多重 $\wp$ 関数について

九州大学・数理学府　喜納 勝海
Katsumi Kina
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

はじめに

本稿は RIMS 多重ゼータ値の諸相 2025 におけるスピードトークの報告集である．スピードトークでは数値実験を元にした多重 $\wp$ 関数に関する予想を紹介した．その後に, Bachmann–Kanno により与えられた多重 Eisenstein 級数の関係式を用いることで, より高い重さでの実験が可能になった．それにより, 当初の予想の反例が観察できた．本稿では, その結果を踏まえて修正した予想を述べる．新たな予想は重さ k が 17 以下で実験的には正しいことを確認している．

予想の修正について, 聴講者の皆様にお詫びいたします.

RIMS 多重ゼータ値の諸相 2025 の運営にご尽力いただいた皆様に感謝致します.

1　定義

多重 $\wp$ 関数は楕円関数の代表である Weierstrass $\wp$ 関数の反復和による一般化として, 次のように定義される.

定義. インデックス $\Bbbk = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 2}^r$ と $\tau \in \mathbb{H} \coloneqq \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$ に対して

$$\wp_{\Bbbk}(z;\tau) \coloneqq \lim_{M\to\infty}\lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{w_s \in \mathbb{Z}_M\tau + \mathbb{Z}_N \\ w_1 \prec \cdots \prec w_r}} \frac{1}{(z-w_1)^{k_1}(z-w_2)^{k_2}\cdots(z-w_r)^{k_r}}. \tag{1.1}$$

ここで, $\mathbb{Z}_N \coloneqq \{n \in \mathbb{Z} \mid |n| < N\}$ であり, 格子点 $L_\tau \coloneqq \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ 上の全順序 $\prec$ を次で定義する：

$$m_1\tau + n_1 \prec m_2\tau + n_2 \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} m_1 = m_2 \quad \text{かつ} \quad n_1 < n_2 \\ \qquad\qquad \text{または} \\ \qquad\quad m_1 < m_2 \end{cases}.$$

また, 重さを $\operatorname{wt}(\Bbbk) \coloneqq k_1 + \cdots + k_r$ とおく．度々, τ を省略して $\wp_{\Bbbk}(z)$, $\wp_{k_1,\ldots,k_r}(z)$ とも書く.

さらに, 多重ゼータ値, multitangent 関数, 多重 Eisenstein 級数をそれぞれ次のように定める.

定義.　1. (多重ゼータ値) 整数 $k_1, \ldots, k_{r-1} \geq 1$, $k_r \geq 2$ に対して,

$$\zeta(k_1, \ldots, k_r) \coloneqq \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}.$$

2. (multitangent 関数) 整数 $k_2,\dots,k_{r-1}\geq 1$, $k_1,k_r\geq 2$ と $z\in\mathbb{C}$ に対して,

$$\Psi_{k_1,\dots,k_r}(z)\coloneqq\sum_{n_1<\cdots<n_r}\frac{1}{(z+n_1)^{k_1}\cdots(z+n_r)^{k_r}}.$$

3. (多重 Eisenstein 級数) 整数 $k_1,\dots,k_r\geq 2$ と $\tau\in\mathbb{H}$ に対して,

$$\widetilde{G}_{k_1,\dots,k_r}(\tau)\coloneqq\lim_{M\to\infty}\lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{w_s\in\mathbb{Z}_M\tau+\mathbb{Z}_N\\ 0\prec w_1\prec\cdots\prec w_r}}\frac{1}{w_1^{k_1}\cdots w_r^{k_r}}.$$

これらの対象に関して次がわかる.

$$\lim_{\tau\to i\infty}\wp_{k_1,\dots,k_r}(z;\tau)=\Psi_{k_r,\dots,k_1}(z)\ ,\quad \lim_{\tau\to i\infty}\widetilde{G}_{k_1,\dots,k_r}(\tau)=\zeta(k_1,\dots,k_r). \tag{1.2}$$

