Recurrence relations and congruences for overpartitions

東北大学大学院理学研究科 本村優太
Yuta Motomura
Mathematical Institute, Tohoku University

MacMahon[4] は組合せ論の文脈で MacMahon 級数とよばれる q 級数を導入し，その係数のもつ性質を調べた．ここでレベル 1 の MacMahon 級数 $A_r(q)$，レベル 2 の MacMahon 級数 $C_r(q)$ は正整数 r に対して

$$A_r(q) \coloneqq \sum_{m_1>\cdots>m_r>0} \frac{q^{m_1+\cdots+m_r}}{(1-q^{m_1})^2\cdots(1-q^{m_r})^2},$$

$$C_r(q) \coloneqq \sum_{\substack{m_1>\cdots>m_r>0\\ m_i\equiv 1 \bmod 2}} \frac{q^{m_1+\cdots+m_r}}{(1-q^{m_1})^2\cdots(1-q^{m_r})^2}$$

で定義される．Amdeberhan–Ono–Singh[1] は保型形式を用いてレベル 1 の MacMahon 級数の係数が満たす合同式を明らかにした．本稿では，レベル 2 の係数が満たす合同式を与えたので報告する．証明および詳細は [5] を参照されたい．

1 MacMahon 級数と overpartition

MacMahon 級数は

$$A_r(q) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{u_1v_1+\cdots+u_rv_r=n\\ u_1>u_2>\cdots>u_r>0}} v_1v_2\cdots v_r\right)q^n$$

のように表示できる．この表示から，MacMahon 級数の係数と約数関数や分割数の関係が示唆されるが，一方で直接係数を調べることは一般に困難である．しかし Andrews–Rose [2] が $A_r(q)$, $C_r(q)$ の以下のような別表示を与えたことで，その係数を異なる形で解釈できるようになった．

定理 1.1 (Andrews–Rose [2] Corollary 2)**.** 正整数 r に対して

$$A_r(q) = \frac{(-1)^r}{(2r+1)!(q;q)_\infty^3} \sum_{n=r}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{(n+r)!}{(n-r)!} q^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

$$C_r(q) = \frac{(-1)^r(-q;q)_\infty}{(2r)!(q;q)_\infty} \sum_{n=r}^{\infty} (-1)^n 2n \frac{(n+r-1)!}{(n-r)!} q^{n^2}$$

が成り立つ. ただしここで,

$$(a;q)_\infty \coloneqq \prod_{n=0}^{\infty} (1-aq^n)$$

と定める.

この別表示から, $(q;q)_\infty^{-3}$ の係数を考察することで, Amdeberhan–Ono–Singh [1] は $A_r(q)$ の係数が満たす合同式を示した. 一方, レベル 2 の場合に現れる $\dfrac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}$ は overpartition とよばれる数論的関数 $\overline{p}(n)$ の母関数になっている.

定義 1.2. 非負整数 n に対して overpartition $\overline{p}(n)$ を

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{p}(n) q^n \coloneqq \frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}$$

で定める. また負の整数 $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ に対して $\overline{p}(n) = 0$ と定める.

さらに, $\dfrac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}$ の著しい性質として, その逆数を以下のように明示的に表すことができる.

命題 1.3.

$$\frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2}$$

命題 1.3 を用いて $\dfrac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty} \cdot \dfrac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty} = 1$ の両辺の係数を比較すると, 以下の overpartition の漸化式が従う.

命題 1.4. 非負整数 $n \geq 0$ について

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^{m+1} \overline{p}(n-m^2) = \delta_{n,0}$$

を満たす.

2　主定理

レベル 2 の MacMahon 級数の係数が満たす合同式を示すために, 命題 1.4 の拡張にあたる overpartition の新たな関係式について述べる．まず, この関係式の導出に用いる Rankin–Cohen bracket (cf.[6]) の定義を紹介する．ただし, 以下では τ を上半平面上の点, q を $q = e^{2\pi i\tau}$ と定める．

