Finite algebraic numbers in function fields

坂本穂波 (Honami Sakamoto)*

お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科 理学専攻 数学コース (博士前期課程)

(Ochanomizu University, Graduate student of Humanities and Sciences)

1 J. Rosen の有限代数的数

Ax [Ax68] や Kontsevich [Kon09, §2.2] によって導入された環

$$\mathcal{A} = \frac{\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}{\bigoplus_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$$

(ここで, p は素数の全体を走る) は, 有限多重ゼータ値 (cf. [Kan19]) の自然な棲処として重要な役割を果たしてきた. J. Rosen [Ros20] はモチーフのピリオドの観点から, 代数的数の環の有限類似と見られる環 $\mathcal{A}$ の部分環 $\mathcal{P}^0_{\mathcal{A}}$ を導入した. 後の研究では, $\mathcal{P}^0_{\mathcal{A}}$ の元は有限代数的数 (finite algebraic number) と呼ばれている. $\mathcal{P}^0_{\mathcal{A}}$ について, 基本的事実を以下にまとめる. 以後, 対角埋め込みによって $\mathbb{Q} \subset \mathcal{A}$ と見る.

定理 1.1 (J.Rosen, [Ros20, Theorem 1.1])**.** *元 $\alpha \in \mathcal{A}$ に対し, 次の 3 つは同値である.*
(1) *$\mathbb{Q}$ 係数の線形漸化式を満たす有理数列 $(a_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ が存在し, $\alpha = [(a_p \bmod p)_p]$.*
(2) *ある有限次 Galois 拡大 $L/\mathbb{Q}$, および「ある写像 $g : \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \to L$ であって, すべての $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ に対し $g(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \sigma(g(\tau))$ を満たすもの」が存在し, フロベニウス共役類 $\varphi_p \subset \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ を用いて, $\alpha = [(g(\varphi_p) \bmod p)_p]$ と表される.*
(3) *L の $\mathbb{Q}$ 上の基底を任意に選んだとき, α が "$\mathcal{A}$ 値フロベニウス自己同型写像" $F_{\mathcal{A}}\colon L \otimes \mathcal{A} \to L \otimes \mathcal{A}$ の "表現行列" の成分の $\mathbb{Q}$ 線形結合として表される.*

定義 1.2 ([Ros20, Definition 1.2])**.** 元 $\alpha \in \mathcal{A}$ が**有限代数的数**であるとは, 上の 3 つの同値な条件を満たすことをいい, その全体を $\mathcal{P}^0_{\mathcal{A}}$ と書く. また, $\mathcal{A}$ の $\mathbb{Q}$ 上代数的な元の全体を $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ と書く.

定理 1.3 ([Ros20], Rosen–竹山–田坂–山本 [RTTY24], 安沢–船倉 [AF24])**.**
(1) *有限代数的数の全体 $\mathcal{P}^0_{\mathcal{A}}$ は, $\mathcal{A}$ の部分 $\mathbb{Q}$ 代数をなす.*
(2) *真の包含列 $\mathbb{Q} \subsetneq \mathcal{P}^0_{\mathcal{A}} \subsetneq \mathcal{C}_{\mathcal{A}} \subsetneq \mathcal{A}$ がある.*

注意 1.4. (1) は [Rosen2020] で事実として述べられ, [RTTY2024, Proposition 2.7] で明示的に示された. 真の包含 $\mathbb{Q} \subsetneq \mathcal{P}^0_{\mathcal{A}}$ は [Ros20 Example 1.5] と Dirichlet の密度定理からわかる. 包含 $\mathcal{P}^0_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ は [Ros20 Theorem1.4 前半] による. $\mathcal{P}^0_{\mathcal{A}}$ は可算無限集合, $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ は非可算無限集合であることが [Ros20] で述べられている. 真の包含 $\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \subsetneq \mathcal{A}$ については, [AF24, Proposition 3.7, Example 3.8] によって超越元の判定条件と具体例構成が与えられている. なお, 興味深い $\mathcal{A} \backslash \mathcal{P}^0_{\mathcal{A}}$ の元の例は Luca-Zudilin [LZ25] などでも与えられている.