次のように $\mathbb{Q}$-ベクトル空間を定める.

$$\mathcal{MES}_k\coloneqq\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{\widetilde{G}_{\Bbbk}(\tau)\mid \mathrm{wt}(\Bbbk)=k\}\ ,\quad \mathcal{MPF}_k\coloneqq\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{\wp_{\Bbbk}(z;\tau)\mid \mathrm{wt}(\Bbbk)=k\}.$$

ただし, $\mathcal{MES}_0=\mathbb{Q}$ とする. さらに, 次のように定める.

$$\mathcal{MES}\coloneqq\sum_{k\geq 0}\mathcal{MES}_k\ ,\quad \mathcal{MPF}\coloneqq\sum_{k\geq 2}\mathcal{MPF}_k.$$

また, 多重ゼータ値の空間 $\mathcal{MZV}$, multitangent の空間 $\mathcal{MTF}$ も同様に定める.

2 多重 $\wp$ 関数の性質

まず, 多重 $\wp$ 関数に関しては, 次のことがわかっている.

- 無限和 (1.1) は $\mathbb{C}\backslash L_\tau$ 上広義一様絶対収束し, $\wp_{k_1,\dots,k_r}(z;\tau)$ は L_τ でのみ高々位数 $\max\{k_1,\dots,k_r\}$ の極を持つ格子 L_τ に関する楕円関数となる.
- 深さが 1 のインデックスの多重 $\wp$ 関数：

$$\wp_2(z;\tau)=\wp(z;\tau)+G_2(\tau)\ ,\qquad \wp_k(z;\tau)=\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\frac{d^{k-2}}{dz^{k-2}}\wp(z;\tau)\ ,\quad (k\geq 3).$$

ここで, $\wp(z;\tau)$ は Weierstrass $\wp$ 関数である:

$$\wp(z;\tau)\coloneqq\frac{1}{z^2}+\sum_{w\in L_\tau\backslash\{0\}}\left(\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right)=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)G_{k+2}(\tau)z^k.$$

また, G_k は古典的な Eisenstein 級数であり, $G_k=(1+(-1)^k)\widetilde{G}_k$ で定義される.

定理 2.1 (Theorem 1.1 in [2])**.** インデックス $\Bbbk=(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 2}^r$, $k=\mathrm{wt}(\Bbbk)$ に対して $\mathcal{G}_{\Bbbk}^{(n)}\in\mathcal{MES}_{k-n}$ が一意かつ明示的に与えられ,

$$\wp_{\Bbbk}(z;\tau)=\mathcal{G}_{\Bbbk}^{(0)}(\tau)+\sum_{n=2}^{k}\mathcal{G}_{\Bbbk}^{(n)}(\tau)\wp_n(z;\tau)$$

と書き表せる.

定理 2.1 の記号の下で $\mathcal{MES}_k^{(n)} \coloneqq \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{\mathcal{G}_{\Bbbk}^{(n)}(\tau) \mid \mathrm{wt}(\Bbbk) = k\}$ とおく.

例. 以下は定理 2.1 を用いて得られる.

- $\wp_{2,4} = 6\widetilde{G}_6 - 8\widetilde{G}_{2,4} - 8\widetilde{G}_{4,2} + 4\widetilde{G}_4 \cdot \wp_2 - 2\widetilde{G}_3 \cdot \wp_3 + \widetilde{G}_2 \cdot \wp_4$.
- $\wp_{3,4} = 14\widetilde{G}_7 - 20\widetilde{G}_{2,5} - 2\widetilde{G}_{3,4} - 20\widetilde{G}_{5,2} + 10\widetilde{G}_5 \cdot \wp_2 - 2\widetilde{G}_4 \cdot \wp_3 + \widetilde{G}_3 \cdot \wp_4$.
- $\wp_{3,2,2} = \widetilde{G}_7 + 8\widetilde{G}_{2,5} + 3\widetilde{G}_{3,4} - \widetilde{G}_{4,3} + 3\widetilde{G}_{5,2} - 12\widetilde{G}_{2,2,3} - 12\widetilde{G}_{2,3,2} - 12\widetilde{G}_{3,2,2} + (\widetilde{G}_5 + 4\widetilde{G}_{2,3} + 3\widetilde{G}_{3,2})\wp_2 + \widetilde{G}_{2,2} \cdot \wp_3$.

