DOUBLE SHUFFLE 群の新たな性質

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
古庄　英和
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, NAGOYA UNIVERSITY
HIDEKAZU FURUSHO

Abstract. 本稿では、Racinet ([Ra]) によって多重ゼータ値の double shuffle 関係式を用いて定式化された double shuffle 群の枠組みを概説し、Enriquez 氏との共同研究 [EF25] によって得られたこの群の新たな性質と、それに関連する最近の展開について報告する。

1. 背景

本研究の背景には、相互に深い関連をもつ 4 つの群 $\mathsf{Gal}^{\mathcal{M}}_{\mathsf{dR}}(\mathbb{Z})^{\mathsf{unip}}_{\mathbb{Q}}$, GRT_1, DMR_0, KRV が存在する。それぞれの群は、出自や構成の観点から見れば全く異なる分野に由来するものであるが、これらは全て同型であると期待されている。各群の定義およびそれらの間の関係についての詳細は、文献 [F14] を参照されたい。

1.1. 四群.

Motivic Galois 群 $\mathsf{Gal}^{\mathcal{M}}_{\mathsf{dR}}(\mathbb{Z})^{\mathsf{unip}}_{\mathbb{Q}}$: Deligne-Goncharov [DeG] によって構成された $\mathbb{Z}$ 上の（全ての有理素点で不分岐な）混合 Tate 型モチーフの淡中圏において、de Rham 実現により定まるファイバー関手の自己同型群の冪単部分として定義される (cf. [De] も参照)。これは $\mathbb{Q}$ 上の冪単な副代数群である。

Grothendieck-Teichmüller 群 GRT_1: Drinfeld [Dr] により導入されたこの群は、ある種の $\mathbb{Q}$ 上の冪単な副代数群である。この論文においては、これに関連してもう一つの副代数群 GT_1 が構成されている。これに対して、GRT_1 はその「次数付き (graded)」版に相当する群であり、言い換えれば GT_1 の次数付き化（graded version）として定義されるものである。そのため、この群には「graded Grothendieck-Teichmüller 群 $gr\mathsf{GT}_1$」を意味する名称 GRT_1 が与えられている (cf. [FKN])。これらの群は、五角形関係式および二つの六角形関係式から

Date: February 2, 2026.
多重ゼータ値の諸相 2025 講究録原稿.

なるアソシエーター関係式を満たすことによって特徴付けられるが、[F10] にてその定義は五角形関係式のみによって与えられることが示されている。なお、右下についている 1 についてだが GRT_1 がより大きな群 GRT から乗法群 $\mathbb{G}_m$ への全射準同型に対する元 1 の逆像であることに由来している。

Double shuffle 群 DMR_0**:** Racinet [Ra] によって導入された群であり、その名称はフランス語"double mélange et régularisation" に由来している。この群は多重ゼータ値が満たす正規化 double shuffle 関係式を modulo π^2 して考えた関係式で定義された $\mathbb{Q}$ 上の冪単な副代数群である。右下についている添字 0 についてだが、正規化 double shuffle 関係式の解集合であるより大きな集合 DMR から affine 直線 $\mathbb{A}^1$ への全射写像に対して、DMR_0 は元 0 の逆像として定義されることに由来している。

Kashiwara-Vergne 群 KRV**:** Campbell-Baker-Hausdorff 級数に関連する Kashiwara-Vergne 予想の解集合に対して導入された群であり、Alekseev-Torossian [AT] により導入された $\mathbb{Q}$ 上の冪単な副代数群である。Alekseev-Enriquez-Torossian [AET] ではより体系的に定式化されている。さらに論文 [AET] においては、これと密接に関連するもう一つの副代数群 KV が構成されており、構造上 KRV は KV の「次数付き版 (graded version)」に相当する。ここで記号 KRV に含まれるローマ字 R は、単に上述の Drinfeld による次数付き Grothendieck-Teichmüller 群 GRT_1 における R と整合させるために付されたものであり、特定の人物名に由来するものではないことを付記しておく。本稿の KRV は、便宜上、文献 [AT] における KRV_2 の次数 1 の部分が 0 になる部分に制限したものとしている。

1.2. 相互関係.

