形になりそうです. このことについては, 実はより強い等式

$$\text{GARI}_{\text{as/as}} = \text{gari} \left(\bigcup_{\mathcal{E}: \text{flexion unit}} \{\mathcal{E}\mathcal{S}\mathcal{S}\}, \text{GARI}_{\text{as/as}} \right)$$

が Ecalle によって主張されています [E1, §2.8]. [E2, §8] によれば, 素直な構成, つまり左辺の元 S に対して $\text{neg}(S) - S$ の長さ 1 成分を flexion unit として採用し, そこから secondary bimould を作ることで右辺の分解に至るそうです. Double shuffle 群や Grothendieck–Teichmüller 群, Kashiwara–Vergne 群の torsor の研究はたくさん積み重ねられていますが, 非可換冪級数の世界でこれに対応する事実が何かはなかなか想像が付きません.

8.5. ほかの群, Lie 代数との関係. 本稿の主題がそうだったように, double shuffle と Kashiwara–Vergne という二つの Lie 代数構造 (群もですが), およびその線型化は flexion 理論による解釈を持つのでした. これらとの一致が期待されているほかの構造として, Grothendieck–Teichmüller grt_1 や motivic Galois $\text{gal}^M(\mathbb{Z})$, double shuffle の “adjoint 版”, 形式的有限多重ゼータ値の双対, など様々なものがあります. このうち grt_1 については, [FHK] においてその exp にあたる GT 群およびその torsor である associator set が flexion の文脈に持ち込まれています. 同論文では, [F] による埋め込み $\text{grt}_1 \hookrightarrow \mathfrak{d}_{\mathcal{S}_0}$ の証明をなぞる形で flexion 側で対応する埋め込みを作っています. また, [Br] では $\text{gal}^M(\mathbb{Z})_1$ の生成元に対応する (かもしれない) $\mathfrak{d}_{\mathcal{S}_0}$ の元の系列 $\{\psi_{2n+1}\}_{n \geq 1}$ が構成されており, これは flexion の言葉でいうと, flexion unit ごとに構成される “singulator” という写像 $\text{seng}(\mathcal{E}\mathcal{S})$ を polar unit から作ったときの monomial の像になっています. このあたりのことからいくつも疑問が浮かびます:

- (1) [FHK] で作られた GT 群の対応物 $\text{GARI}_{\text{as+bal}}$ の Lie 代数の線型化版はどうなるのでしょうか? 同型予想が正しければそこにも dimorphic transportation があるはずですが.
- (2) 埋め込み $\text{grt}_1 \hookrightarrow \mathfrak{d}_{\mathcal{S}_0}$ にはもうひとつの証明 [EF1] がありますが, この手法にも flexion variant があるのでしょうか?
- (3) Singulator からは Brown の解 ψ_{2n+1} に限らず, (polar unit の場合であっても) さまざまな dimorphic element を作ることができます. ここに幾何的な意味づけができるのでしょうか?
- (4) Double shuffle の adjoint 版 adDmr_0 を flexion によって捉える試みが [A] によって進められていますが, これを一般の flexion unit で再現できるのでしょうか? 手元で計算してみると, 対称多重ゼータ値の母関数にあたるものは Ecalle の composition unit I を用いて $\text{garit}(\text{Zag})(I)$ と書けるようです.
- (5) $\text{GARI}_{\text{as+bal}}$ と $\text{GARI}_{\text{as/is}}$ はそれぞれ, 多重ゼータ値の associator relation と double shuffle relation (の退化版) に対応します. では, ほかの関係式族に対して対応する flexion 的な群や Lie 代数を作れるのでしょうか? 所謂 “全関係式” と思われているものたち³⁰は予想が正しければ $\text{GARI}_{\text{as/is}}$ などに一致するはずですが, そういうものにも今回の Kashiwara–Vergne Lie 代数のように dimorphic transportation を作れるのでしょうか?
- (6) [HK] の (s, t) -adic duality は母関数で述べるとぴったり Kashiwara–Vergne 方程式 (KV1) の非退化版になっています. 同定理は Drinfel’d associator の 2-cycle, 3-cycle relation を用いて導出されていますが, senary relation を多重ゼータ値のほうに持ってきたとき, この (s, t) -adic の双対性や 3-cycle relation とどう関係するのでしょうか?
- (7) GT 群と KV 群については, “高種数版” がそれぞれ [T], [AKKN] で考察されています. これらに対応する $\text{GARI}_{\text{as+bal}}$ や $\text{expari}(\text{ARI}_{\text{senu/pusinu}})$ の一般化はどうなるのでしょうか? あるいは

²⁹もちろん dimorphic transportation は parity 条件が付いていないと機能しないので, heuristic な発想でしかありません.

³⁰Kawashima relation や Kaneko–Yamamoto relation (積分級数等式) などを想定しています. もし confluence relation の対応物が作れたならば $\text{GARI}_{\text{as+bal}}$ と一致するはずですが.