定義 2.1 (Rankin–Cohen bracket)**.** ν を非負整数, k, l を半整数, f, g を上半平面上正則な関数とする．このとき Rankin–Cohen bracket を以下で定義する．

$$[f(\tau), g(\tau)]_{\nu,(k,l)} \coloneqq \sum_{\substack{r,s\geq 0\\ r+s=\nu}} \frac{(-1)^r\Gamma(k+\nu)\Gamma(l+\nu)}{s!r!\Gamma(k+\nu-s)\Gamma(l+\nu-r)} D^r(f(\tau))D^s(g(\tau))$$

ただし $D \coloneqq \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d}{d\tau} = q\dfrac{d}{dq}$ とする．

また, レベル 2 のアイゼンシュタイン級数 $G_k^{(2)}(\tau)$ を

$$G_k^{(2)}(\tau) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}^{(2)}(n)q^n \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{d\mid n\\ \frac{n}{d}\equiv 1 \bmod 2}} d^{k-1}\right)q^n$$

で定める．このとき overpartition の母関数 $\dfrac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}$ について以下が成立する．

定理 2.2. 整数 $\nu \geq 2$ に対して

$$\left[\frac{(-q;q)_\infty}{(q;q)_\infty}, \frac{(q;q)_\infty}{(-q;q)_\infty}\right]_{\nu,(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} + \frac{\nu\binom{2\nu-2}{\nu-2}}{2^{2\nu-2}(2^{2\nu}-1)B_{2\nu}} G_{2\nu}^{(2)}(\tau)$$

は重さ 2ν の $\Gamma_0(2)$ に関するカスプ形式になる．

重さ $4, 6$ の $\Gamma_0(2)$ 上のカスプ形式はともに 0 のみである．したがって定理 2.2 の式に $\nu = 2, 3$ を代入すると, いずれも恒等的に 0 になる．命題 1.3 を用いて, 両辺の係数を比較することで以下の overpartition の漸化式が得られる．

系 2.3. 正整数 n に対して以下が成立する．

(1) $\displaystyle\sum_{m>0}(-1)^{m+1}(3nm^2 - 2m^4)\overline{p}(n-m^2) = \sigma_3^{(2)}(n)$

(2) $\displaystyle\sum_{m>0}(-1)^{m+1}(15n^2m^2-30nm^4+16m^6)\overline{p}(n-m^2)=\sigma_5^{(2)}(n)$

$\nu=0$ のとき, Rankin–Cohen bracket は通常の積になり, 係数比較をすると命題 1.4 が従う. したがって, 系 2.3 は命題 1.4 の拡張とみなすことができる.

また系 2.3 の (1) の n に $8n$ を代入すると, overpartition の合同式 $\overline{p}(8n+7)\equiv 0 \bmod 4$ が導かれる. この合同式と定理 1.1 を組み合わせると以下の $C_r(q)$ の係数が満たす合同式を導くことができる.

定理 2.4. $C_r(q)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_r(n)q^n$ としたとき正整数 n,r に対して以下が成立する.

(1) $c_{2r-1}(4n+2)\equiv c_{2r-1}(4n+3)\equiv c_{2r-1}(4n+4)\equiv 0 \bmod 2$

(2) $c_{4r-3}(8n)\equiv 0 \bmod 4$

謝辞

最後になりますが, 今回発表の機会を与えてくださった, 研究代表者の大野泰生先生と関真一朗先生に感謝申し上げます.

参考文献

[1] T. Amdeberhan, K. Ono, and A. Singh, *MacMahon's sums-of-divisors and allied q-series*, Advances in Mathematics **452** (2024), 109820.

[2] G. Andrews and S. Rose, *MacMahon's sum-of-divisors functions, Chebyshev polynomials, and Quasi-modular forms*, J. Reine Angew. Math. **676** (2013), 97–103.

[3] H. Bachmann, *MacMahon's sums-of-divisors and their connection to multiple Eisenstein series*, Research in Number Theory **10** (2024), no. 2, 50.

[4] P. A. MacMahon, *Divisors of numbers and their continuations in the theory of partitions*, Percy A. MacMahon Collected Papers, 1986, pp. 305–341.

[5] Y. Motomura, *Overpartition* の関係式とその多重ゼータ値への応用について, 東北大学理学研究科修士論文 (2026).

[6] R. A. Rankin, *The construction of automorphic forms from the derivatives of given forms*, J. Indian Math Soc. **20** (1956), 103–116.