(i) Brown [Br] は射影直線引く 3 点の motivic 基本群 $\pi_1^{\mathcal{M}}(\mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, \vec{01})$ には、motivic Galois 群 $\mathsf{Gal}^{\mathcal{M}}_{\mathsf{dR}}(\mathbb{Z})^{\mathsf{unip}}_{\mathbb{Q}}$ が忠実に作用することを示した。この作用は GRT_1 の幾何学的な定義関係式と整合しており、このことから埋め込み $\mathsf{Gal}^{\mathcal{M}}_{\mathsf{dR}}(\mathbb{Z})^{\mathsf{unip}}_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathsf{GRT}_1$ が自然に構成される。

(ii) 五角形関係式と shuffle 積から正規化 double shuffle 関係式が従うことが [F11] にして示されており、これにより自然な埋め込み $\mathsf{GRT}_1 \hookrightarrow \mathsf{DMR}_0$ が得られる。この埋め込みについては、その後 Enriquez との共同研究 [EF23] においても別証明が与えられている。さらに、Hirose-Sato [HS] によって合流

関係式と呼ばれる多重ゼータ値の新たな関係式が導入され、合流関係式から正規化 double shuffle 関係式が導かれることが示されている。一方で [F22] にて、合流関係式と五角形関係式とが同値であることが証明されているため、これらを組み合わせることで、$\mathsf{GRT}_1 \hookrightarrow \mathsf{DMR}_0$ の埋め込みに対する別の証明が得られることになる。これに加えて、[F11] に近い議論での mould 理論の枠組みでの証明が [FHK] にも与えられている。

(iii) まず、Alekseev-Torossian [AT] および Alekseev-Enriquez-Torossian [AET] により、埋め込み $\mathsf{GRT}_1 \hookrightarrow \mathsf{KRV}$ が構成されている。その後、Schneps [S12] は、Ecalle [Ec11] によって証明なしで述べられていた「集合 $\mathsf{ARI}_{\underline{al}/\underline{il}}$ に属する mould は、同論文の式 (3.64) で与えられるいわゆる senary 関係式を満たす」という主張を仮定することにより、埋め込み $\mathsf{DMR}_0 \hookrightarrow \mathsf{KRV}$（より正確には、それぞれに付随する Lie 代数の間の単射な Lie 準同型）を構成した。昨年 (2025 年) 春、この仮定に依存しない形での埋め込みの証明が、Schneps [S25]、及び著者と Enriquez [EF25] により互いに独立かつ全く異なる方法で、ほぼ同時期に与えられた。さらに、その数ヶ月後には Kawamura [Ka] によって、Ecalle の上記の主張に対して mould 理論を用いた証明が与えられた。

以上で述べた結果を整理すると、4 つの群の間には次のような連鎖的な埋め込みが存在する：

$$\mathsf{Gal}^{\mathcal{M}}_{\mathsf{dR}}(\mathbb{Z})^{\mathsf{unip}}_{\mathbb{Q}} \overset{(i)}{\hookrightarrow} \mathsf{GRT}_1 \overset{(ii)}{\hookrightarrow} \mathsf{DMR}_0 \overset{(iii)}{\hookrightarrow} \mathsf{KRV} \tag{1.1}$$

これらの群は出自の異なる理論から現れながら緊密に結びついており、4 つの群が本質的に一致するかどうかは現在も未解決である。一致すれば背景の理論間の強い繋がりを示唆する一方、一致しない場合でもその「ずれ」を通じて各分野固有の新たな構造が現れ新たな展開が起きることも期待される。

次節で紹介する Enriquez 氏との共同研究 [EF25] における主結果は、

- DMR_0 の惰性群保存 (inertia-preserving) 性
- DMR_0 上に新たに定義される対合写像 Θ の構成

である。1 番目の性質から埋め込み $\mathsf{DMR}_0 \hookrightarrow \mathsf{KRV}$ が構成される。この結果を通じて、上記に述べた 4 つの群の間の関係の構造的理解が深まることを期待している。

2. Double shuffle 群

2.1. **Racinet の formalism.** Racinet [Ra] の論文はフランス語で執筆されていることも一因となってか、日本国内では必ずしも広く読まれているとは言い難い。そのため本稿では、後に用いる議論の基盤として、この論文で導入される formalism と double shuffle 集合の構成について少々詳しく解説することにする。

Double shuffle 集合 DMR とは Racinet ([Ra]) により導入された非可換形式的冪級数環の部分集合であり多重ゼータ値の満たす正規化 double shuffle 関係式より定められる。この定義を説明するためにいくつか記号を準備する：$\mathfrak{f}_2$ を e_0, e_1 で生成された自由 $\mathbb{Q}$-リー代数とする。この普遍包絡代数の e_0, e_1 による次数完備化 $\widehat{U\mathfrak{f}_2}$ には自然に Hopf 代数の構造が入る。これの余積を Δ とおく。この余積 Δ は