3 多重 $\wp$ 関数の空間に関する予想

ベクトル空間 $\mathcal{MES}, \mathcal{MPF}$ には調和積の積構造が定まり,

$$\mathcal{MES}_r \cdot \mathcal{MES}_s \subset \mathcal{MES}_{r+s}\ , \quad \mathcal{MPF}_r \cdot \mathcal{MPF}_s \subset \mathcal{MPF}_{r+s}$$

が成り立つ. また, $\frac{d}{dz}(\mathcal{MPF}_k) \subset \mathcal{MPF}_{k+1}$ が成り立つ.

3.1 $\mathcal{MPF}$ は $\mathcal{MES}$ 代数か？

次のような性質が示されている.

定理 3.1 (Theorem 8 in [3], conjectured in [1])**.** $\mathcal{MTF}$ は $\mathcal{MZV}$ 代数である. すなわち, 任意の収束インデックス $\Bbbk, \Bbbk'$ に対して, $\zeta(\Bbbk)\Psi_{\Bbbk'}(z) \in \mathcal{MTF}$ である.

定理 3.1 の証明には次の補題が使われている.

補題 3.2. 以下は同値である.

(1) 定理 *3.1.* *(2)* $\mathcal{MZV} \cdot \Psi_2(z) \subset \mathcal{MTF}$.

定理 3.1 の類似として次のような問題が自然に考えられる.

問題 3.3. $\mathcal{MPF}$ は $\mathcal{MES}$ 代数か？ **答.** (おそらく) 違う. ($\because$ **予想.** $\widetilde{G}_{2,3}(\tau)\wp_2(z;\tau) \notin \mathcal{MPF}$.)

しかし, 次のことが予想できる.

予想 3.4. $\mathcal{MES}_{k-3} \cdot \wp_3(z) \subset \mathcal{MPF}_k$ が成り立つ.

補題 3.5. 以下は同値である.

(1) 予想 *3.4.* *(2)* $\mathcal{MES}_k = \mathcal{MES}_{k+n}^{(n)}$ *for* $n \geq 3$. *(3)* $\mathcal{MES} \cdot \dfrac{d}{dz}\mathcal{MPF} \subset \mathcal{MPF}$.

注意. (詳細は省略するが) 補題 3.5 (2) は $\mathfrak{H}^*_{\geq 2}$ に持ち上げても成り立つことが予想される.

予想 3.4 が成り立てば, 部分空間 $\mathcal{MPF}_k^{(0,2)} \subset \mathcal{MES}_k \oplus \mathcal{MES}_{k-2}$ が存在して,

$$\mathcal{MPF}_k \xrightarrow{\sim} \mathcal{MPF}_k^{(0,2)} \oplus \bigoplus_{3 \leq n \leq k} \mathcal{MES}_{k-n}\ ; \quad \wp_{\Bbbk}(z) \longmapsto (\mathcal{G}_{\Bbbk}^{(0)}, \mathcal{G}_{\Bbbk}^{(2)}, \ldots, \mathcal{G}_{\Bbbk}^{(k)})$$

が成り立つ. また, 自然な射影を $p_k^{(n)} : \mathcal{MPF}_k \to \mathcal{MES}_k^{(n)} \subset \mathcal{MES}_{k-n}$ とおく.

3.2 $\mathcal{MPF} \cap \mathcal{MES}$ は?