ARI_{al/ii} の高種数版を作れてしまったりするのでしょうか? (flexion の中だけでできてしまったら凄そうです.)

謝辞

講演の機会をくださった大野泰生先生ならびに関真一朗先生, この文章の原稿をお読みいただいて有益なコメントを数多くくださった古庄英和先生に深く感謝いたします. また, 講演の準備にご協力くださった大山口菜都美先生に深謝いたします.

REFERENCES

- [AKKN] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, *Higher genus Kashiwara-Vergne problems and the Goldman-Turaev Lie bialgebra*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **355** (2017), 123–127.
- [AT] A. Alekseev and C. Torossian, *The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld’s associators*, Ann. of Math. **175** (2012), 415–463.
- [A] T. Anzawa, *A Lie algebra associated with adjoint multiple zeta values*, preprint, [arXiv:2511.03177](https://arxiv.org/abs/2511.03177).
- [Ba] H. Bachmann, *Flexion units*, notes for Kagoshima mould theory seminar, 2025.
- [Br] F. Brown, *Anatomy of an associator*, preprint, [arXiv:1709.02765](https://arxiv.org/abs/1709.02765).
- [E1] J. Ecalle, *The flexion structure and dimorphy: flexion units, singulators, generators, and the enumeration of multizeta irreducibles*, in Asymptotics in dynamics, geometry and PDEs; generalized Borel summation. Vol. II, 27–211, CRM Series, 12, Ed. Norm. , Pisa, 2011.
- [E2] J. Ecalle, *Eupolars and their bialternality grid*, Acta Math. Vietnam. **40** (2015), 545–636.
- [E3] J. Ecalle, *The scrambling operators applied to multizeta algebra and singular perturbation analysis*, Algebraic combinatorics, resurgence, moulds and applications (CARMA). Vol. 2, 133–325, IRMA Lect. Math. Theor. Phys. , 32, EMS Publ. House, 2020.
- [EF1] B. Enriquez and H. Furusho, *The Betti side of the double shuffle theory. II. Double shuffle relations for associators*, Selecta Math. (N. S.) **29** (2023), art. 3.
- [EF2] B. Enriquez and H. Furusho, *Double shuffle Lie algebra and special derivations*, preprint, [arXiv:2505.02265](https://arxiv.org/abs/2505.02265).
- [F] H. Furusho, *Double shuffle relation for associators*, Ann. of Math. **174** (2011), 341–360.
- [FHK] H. Furusho, M. Hirose and N. Komiyama, *Associators in mould theory*, preprint, [arXiv:2312.15423](https://arxiv.org/abs/2312.15423).
- [FK] H. Furusho and N. Komiyama, *Kashiwara-Vergne and dihedral bigraded Lie algebras in mould theory*, Ann. Fac. Sc. Toulouse **32** (2023), 655–725.
- [HK] M. Hirose and H. Kawamura, *On a lifting of t -adic symmetric multiple zeta values*, Res. Number Theory **11** (2025), art. 64.
- [Ka1] H. Kawamura, *A note on flexion units*, preprint, [arXiv:2506.22825](https://arxiv.org/abs/2506.22825).
- [Ka2] H. Kawamura, *Ecalle’s senary relation and dimorphic structures*, preprint, [arXiv:2509.21252](https://arxiv.org/abs/2509.21252).
- [Ka3] H. Kawamura, *Ecalle’s dimorphic transportation and Brown’s lifting*, preprint, [arXiv:2601.17424](https://arxiv.org/abs/2601.17424).
- [Ko1] N. Komiyama, *On properties of adari(pal) and ganit(pic)*, preprint, [2110.04834](https://arxiv.org/abs/2110.04834).
- [Ko2] N. Komiyama, *Mould の集合と非可換べき級数環の間の代数的な対応について*, RIMS 講究録 **2238**, art. 3.
- [KT] A. Kimura and K. Tasaka, *複シャッフル方程式の解の構成について*, RIMS 講究録 **2238**, art. 7.
- [RS] E. Raphael and L. Schneps, *On linearised and elliptic versions of the Kashiwara-Vergne Lie algebra*, preprint, [arXiv:1706.08299](https://arxiv.org/abs/1706.08299).
- [S1] L. Schneps, *ARI, GARI, Zig and Zag: An introduction to Écalle’s theory of multiple zeta values*, preprint, [arXiv:1507.01534v4](https://arxiv.org/abs/1507.01534v4).
- [S2] L. Schneps, *The double shuffle Lie algebra injects into the Kashiwara-Vergne Lie algebra*, preprint, [arXiv:2504.14293](https://arxiv.org/abs/2504.14293).
- [T] H. Tsunogai, *The stable derivation algebras for higher genera*, Israel J. Math. **136** (2003), 221–250.

(Hanamichi Kawamura) DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE, 1-3 KAGURAZAKA, SHINJUKU-KU, TOKYO, 162-8601, JAPAN
Email address: 1125512@ed.tus.ac.jp