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + 1 \otimes e_i \qquad (i = 0, 1)$$

で与えられる代数準同型写像である。$\mathbb{Q}$-代数として $\widehat{U\mathfrak{f}_2}$ は非可換形式的冪級数代数 $\mathbb{Q}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$ と同一視される。Racinet の記号に従ってこれを $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$ と記すことにする。次に、$\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を生成元とする非可換多項式環 $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ の $\deg Y_k = k$ による次数完備化を $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$ とし、各 $n \geqslant 1$ に対して

$$\Delta_*(Y_n) := Y_n \otimes 1 + 1 \otimes Y_n + \sum_{i+j=n} Y_i \otimes Y_j \qquad (n \geq 1)$$

で定まる代数準同型写像 Δ_* で余積を入れることにより $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$ に Hopf 代数の構造が入る。$\mathbb{Q}$-線形な全射 $\pi_Y : \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \twoheadrightarrow \mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$ を各語 W に対して

$$\pi_Y(W) := \begin{cases} (-1)^r Y_{k_1} \cdots Y_{k_r} & (W = e_0^{k_1-1}e_1 \cdots e_0^{k_r-1}e_1), \\ 0 & (W : \text{その他}) \end{cases}$$

と定めると、これは全射であるが Hopf 代数準同型ではない。各 $g \in \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$ に対して

$$g_{\mathrm{corr}} := \exp\left(\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\langle g | e_0^{k-1}e_1\rangle}{k} Y_1^k\right),$$
$$g_* := g_{\mathrm{corr}} \cdot \pi_Y(g) \in \mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$$

とおく。ここで $\langle g|e_0^{k-1}e_1\rangle$ とは g の $e_0^{k-1}e_1$ の係数のことである。この準備のもとで、Racinet の double shuffle 集合は次のように定義される。

Definition 1 ([Ra]). Double shuffle 集合 DMR とは次の条件

- $\Delta(g) = g \otimes g$
- $\Delta_*(g_*) = g_* \otimes g_*$

- $\langle g|e_0\rangle = \langle g|e_1\rangle = 0$

を満たす可逆な非可換形式的冪級数 $g = g(e_0, e_1) \in \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle^\times$ のなす集合のことである。

各 $\mu \in \mathbb{Q}$ に対して係数条件

$$\langle g|e_0e_1\rangle = \frac{\mu^2}{24}$$

を満たす DMR の部分集合を DMR_μ と記すことにする。

すなわち、g はまず $\mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$ における群的条件 $\Delta(g) = g \otimes g$ を満たすことが要求されている。これは g の各語の係数がシャッフル積を満たす条件に対応している。この条件は $g \in \exp(\widehat{\mathfrak{f}_2})$ であることとも同値である。さらに π_Y と補正項 g_{corr} を用いて得られる g_* が $\mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$ における群的条件 $\Delta_*(g_*) = g_* \otimes g_*$ となることが課されている。これは $g_* \in \mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$ の各語の係数が調和積を満たす条件に対応している。最後の一次の項に関する条件は、この g が $\exp(\widehat{\mathfrak{f}_2})$ の交換子群に属することを意味する。

Example 2. KZ (Knizhnik-Zamolodchikov) 方程式の二つの基本解の比を取ることにより Drinfeld [Dr] が **KZ アソシエーター**と呼ばれる非可換形式的冪級数 $\varPhi_{\mathrm{KZ}} \in \mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$ を構成している (cf. [FK, 付録 A])。これの各係数には多重ゼータ値

$$\zeta(k_1, \ldots, k_m) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_m} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_m^{k_m}} \qquad (k_1, \ldots, k_{m-1} > 0, k_m > 1)$$

が以下のように現れる (cf. [LM], [F03])：

$$\varPhi_{\mathrm{KZ}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_{m-1}>0 \\ k_m>1}} (-1)^m \zeta(k_1, \ldots, k_m) e_0^{k_m-1}e_1 \cdots e_0^{k_1-1}e_1 + (\text{regularized terms})$$