重さ 12 の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する (定数倍を除いて唯一の) カスプ形式 $\Delta(\tau)$ は次で与えられる.

$$\Delta(\tau) \coloneqq (60G_4(\tau))^3 - 27(140G_6(\tau))^2 = (2\pi)^{12} q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24}\ , \quad (q = e^{2\pi i \tau}).$$

予想 3.6. *(1)* $\mathcal{MPF}_k \cap \mathcal{MES}_k = \Delta \cdot \mathcal{MES}_{k-12}$.

(2) $\mathcal{MPF}_k \cap (\mathcal{MES}_{k-2} \cdot \wp_2(z)) = (\mathcal{MPF}_{k-2} \cap \mathcal{MES}_{k-2}) \cdot \wp_2(z) = \Delta \cdot \mathcal{MES}_{k-14} \cdot \wp_2(z)$.

例. $\Delta(\tau) \in \mathcal{MPF}_{12} \cap \mathcal{MES}_{12}$. 具体的には

$$-320(7\wp_{3,9} + 21\wp_{4,8} + 37\wp_{5,7} + 45\wp_{6,6} + 37\wp_{7,5} + 21\wp_{8,4} + 7\wp_{9,3} - 350\wp_{3,3,3,3}) = \Delta.$$

系 3.7. 予想 *3.6* の仮定のもとで,

$$\dim \mathcal{MPF}_k^{(0,2)} = \dim \mathrm{Im}\, p_k^{(0)} + \dim \mathcal{MES}_{k-14} = \dim \mathrm{Im}\, p_k^{(2)} + \dim \mathcal{MES}_{k-12}.$$

3.3 実験データ

以下の表は多重 Eisenstein 級数に関するいくつかの予想のもとで得られたものである.

weight k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
# of generators	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
$\dim \mathcal{MPF}_k$	1	1	2	3	5	7	12	17	27	39	59	88	130	194	286	424
$\dim \mathcal{MPF}_k^{(0,2)}$	1	0	1	1	2	2	4	5	8	11	16	24	34	51	73	107
$\dim(\mathcal{MPF}_k \cap \mathcal{MES}_k)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	2	3
$\dim \mathcal{MES}_k$	1	1	2	3	4	7	9	15	21	32	47	70	104	153	228	336

問題 3.8. *(1)* $\mathcal{MES}_k^{(0)}$, $\mathcal{MES}_k^{(2)}$, $\mathcal{MPF}_k^{(0,2)}$ はどのような空間か? *(2)* $\mathcal{MPF}_k$ の関係式は?

例. 以下は重さ $k=9$ の $\mathcal{MPF}_k$ の関係式であり, これに尽きると予想される.

- $2\wp_{3,6} + 6\wp_{4,5} + 6\wp_{5,4} + 2\wp_{6,3} + 27\wp_{2,4,3} + 9\wp_{3,2,4} + 27\wp_{3,4,2} + 9\wp_{4,2,3} - 162\wp_{2,2,2,3} + 54\wp_{2,2,3,2} + 54\wp_{2,3,2,2} - 162\wp_{3,2,2,2} = 0$
- $3\wp_{3,6} + 3\wp_{6,3} - 18\wp_{2,2,5} + 18\wp_{2,5,2} - 24\wp_{3,2,4} - 50\wp_{3,3,3} - 24\wp_{4,2,3} - 18\wp_{5,2,2} = 0$
- $9\wp_{2,3,4} - 9\wp_{2,4,3} + 3\wp_{3,2,4} + 16\wp_{3,3,3} - 9\wp_{3,4,2} + 3\wp_{4,2,3} + 9\wp_{4,3,2} = 0$
- $\wp_{3,6} + 3\wp_{4,5} + 3\wp_{5,4} + \wp_{6,3} + 12\wp_{3,3,3} = 0$

参考文献

[1] O. Bouillot, *The algebra of multitangent functions*, J. Algebra **410** (2014), 148–238.

[2] H. Kanno, K. Kina, *Multiple $\wp$-Functions and Their Applications*, arXiv:2507.14118.

[3] M. Hirose, *Multitangent functions and symmetric multiple zeta values*, arXiv:2402.13902.