*sakamo10ho73@gmail.com

例 1.5 ([Ros20, Example 1.5]). Fibonacci 数列 (F_n) とルジャンドル記号について $F_p \equiv (\frac{5}{p}) \bmod p$ である．よってディリクレの密度定理から $\alpha = [(F_p \bmod p)_p] \in \mathcal{P}^0_{\mathcal{A}} \setminus \mathbb{Q}$ である．また, α は $f(x) = x^2 - 1$ の根である．

定理 1.6 (Skolem–Mahler–Lech の定理の類似, cf. [Ros20, Corollary 1.3]). 素数の集合 S について次は同値.
(1) S はフロベニウス的, つまり, ある有限次 *Galois* 拡大 L/K および共役類の合併 $C \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ が存在して, $\varphi_P \subset C$ なる P の全体 $S_{L,C}$ と S は有限個の元を除き一致.
(2) ある線形再帰数列 $(a_n)_n$ が存在して, $S \subset \{p \mid a_p \equiv 0 \mod p\}$ は補有限.

定理 1.7 ([Ros20, Theorem 1.4]). 元 $\alpha \in \mathcal{P}^0_{\mathcal{A}}$ を根に持つ $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ は, $\mathbb{Q}$ にも根を持つ.

定理 1.8 ([Ros20, Theorem 1.6]). $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ とする．素数の自然密度 δ について,

$$\sup_{(a_p)_p \in \mathcal{P}^0_{\mathcal{A}}} \delta(\{p : f((a_p)_p) \equiv 0 \bmod p\}) = \delta(\{p : f \text{ が } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ に根を持つ }\}).$$

また, $f(x)$ が $\mathbb{Q}$ に根を持たないとき, 左辺の上限を実現する $\mathcal{P}^0_{\mathcal{A}}$ の元 α は存在しない.

注意 1.9 (cf. [Ros20, Section 4.1]). $\mathrm{Spec}\, L$ を $\mathbb{Q}$ 上の 0 次元の代数多様体と見たものの代数的 de Rham コホモロジーについて $H^0_{dR}(\mathrm{Spec}\, L) \cong L$ である．$\mathcal{P}^0_{\mathcal{A}}$ の定義の条件 (3) で, 代わりに de Rham–Betti 比較同型 $L \otimes \mathbb{C} \overset{\cong}{\to} H^0_B(\mathrm{Spec}\, L) \otimes \mathbb{C}$ を考えると, 表現行列の係数たちの $\mathbb{Q}$-span が $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ となる．$\mathbb{Q}$ 上の代数多様体 X を動かして定義される $\mathbb{C}$ 値ピリオドの全体が生成する $\mathbb{C}$ の $\mathbb{Q}$ 部分代数を $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$, $\mathcal{A}$ 値ピリオドの全体が生成する $\mathbb{C}$ の $\mathbb{Q}$ 部分代数を $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ と書くと, 次の包含関係が並行的に見られる.

$\overline{\mathbb{Q}}$	$\subsetneq$	$\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$	$\subsetneq$	$\mathbb{C}$
$\mathcal{P}^0_{\mathcal{A}}$	$\subsetneq$	$\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$	$\subsetneq$	$\mathcal{A}$

この意味で $\mathcal{P}^0_{\mathcal{A}}$ は, $\mathbb{C}$ を $\mathcal{A}$ に取り替えたときの, $\overline{\mathbb{Q}}$ の有限類似である.

2 主結果（正標数類似）

q を素数の冪, θ を不定元とし, 多項式環 $R = \mathbb{F}_q[\theta]$ および体 $K = \mathrm{Frac}\, R = \mathbb{F}_q(\theta)$ を考える．先程の議論で $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ を R, K に置き換えて, Chang–三柴 [CM17] の環

$$\mathcal{A}_K = \frac{\prod_P R/(P)}{\bigoplus_P R/(P)}$$

を考える．ただし, P は R の monic な既約多項式を走る．対角埋め込みによって $K \subset \mathcal{A}_K$ と見る．前節のすべての主張の類似が, 次のような修正のもとで成り立つ [?].