ここで“regularized terms”と記した部分は、語として e_1 で始まるか e_0 で終わる語に対応する項を集めたものであり、その係数の具体的な表示は [F03, Proposition 3.2.3] によって与えられている。$g = \varPhi_{\mathrm{KZ}}$ に対してはガンマ関数 $\Gamma(z)$ の原点での Taylor 展開と Euler 定数 γ を用いて $g_{\mathrm{corr}} = e^{-\gamma Y_1}\Gamma(1+Y_1)^{-1}$ とかける。この形式的冪級数 $\varPhi_{\mathrm{KZ}}$ の係数として現れる多重ゼータ値が正規化 double shuffle 関係式を満たしている。さらに上述の DMR の定義式が [IKZ] 流の正規化 double shuffle 関係式と同値であることから (cf. [BY])、$\varPhi_{\mathrm{KZ}}$ が DMR の元を定めていることが従う。正確にはここで基礎体を $\mathbb{Q}$ でなく $\mathbb{C}$ で考え $\mu = 2\pi\sqrt{-1}$ としたときに $\varPhi_{\mathrm{KZ}}$ が DMR_μ の元を与えているということである。

Theorem 3 ([Ra]). (1) 冪級数 $g_1, g_2 \in \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle^\times$ に対して

$$g_2 \circledast g_1 := g_1\big(g_2 e_0 g_2^{-1},\, e_1\big) \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1\big(e_0,\, g_2^{-1} e_1 g_2\big)$$

と定めると、この演算 $\circledast$ により $\mu = 0$ の場合の集合 DMR_0 は非可換群の構造をもつ。すなわち、DMR_0 は単位元を持ち、各元に逆元が存在し、かつ $\circledast$ に関して結合的である。**Double shuffle 群**とは、この群構造を備えた集合 DMR_0 のことである。

(2) さらに、任意の $\mu \in \mathbb{Q}^\times$ に対して、同じ演算 $\circledast$ を用いることにより、DMR_μ は左 DMR_0-*torsor* の構造を持つ。即ち $\circledast$ により群 DMR_0 の左作用

$$\mathsf{DMR}_0 \times \mathsf{DMR}_\mu \longrightarrow \mathsf{DMR}_\mu$$

が定まり、さらにこの作用は自由かつ推移的である。**Double shuffle torsor** とは、この DMR_0-*torsor* 構造を備えた集合 DMR_μ のことである。

[Ra] では群 DMR_0 に対応する次の Lie 代数 $\mathfrak{dmr}_0$ も構成されている。

Definition 4 ([Ra]). **Double shuffle Lie 代数** $\mathfrak{dmr}_0$ とは次の条件

- $\Delta(\psi) = \psi \otimes 1 + 1 \otimes \psi$
- $\Delta_*(\psi_*) = \psi_* \otimes 1 + 1 \otimes \psi_*$
- $\langle \psi | e_0 \rangle = \langle \psi | e_1 \rangle = 0$
- $\langle \psi | e_0 e_1 \rangle = 0$

を満たす非可換形式的冪級数 $\psi = \psi(e_0, e_1) \in \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$ のなす集合のことである。ここで先述と混同する記号を用いてしまうが

$$\psi_{\mathrm{corr}} := \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\langle \psi | e_0^{k-1} e_1 \rangle}{k} Y_1^k, \qquad \psi_* := \psi_{\mathrm{corr}} + \pi_Y(\psi) \in \mathbb{Q}\langle\langle Y\rangle\rangle$$

とおいている。

この ψ に最初に課されている Lie 的条件 $\Delta(\psi) = \psi \otimes \psi$ は $\psi \in \widehat{\mathfrak{f}_2}$ であることと同値になる。

$\mathfrak{dmr}_0$ には以下の方法で Lie 括弧積を入れることにより Lie 代数の構造が入る。

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle := [\psi_1, \psi_2] + d_{\psi_1}(\psi_2) - d_{\psi_2}(\psi_1) \tag{2.1}$$

ここで d_ϕ は $e_0 \mapsto 0$, $e_1 \mapsto [e_1, \phi]$ で定まる微分である。

2.2. **主結果.** 主結果を説明するために記号 $e_\infty := -e_0 - e_1$ を準備する。また $g \in \exp\widehat{\mathfrak{f}_2}$ に対して $\exp\widehat{\mathfrak{f}_2}$ の自己同型 σ_g を $\exp(e_0) \mapsto g \cdot \exp(e_0) \cdot g^{-1}$, $\exp(e_1) \mapsto \exp(e_1)$ で定める。

Theorem 5 ([EF25])**.** (1) 任意の $g \in \mathsf{DMR}_0$ に対して σ_g は惰性群保存的 *(inertia-preserving)* である、即ち、ある

$$h \in \mathcal{G} := \{g \in \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle^\times \mid \Delta(g) = g \otimes g, \langle g|e_0\rangle = \langle g|e_1\rangle = 0\}$$

