対称化多重 Bernoulli 多項式の行列式

The determinant of symmetrized poly-Bernoulli polynomials

東北大学理学研究科数学専攻　亀山太陽
Taiyo Kameyama,
Mathematical Institute, Tohoku University

1　序文

多重 Bernoulli 数を，上指数が負の場合にもつ対称性を保つように，一般化した対象が対称化多重 Bernoulli 数である．その多項式化である対称化多重 Bernoulli 多項式には，複数の組合せ論的解釈が与えられている．

本稿では，対称化多重 Bernoulli 多項式を成分にもつ行列式の明示式を与える．また，類似の結果として，多重 Euler 数を成分にもつ行列式の明示式も与える．証明および詳細は [5] で述べる．

2　対称化多重 Bernoulli 多項式の行列式

非負整数 n, k に対して，**対称化多重 Bernoulli 多項式** $\widehat{\mathscr{B}}_n^k(x)$ は以下の明示公式で与えられる．

$$\widehat{\mathscr{B}}_n^k(x) = \sum_{j=0}^{\min\{n,k\}} j!(x+1)_j \left\{ {n+1 \atop j+1} \right\} \left\{ {k+1 \atop j+1} \right\}$$

ただし，$(x+1)_j \coloneqq (x+1)\cdots(x+j)$ は**上昇階乗冪（Pochhammer 記号）**であり，$\{\begin{smallmatrix}\cdot\\\cdot\end{smallmatrix}\}$ は**第 2 種スターリング数**である．原型となる対称化多重 Bernoulli 数については，金子–櫻井–津村 [3] によって導入された．この対象は，金子 [2] が導入した多重 Bernoulli 数 $B_n^{(k)}$ を，上指数が負のときにもつ対称性を保つように一般化したものである．この数の多項式化が対称化多重 Bernoulli 多項式であり，Bényi–松坂 [1] によって，複数の組合せ論的解釈が与えられている．

表 1　$\widehat{\mathscr{B}}_n^k(x)$ **の表**

$n\backslash k$	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	1	$x+2$	$3x+4$	$7x+8$
2	1	$3x+4$	$2x^2+15x+14$	$12x^2+57x+46$
3	1	$7x+8$	$12x^2+57x+46$	$6x^3+108x^2+331x+230$

上の表に着目すると，対称性を保持していることが観察できる．また，定数項に着目すると，多重 Bernoulli 数が現れていることが分かる．

今回，この多項式を成分に持つ行列式について，明示式を与えた．それが次の主定理である．

定理 1. $N \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\det(\widehat{\mathscr{B}}_{n-1}^{k-1}(x))_{1\le n,k\le N} = \prod_{i=0}^{N-1} i!(x+1)_i$$

が成り立つ．

この定理を証明するにあたって，以下の補題を用いる．

補題 2. $m \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\sum_{n=0}^{m}(-1)^{m-n}\begin{bmatrix} m+1 \\ n+1 \end{bmatrix}\widehat{\mathscr{B}}_n^k(x) = \begin{Bmatrix} k+1 \\ m+1 \end{Bmatrix} m!(x+1)_m$$

が成り立つ．ただし，$[\,\vdots\,]$ は**第 1 種スターリング数**である．

この補題を用いることによって，以下のように行基本変形をすることができ，余因子展開で行列式を計算することができる．これにより，帰納法で主定理が従う．

例 3.（4×4 の場合）

$$\begin{array}{rrrrr}
1 & 1 & 1 & 1 & \times(-6) \\
1 & x+2 & 3x+4 & 7x+8 & \times 11 \\
1 & 3x+4 & 2x^2+15x+14 & 12x^2+57x+46 & \times(-6) \\
1 & 7x+8 & 12x^2+57x+46 & 6x^3+108x^2+331x+230 & \times 1
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rrrrr}
-6 & -6 & -6 & -6 & \\
11 & 11x+22 & 33x+44 & 77x+88 & \\
-6 & -18x-24 & -12x^2-90x-84 & -72x^2-342x-276 & \\
1 & 7x+8 & 12x^2+57x+46 & 6x^3+108x^2+331x+230 & \\
\hline
0 & 0 & 0 & 6x^3+36x^2+66x+36 &
\end{array}$$

よって，

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & x+2 & 3x+4 & 7x+8 \\
1 & 3x+4 & 2x^2+15x+14 & 12x^2+57x+46 \\
1 & 7x+8 & 12x^2+57x+46 & 6x^3+108x^2+331x+230
\end{vmatrix}
= \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & x+2 & 3x+4 & 7x+8 \\
1 & 3x+4 & 2x^2+15x+14 & 12x^2+57x+46 \\
0 & 0 & 0 & 3!(x+1)_3
\end{vmatrix}
$$

と変形できる．

定理 1 に $x=0$ を代入することによって，多重 Bernoulli 数での結果も得られる．

系 4 (cf. Knuth[4]). $N \in \mathbb{N}$ に対して，

$$
\det(B_{n-1}^{(-k+1)})_{1 \le n,k \le N} = \prod_{i=0}^{N-1} (i!)^2
$$

が成り立つ．

3　多重 Euler 数の行列式

主定理の類似の結果として，大野–佐々木 [7] によって導入された**多重 Euler 数**を成分にもつ行列式についても明示式が得られる．多重 Euler 数は以下の母関数で定義される数である．

$$
\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(k)} \frac{t^n}{n!} = \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-4t})}{4t \cosh t}
$$

ただし，$\mathrm{Li}_k(t)$ は形式的べき級数 $\mathrm{Li}_k(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m^k}$ である．多重 Euler 数についても，対称化多重 Bernoulli 多項式のときと同様，以下のような行列式の明示式が得られる．

定理 5. $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，

$$
\det(E_{n-1}^{(-k+1)})_{1 \le n,k \le N} = 2^{N(N-1)} \prod_{i=0}^{N-1} (i!)^2 \tag{1}
$$

が成り立つ．

4　謝辞

本稿および集会における発表の機会を与えていただいた，世話人である大野泰生先生，および関真一朗先生に深く感謝を申し上げます．

参考文献

[1] B. Bényi and T. Matsusaka *On the combinatorics of symmetrized poly-Bernoulli numbers*, Electron. J. Combin. 28 (2021), Paper No. 1.47, 20.

[2] M. Kaneko, *Poly-Bernoulli numbers*, J. Théor. Nombres Bordeaux **9** (1997), no. 1, 221-228.

[3] M. Kaneko, F. Sakurai, H. Tsumura, *On a duality formula for certain sums of values of poly-Bernoulli polynomials and its application.* Journal de théorie des nombres de Bordeaux, Volume 30 (2018), 203-218.

[4] D. Knuth, *Parades and Poly-Bernoulli Bijections*, `https://www-cs-faculty.stanford.edu/knuth/papers/poly-Bernoulli.pdf`. (2024).

[5] 亀山 太陽, 対称化多重 *Bernoulli* 多項式の行列式と一般化 *Euler* 数について, 修士論文 東北大学大学院理学研究科, 2026.

[6] 松坂 俊輝, 多重 *Bernoulli* 数の組合せ的解釈と *Stephan* の観察について, RIMS 講究録「解析的整数論とその周辺 (2021)」, 2022.

[7] Y. Ohno and Y. Sasaki, *On poly-Euler numbers*, J. Aust. Math. Soc. **103** (2017), 179-213.