線形漸化式	線形漸化式 （固有多項式が分離的）
$a_p \bmod p$	$a_{q^{\deg P}} \bmod P$
有限次拡大	有限次分離拡大

定理 2.1. 元 $\alpha \in \mathcal{A}_K$ に対し, 次の *3* つの条件は同値である.
(1) K 係数の線形漸化式を満たす数列 $(a_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ であって固有多項式が分離多項式の積であるようなものが存在し, $\alpha = [(a_{q^{\deg(P)}} \bmod P)_P]$.
(2) ある有限次 *Galois* 拡大 L/K, および「ある写像 $g : \mathrm{Gal}(L/K) \to L$ であって, すべての $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$ に対し $g(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \sigma(g(\tau))$ を満たすもの」が存在し, フロベニウス共役類 $\varphi_P \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ を用いて, $\alpha = [(g(\varphi_P) \bmod P)_P]$ と表される.
(3) L の K 上の基底を任意に選んだとき, α が "$\mathcal{A}_K$ 値フロベニウス自己同型写像" $F_{\mathcal{A}_K} : L \otimes \mathcal{A}_K \to L \otimes \mathcal{A}_K$ の "表現行列" の成分の K 線形結合として表される.

定義 2.2. 元 $\alpha \in \mathcal{A}_K$ が K 上の**有限代数的数**であるとは, 上の 3 つの同値な条件を満たすことをいう. その全体を $\mathcal{P}^0_{\mathcal{A}_K}$ と書く. また, $\mathcal{A}_K$ の K 上分離的 (resp. 代数的) な元の全体集合を $C^{\mathrm{alg}}_{\mathcal{A}_K}$ (resp. $C^{\mathrm{sep}}_{\mathcal{A}_K}$) とおく.

定理 2.3. (1) 有限代数的数の全体 $\mathcal{P}^0_{\mathcal{A}_K}$ は, $\mathcal{A}_K$ の部分 K 代数をなす.
(2) 真の包含列 $K \subsetneq \mathcal{P}^0_{\mathcal{A}_K} \subsetneq \mathcal{C}^{\mathrm{sep}}_{\mathcal{A}_K} \subsetneq \mathcal{C}^{\mathrm{alg}}_{\mathcal{A}_K} \subsetneq \mathcal{A}_K$ がある.

例 2.4 (真の包含 $K \subsetneq \mathcal{P}^0_{\mathcal{A}_K}$ を示す例)**.**
(1) $q = 2^r$, $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ のとき, 線形再帰数列 $(F_n)_n \in \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}} \subset R^{\mathbb{N}}$ を $F_0 = F_1 = \cdots = F_{q-1} = 1$, $F_{n+q} = F_n + F_{n+1} + \cdots + F_{n+q-1}$ で定める. このとき, $\alpha = [(F_{q^{\deg P}})_P] \in \mathcal{P}^0_{\mathcal{A}_K} \setminus K$ である. また, $f(x) = x(x-1) \in K[x]$ に対し $f(\alpha) = 0$ となる.
(2) $2 \nmid q$ のとき, 線形再帰数列 $(F_n)_n \in R^{\mathbb{N}}$ を $F_1 = 1$, $F_2 = 0$, $F_{n+2} = \theta F_n$ で定義する. $R/(P)^\times \cong \mathbb{Z}/(q^{\deg P} - 1)\mathbb{Z}$ により, ルジャンドル記号が $F_{q^{\deg P}} = \theta^{(q^{\deg P}-1)/2} \equiv \left(\frac{\theta}{P}\right) \bmod P$ 満たす. よって, $\alpha = [(F_{q^{\deg P}})]_P \in \mathcal{P}^0_{\mathcal{A}_K} \setminus K$ である. また, $f(x) = x^2 - 1 \in K[x]$ に対し $f(\alpha) = 0$ となる.

定理 2.5. R の既約多項式の集合 S について次は同値.
(1) S はフロベニウス的, つまり, ある有限次 *Galois* 拡大 L/K および共役類の合併 $C \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ が存在して, $\varphi_P \subset C$ なる P の全体 $S_{L,C}$ と S は有限個の元を除き一致.
(2) ある線形再帰数列 $(a_n)_n$ が存在して, $S \subset \{P : a_{q^{\deg P}} \equiv 0 \bmod P\}$ は補有限.

定理 2.6. 元 $\alpha \in \mathcal{P}^0_{\mathcal{A}_K}$ を根に持つ $f(x) \in K[x]$ は, K にも根に持つ.

定理 2.7. $f(x) \in K[x]$ を分離多項式とする. *Dirichlet* 密度 δ について,

$$\sup_{(a_P)_P \in \mathcal{P}^0_{\mathcal{A}_K}} \delta(\{P \mid f((a_P)_P) = 0\}) = \delta(\{P \mid f \text{ が } R/(P) \text{ で根を持つ}).$$

また, $f(x)$ が K に根を持たないとき, 左辺の上限を実現する $\mathcal{P}^0_{\mathcal{A}_K}$ の元 α は存在しない.