が一意に存在して

$$g^{-1}e_0 g + e_1 + h^{-1}e_\infty h = 0$$

が成り立つ。このときこの $h(e_\infty, e_1)$ は DMR_0 に属す。さらに対応

$$\Theta : g \mapsto h(e_\infty, e_1)$$

により群 DMR_0 の自己同型として対合写像が定まる。すなわち $\Theta_0(g_1 \circledast g_2) = \Theta_0(g_1) \circledast \Theta_0(g_2)$ が成り立つ。

(2) *Lie* 代数 $\mathfrak{dmr}_0$ に対しても上と同様な主張が成り立つ. すなわち、任意の $\alpha \in \mathfrak{dmr}_0$ に対して, ある

$$\beta \in \mathsf{Lie}\mathcal{G} := \{g \in \mathbb{Q}\langle\langle X\rangle\rangle \mid \Delta(g) = g \otimes 1 + 1 \otimes g, \langle g|e_0\rangle = \langle g|e_1\rangle = 0\}$$

が一意に存在して

$$[e_0, \alpha] + [e_\infty, \beta] = 0 \tag{2.2}$$

とできる。このとき、形式的 *Lie* 級数 $\beta(e_\infty, e_1)$ は $\mathfrak{dmr}_0$ に属す。さらに対応

$$\theta : \alpha \mapsto \beta(e_\infty, e_1)$$

により *Lie* 代数 $\mathfrak{dmr}_0$ の自己同型として対合写像が定まる。すなわち $\theta(\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle) = \langle\theta(\alpha_1), \theta(\alpha_2)\rangle$ が成り立つ。

論文 [EF25] は現在改訂中であり、上記の結果を bitorsor の枠組みで展開する予定である。Schneps は [S12] において $\mathfrak{dmr}_0$ の各元 α に対してある適切な Lie 級数 γ が取れて

$$[e_0, \gamma] + [e_1, \alpha(e_\infty, e_1)] = 0 \tag{2.3}$$

とできることを仮定し、この仮定のもとで double shuffle Lie 代数 $\mathfrak{dmr}_0$ から Kashiwara-Vergne 群の Lie 代数 $\mathfrak{krv}$ への埋め込み

$$\mathfrak{dmr}_0 \hookrightarrow \mathfrak{krv} \tag{2.4}$$

を構成している (詳細は [FK] も参照されたい)。この式(2.3)は Kashiwara-Vergne Lie 代数 $\mathfrak{krv}$ を特徴付ける第 1 の定義関係式とみなすことができて、パラメータの取り方を適切に変えることで、式 (2.2)と同値であることも確認できる。この関係式(2.3)は Ecalle により一般に mould 理論の枠組みで senary 関係式 (cf. 文献 [Ec11,

(3.64)]) として定式化されている。文献 [Ec11] では double shuffle Lie 代数 $\mathfrak{dmr}_0$ に対応する mould の空間 $\mathsf{ARI}_{\underline{al}/\underline{il}}$ の任意の元が senary 関係式を満たすという主張が述べられているが、そこでは証明の方針が示唆されるにとどまり、詳細な証明は提示されていない。その後、Schneps [S25] は、$\mathfrak{dmr}_0$ の元に対して式(2.3)が無条件に成立することを示した。Schneps の(2.3)の証明も、本稿の主定理における式(2.2)の証明も、いずれも Ecalle が提示した方針とは異なり互いに別個の観点から得られたものである。さらに、その後、Ecalle の senary 関係式の mould 理論を用いた証明が、Kawamura [Ka] によって与えられた。

2.3. **対合写像について.** Lie 代数 $\mathfrak{krv}$ は完備自由 Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{f}_2}$ の微分代数 $\mathsf{Der}\widehat{\mathfrak{f}_2}$ の部分 Lie 代数として定義されているという事実と、群の埋め込み鎖(1.1)から、次の Lie 代数の埋め込み鎖が自然に誘導される。

$$\mathsf{LieGal}^{\mathcal{M}}_{\mathsf{dR}}(\mathbb{Z})^{\mathsf{unip}}_{\mathbb{Q}} \overset{(i)}{\hookrightarrow} \mathfrak{grt}_1 \overset{(ii)}{\hookrightarrow} \mathfrak{dmr}_0 \overset{(iii)}{\hookrightarrow} \mathfrak{krv} \hookrightarrow \mathsf{Der}\widehat{\mathfrak{f}_2} \tag{2.5}$$

これらの埋め込み (i)-(iii) は全て同型であることが期待されている。

- まず $\mathfrak{dmr}_0$ への対合写像 θ は $\mathfrak{grt}_1$ にも制限され、その制限は自明な作用になる。これは、任意の $\alpha \in \mathfrak{grt}_1$ の元に対しては
$$[e_0, \alpha(e_0, e_1)] + [e_\infty, \alpha(e_\infty, e_1)] = 0$$
が成り立つことより従う。もし $\mathfrak{grt}_1$ と $\mathfrak{dmr}_0$ が一致することが示されれば θ の $\mathfrak{dmr}_0$ への作用も自明でなければならないが、この点についてはまだ示されていない。
- 次に [AT] において $\mathfrak{krv}$ 上には対合写像 τ が定義されているが、この対合作用に関して $\mathfrak{dmr}_0$ が安定かどうかは現時点では判明していない。一方で、$\mathfrak{grt}_1$ には作用しており、その作用はやはり自明であり、任意の $\alpha \in \mathfrak{grt}_1$ の元に対しては
$$[e_0, \alpha(e_\infty, e_0)] + [e_1, \alpha(e_\infty, e_1)] = 0 \tag{2.6}$$
が成立することからこれが導かれる。
- Lie 代数 $\mathfrak{krv}$ は $\mathsf{Der}\widehat{\mathfrak{f}_2}$ に埋め込まれる。$\mathfrak{f}_2$ の 3 つの生成元 e_0, e_1, e_∞ の入れ替えにより三次対称群 $\mathfrak{S}_3$ の $\mathsf{Der}\widehat{\mathfrak{f}_2}$ への作用が誘導される。このとき e_0 と e_∞ の交換が対合 θ に e_0 と e_1 の交換が対合 τ に対応する。この作用を $\mathfrak{dmr}_0$ と $\mathfrak{krv}$ に制限すると、それぞれ上述の対合 θ と τ が得られる。$\mathfrak{dmr}_0$ が τ に関して安定どうかは現時点では分かっていない。さらに、もし $\mathfrak{grt}_1$ と $\mathfrak{krv}$ が一致することが示されれば τ の $\mathfrak{krv}$ への作用も自明でなければならないが、この点もまだ示されていない。

以上の内容を、各 Lie 代数への作用も含めて整理すると、次のようにまとめられる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathsf{LieGal}^{\mathcal{M}}_{\mathsf{dR}}(\mathbb{Z})^{\mathsf{unip}}_{\mathbb{Q}} & \xhookrightarrow{(i)} & \mathfrak{grt}_1 & \xhookrightarrow{(ii)} & \mathfrak{dmr}_0 & \xhookrightarrow{(iii)} & \mathfrak{krv} & \longrightarrow & \mathsf{Der}\widehat{\mathfrak{f}}_2 \\
 & & \circlearrowright & & \circlearrowright & & \circlearrowright & & \circlearrowright \\
 & & \substack{\theta=\mathrm{id} \\ \tau=\mathrm{id}} & & \theta & & \tau & & \mathfrak{S}_3 = \langle \theta, \tau \rangle
\end{array}$$

2.4. **Double shuffle Lie 代数とその周辺.** 埋め込み鎖(2.5)に現れる Lie 代数に加えて、近年、新たな Lie 代数が導入され、その構造や既存の枠組みとの関連が研究されている。

- Kuno [Ku] は emergent 組紐を用いて Grothendieck-Teichmüller Lie 代数の emergent 版とみなされる Lie 代数 $\mathfrak{grt}_1^{\mathrm{em}}$ を導入している。文献 [AT, AET] で構成される埋め込み $\mathfrak{grt}_1 \hookrightarrow \mathfrak{krv}$ は、この $\mathfrak{grt}_1^{\mathrm{em}}$ を介する、すなわち
$$\mathfrak{grt}_1 \hookrightarrow \mathfrak{grt}_1^{\mathrm{em}} \hookrightarrow \mathfrak{krv}$$
という埋め込みが存在することが示されている。さらに、この $\mathfrak{grt}_1^{\mathrm{em}}$ の像は $\mathfrak{krv}$ に作用する対合 τ の不変部分 $\mathfrak{krv}^\tau$ と同一視されること
$$\mathfrak{grt}_1^{\mathrm{em}} = \mathfrak{krv}^\tau$$
が証明されている。
- Ren [Re] により被約余作用 (reduced coaction) Lie 代数 $\mathfrak{rc}_0$ が導入されている。これは、リーマン面の基本群から構成される Goldman-Turaev Lie 双代数の de Rham 対応物とみなされるネックレス Lie 双代数の余括弧積を導く余作用から得られる、「被約余作用関係式」と呼ばれる $\widehat{\mathfrak{f}}_2$ 内の線形関係式と $\mathfrak{grt}_1$ の定義条件の一つである 2-cycle relation に対応する skew 条件