注意 2.8 (cf. Taelman [Tae09])**.** 体 K を含む完備代数閉体 $\mathbb{C}_\infty = \widehat{\overline{\mathbb{F}_p((1/\theta))}}$ を考える. 一般に rigid analytically trivial な effective t-モチーフ M に対し, de Rham–Betti 比較同型 $H^0_{dR}(M) \otimes \mathbb{C}_\infty \overset{\cong}{\to} H^0_B(M) \otimes \mathbb{C}_\infty$ が定まり, 基底の表現行列の係数によって M の正標数ピリオドたちが定義される. また, M が特に Artin t-モチーフの全体を走るとき, 正標数のピリオドの全体が生成する $\mathbb{C}_\infty$ の K 部分代数 $\mathcal{P}_{C_\infty}$ の K 部分代数として K の分離閉包 K^{sep} が K 上生成される. このことを踏まえると, 注意 1.9の正標数版と見られる次の表が書けて, $\mathcal{P}^0_{\mathcal{A}_K}$ は K^{sep} の有限類似と位置づけられる, ということが期待される.

K^{sep}	$\subsetneq$	$\mathcal{P}_{\mathbb{C}_\infty}$	$\subsetneq$	$\mathbb{C}_\infty$
$\mathcal{P}^0_{\mathcal{A}_K}$	$\subsetneq$	$\mathcal{P}_{\mathcal{A}_K}$	$\subsetneq$	$\mathcal{A}_K$

"正標数の有限ピリオド環" $\mathcal{P}_{\mathcal{A}_K}$ の適切な定義を見つけることは, 今後の重要な課題である.

謝辞

本稿は 2025 年 9 月に京都大学で催された研究集会「多重ゼータ値の諸相」におけるショートトークに基づくものであり, 多大なるご尽力を賜りました世話人の先生方に深く感謝申し上げます. また, その際に京都大学に設置された国際共同利用・共同研究拠点である数理解析研究所の支援を受けました. また, 本稿は松月大知氏と植木潤先生との共同研究 [MSU26] に基づくものです.

参考文献

[AF24] Takumi Anzawa and Hidetaka Funakura, *Congruences for the q-Fibonacci sequence related to its transcendence*, Ramanujan J. **63** (2024), no. 4, 1057–1072. MR 4721156

[Ax68] James Ax, *The elementary theory of finite fields*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 239–271. MR 229613

[CM17] Chieh-Yu Chang and Yoshinori Mishiba, *On finite Carlitz multiple polylogarithms*, J. Théor. Nombres Bordeaux **29** (2017), no. 3, 1049–1058. MR 3745259

[Kan19] Masanobu Kaneko, *An introduction to classical and finite multiple zeta values*, Publications mathématiques de Besançon. Algèbre et théorie des nombres. 2019/1, Publ. Math. Besançon Algèbre Théorie Nr., vol. 2019/1, Presses Univ. Franche-Comté, Besançon, [2019] ©2019, pp. 103–129. MR 4395010

[Kon09] Maxim Kontsevich, *Holonomic $\mathscr{D}$-modules and positive characteristic*, Jpn. J. Math. **4** (2009), no. 1, 1–25. MR 2491280

[LZ25] Florian Luca and Wadim Zudilin, *Irrationality and transcendence questions in the 'poor man's adèle ring'*, Ramanujan J. **67** (2025), no. 4, Paper No. 88, 10. MR 4921812

[MSU26] Daichi Matsuzuki, Honami Sakamoto, and Jun Ueki, *Positive characteristic analogues of finite algebraic numbers*, preprint. arXiv:2601.21209, 2026.

[Ros20] Julian Rosen, *A finite analogue of the ring of algebraic numbers*, J. Number Theory **208** (2020), 59–71. MR 4032288

[RTTY24] Julian Rosen, Yoshihiro Takeyama, Koji Tasaka, and Shuji Yamamoto, *The ring of finite algebraic numbers and its application to the law of decomposition of primes*, J. Number Theory **263** (2024), 335–365. MR 4755038

[Tae09] Lenny Taelman, *Artin t-motifs*, J. Number Theory **129** (2009), no. 1, 142–157. MR 2468475