(2.7)
$$\alpha(e_0, e_1) + \alpha(e_1, e_0) = 0$$

  とを課すことによって定義される。このようにして得られる $\mathfrak{rc}_0$ は括弧積(2.1)により Lie 代数の構造を持ち、double shuffle Lie 代数 $\mathfrak{dmr}_0$ と同様にして $\mathsf{Der}\widehat{\mathfrak{f}}_2$ の部分 Lie 代数として実現される。すなわち、自然な埋め込み
$$\mathfrak{rc}_0 \hookrightarrow \mathsf{Der}\widehat{\mathfrak{f}}_2$$
が存在する。
- Howarth と Ren [HoR] により $\mathfrak{dmr}_0$ に対する skew 条件(2.7)を仮定するもとで、$\mathfrak{dmr}_0$ が $\mathfrak{rc}_0$ に埋め込まれることを示している。この skew 条件は $\mathfrak{S}_3$ の作用に由来する対合のうち、

先述の τ や θ でもなく対合 $\tau\theta\tau$ に関する不変性を課すものとして解釈される。ここで

$$\mathfrak{dmr}_0^{\dagger} := \mathfrak{dmr}_0 \cap (\mathsf{Der}\widehat{\mathfrak{f}_2})^{\tau\theta\tau}$$

とおくと、上述の結果は

$$\mathfrak{dmr}_0^{\dagger} \hookrightarrow \mathfrak{rc}_0$$

という埋め込みが得られることを意味する。この $\mathfrak{dmr}_0^{\dagger}$ が $\mathfrak{dmr}_0$ 自身と一致するかどうかは現時点ではわかっていないが、この問題は Lie 代数レベル、すなわち“modulo products”の状況で、正規化 double shuffle 関係式から双対関係式が従うかどうかという問題に言い換えられる。

彼らはさらに、$\mathfrak{rc}_0$ に対して(2.6)を仮定することで $\mathfrak{rc}_0$ が $\mathfrak{krv}$ に埋め込まれることを示している。すなわち

$$\mathfrak{rc}_0^{\natural} := \{\alpha \in \mathfrak{rc}_0 \mid \alpha \text{ は(2.6)を満たす}\}$$

とおくと、

$$\mathfrak{rc}_0^{\natural} \hookrightarrow \mathfrak{krv}$$

という埋め込みが存在するということである。

以上の内容は次のようにまとめられる。

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathfrak{grt}_1^{\mathrm{em}} = \mathfrak{krv}^{\tau} \arrow[d, hook] \\
\mathsf{LieGal}_{\mathsf{dR}}^{\mathcal{M}}(\mathbb{Z})_{\mathbb{Q}}^{\mathsf{unip}} \arrow[r, hook] & \mathfrak{grt}_1 \arrow[r, hook] \arrow[urr, hook] \arrow[dr, hook] & \mathfrak{dmr}_0 \arrow[r, hook] & \mathfrak{krv} \\
 & & \mathfrak{dmr}_0^{\dagger} \arrow[u, hook] \arrow[dr, hook] & \mathfrak{rc}_0^{\natural} \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] \\
 & & & \mathfrak{rc}_0
\end{tikzcd}$$

上の図に現れる全ての埋め込みが同型であるかどうかは、なお開かれた問題として残されている。今後、どのような新しい視点とアイデアによって展開が生じるのか、さらなる進展が期待される。

謝辞：本研究集会にて講演の機会を提供してくださいましたオーガナイザーの方々に感謝いたします。また、本稿を注意深く読み有益なコメントをくださいました小見山尚氏 (大阪大学) と川村花道氏 (東京理科大) にも感謝いたします。本研究は JSPS 科研費 JP24K00520, JP24K21510 の助成を受けております。

References

[AT] A. Alekseev, C. Torossian, *The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators*, Ann. of Math. (2) 175 (2012), no. 2, 415–463.

[AET] A. Alekseev, B. Enriquez, C. Torossian, *Drinfeld associators, Braid groups and explicit solutions of the Kashiwara-Vergne equations,* Publications Mathématiques de l'IHES, Volume 112 (2010), pp. 143-189.

[BY] H. Bachmann, K. Yaddaden, *On a conjecture of Zhao related to standard relations among cyclotomic multiple zeta values*, J. Algebra 688 (2026), 21–58.

[Br] F. Brown, *Mixed Tate Motives over Spec(Z)*, Annals of Math., volume 175, no. 2 (2012), 949-976.

[De] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points,* Galois groups over $\mathbb{Q}$ (Berkeley, CA, 1987), 79–297, Math. S. Res. Inst. Publ., 16, Springer, New York-Berlin, 1989.

[DeG] P. Deligne, A. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte,* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 38 (2005), no. 1, 1–56.

[Dr] V. Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. 2 (1991), no. 4, 829–860.

[Ec11] J. Ecalle, *The flexion structure and dimorphy: flexion units, singulators, generators, and the enumeration of multizeta irreducibles,* With computational assistance from S. Carr. CRM Series, 12, Asymptotics in dynamics, geometry and PDEs; generalized Borel summation. Vol. II, 27–211, Edizioni della Normale, Pisa, 2011.

[EF23] B. Enriquez, H. Furusho, *The Betti side of the double shuffle theory. II. Double shuffle relations for associators.* Selecta Math. (N.S.) 29 (2023), no. 1, Paper No. 3, 28 pp.

[EF25] B. Enriquez, H. Furusho, *Double shuffle Lie algebra and special derivations*, `arXiv:2505.02265`, preprint.

[F03] H. Furusho, *The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Vol 39. no 4. (2003). 695-720.

[F10] H. Furusho, *Pentagon and hexagon equations*, Annals of Mathematics, Vol. 171 (2010), No. 1, 545-556.

[F11] H. Furusho, *Double shuffle relation for associators,* Annals of Mathematics, Vol. 174 (2011), No. 1, 341-360.

[F14] H. Furusho, *Around associators*, Automorphic forms and Galois representations, 2, 105-117, London Math.Soc. Lecture Note Ser. 415 (2014), Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[F22] H. Furusho, *The pentagon equation and the confluence relations,* Amer. J. Math. Vol 144, No 4, (2022) 873-894.

[FHK] H. Furusho, M. Hirose, N. Komiyama, *Associators in mould theory*, preprint, `arXiv:2312.15423`.

[FK] H. Furusho, N. Komiyama, *Notes on Kashiwara-Vergne and double shuffle Lie algebras*, "Low Dimensional Topology and Number Theory", Springer Proc. Math. Stat., 456, Springer, Singapore, 2025, 63–80.

[FKN] 古庄英和 (著) ; 小谷久寿, 新甫洋史 (述)；結び目と Grothendieck-Teichmüller 群, MI lecture note series, vol. **68**, 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 2016 年 2 月.

[HS] M. Hirose, N. Sato, *Iterated integrals on* $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty, z\}$ *and a class of relations among multiple zeta values,* Adv. Math. 348 (2019), 163–182.

[HoR] M. Howarth, M. Ren, *Reduced coaction Lie algebra, double shuffle Lie algebra and noncommutative krv2 equation*, preprint, `arXiv:2509.20275`.

[IKZ] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, Compos. Math. 142 (2006), no. 2, 307–338.

[Ka] H. Kawamura, *Ecalle's senary relation and dimorphic structures,* preprint, `arXiv:2509.21252`.

[Ku] Y. Kuno, *Emergent version of Drinfeld's associator equations,* preprint, `arXiv:2504.02549`.

[LM] T.Q.T. Le, J. Murakami, *The universal Vassiliev-Kontsevich invariant for framed oriented links,* Compositio Math. 102 (1996), no. 1, 41–64.

[Ra] G. Racinet, *Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité.* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., No. 95 (2002), 185–231.

[Re] M. Ren, *A relation between Turaev coaction, Goncharov–Brown coaction and the reduced coaction Lie algebra*, preprint, `arXiv:2504.17416`.

[S12] L. Schneps, *Double shuffle and Kashiwara-Vergne Lie algebras,* J. Algebra 367 (2012), 54–74.

[S25] L. Schneps, *The double shuffle Lie algebra injects into the Kashiwara-Vergne Lie algebra,* preprint `arXiv:2504.14293`.

〒 464-8602 名古屋市千種区不老町名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Email address: `furusho@math.nagoya-u.ac.jp`