

Combinatorial objects and multiple zeta values

東北大学大学院理学研究科数学専攻 須田雄大

Takehiro Suda

Mathematical institute, Tohoku University

本稿では, q 多重ゼータ値を組合せ論的観点から観察する. q 多重ゼータ値を級数表示した際の各係数が数え上げの結果となるような組合せ論的対象を導入し, その対象の間に全単射を直接構成することで q 多重ゼータ値の関係式の別証明が得られる. 本稿ではこのことの概略を述べる. 詳細は [6] を参照していただきたい.

1 q 多重ゼータ値

BZ (Bladley–Zhao) type の q 多重ゼータ値を以下で定める.

定義 1.1 (cf. [1]). $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in (\mathbb{Z}_{>0})^r$, $k_r > 1$ に対し,

$$\zeta_q(\mathbf{k}) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \prod_{i=1}^r \frac{q^{m_i(k_i-1)}}{(1-q^{m_i})^{k_i}}$$

と定める.

ζ_q は様々な線形関係式を満たす. 例えば以下の定理が成り立つ.

定理 1.2 (q -大野関係式, [1]). $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in (\mathbb{Z}_{>0})^r$, $k_r > 1$ 及び $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\mathcal{O}_q(\mathbf{k}; M) := \sum_{\substack{0 \leq c_1, c_2, \dots, c_r \\ c_1 + c_2 + \dots + c_r = M}} \zeta_q(k_1 + c_1, k_2 + c_2, \dots, k_r + c_r)$$

とする. このとき,

$$\mathcal{O}_q(\mathbf{k}; M) = \mathcal{O}_q(\mathbf{k}^\dagger; M)$$

が成り立つ. 但し, \mathbf{k}^\dagger は \mathbf{k} の双対インデックスで, $\mathbf{k} = (\{1\}^{a_1-1}, b_1 +$

$1, \dots, \{1\}^{a_l-1}, b_l + 1)$, ($a_i, b_i \in \mathbb{Z}_{>0}$) と表したとき, $\mathbf{k}^\dagger := (\{1\}^{b_l-1}, a_l + 1, \dots, \{1\}^{b_1-1}, a_1 + 1)$ と表される組である.

定理 1.2 の証明には様々な手法が知られている. 例えば, Seki–Yamamoto[4], Brindle[2] では, 以下の定理を連結和法と呼ばれる手法 (cf. [5]) によって示し, その帰結として定理 1.2 を示している.

定理 1.3 ([4], [3]). $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in (\mathbb{Z}_{>0})^r$, $k_r > 1$ に対し,

$$Z_q(\mathbf{k}; X) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \prod_{i=1}^r \frac{q^{m_i(k_i-1)}}{(1 - q^{m_i} X)(1 - q^{m_i})^{k_i-1}}$$

とする. このとき,

$$Z_q(\mathbf{k}; X) = Z_q(\mathbf{k}^\dagger; X)$$

が成り立つ.

次節では, $Z_q(\mathbf{k}; X)$ に組合せ論的解釈を与える.

2 組合せ論的对象

定義 2.1. $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in (\mathbb{Z}_{>0})^r$ であって, $k_r > 1$ または, $\mathbf{k} = (1)$ を満たすもの及び $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, 集合 $\mathcal{C}(\mathbf{k}; N)$ を以下で定める.

$$\mathcal{C}(\mathbf{k}; N) := \{(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r) \mid \text{以下の (i), (ii), (iii), (iv) を満たす.}\}$$

- (i) $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in (\mathbb{Z}_{>0})^r$, with $0 < m_1 < m_2 < \dots < m_r$,
- (ii) $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$,
- (iii) $\sum_{i=1}^r n_i m_i = N$,
- (iv) $\mathbf{u}_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,k_i-1}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{k_i-1}$, with $0 \leq u_{i,1} < \dots < u_{i,k_i-1} < n_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$).

また, $\mathcal{C}(\mathbf{k}) = \bigcup_{N>0} \mathcal{C}(\mathbf{k}; N)$ とする.

定義 2.2. $C = (\mathbf{m}; \mathbf{n}; \mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{u}_r) \in \mathcal{C}(k_1, \dots, k_r)$ に対し, $p(C) = \sum_{i=1}^r u_{i,1}$ とする. ただし, $k_i = 1$ なる i に対して, $u_{i,1} = n_i$ とする.

また, $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, $\mathcal{C}(\mathbf{k}; N; M) := \{C \in \mathcal{C}(\mathbf{k}; N) \mid p(C) = M\}$ とする.

命題 2.3. $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in (\mathbb{Z}_{>0})^r$, $k_r > 1$ に対して,

$$\sum_{N>0} \sum_{M \geq 0} \#\mathcal{C}(\mathbf{k}; N; M) q^N X^M = Z_q(\mathbf{k}; X)$$

が成立する.

すなわち, $\mathcal{C}(\mathbf{k}; N; M)$ と $\mathcal{C}(\mathbf{k}^\dagger; N; M)$ の間に全単射を構成出来れば, 定理 1.3 及び定理 1.2 の証明が得られる.

定理 1.3 は一般の収束インデックスについて成立するため, 一般の収束インデックスについても $\mathcal{C}(\mathbf{k}; N; M)$ と $\mathcal{C}(\mathbf{k}^\dagger; N; M)$ の間に明示的な全単射を構成できることが期待されるが, 現在までのところ, $\mathbf{k} = (3)$ の場合のみ全単射が構成できている.

定理 2.4. 以下の (i), (ii), (iii) を満たす明示的な写像 $\varphi : \mathcal{C}(3) \rightarrow \mathcal{C}(1, 2)$ が存在する.

(i) φ は全単射.

(ii) 任意の $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\varphi(\mathcal{C}(3; N)) = \mathcal{C}(1, 2; N)$ が成り立つ.

(iii) 任意の $C \in \mathcal{C}(3)$ に対して $p(\varphi(C)) = p(C)$ が成り立つ.

構成の概要

まず, $\varphi_1 : \mathcal{C}(3) \rightarrow \mathcal{C}(2) \times \mathcal{C}(1)$ を以下で定める.

$$(m; n; u_{1,1}, u_{1,2}) \mapsto ((m; u_{1,2}; u_{1,1}), (m; n - u_{1,2}))$$

次に, $\widetilde{\varphi}_2 : \mathcal{C}(2) \times \mathcal{C}(1) \rightarrow \mathcal{C}(2) \times \mathcal{C}(1)$ を以下で定める.

$$((m_2; n_2; u), (m_1; n_1)) \mapsto \begin{cases} ((m_2; n_2; u), (m_1; n_1)) & (0 \leq n_2 - n_1 \leq u) \\ ((m_2; n_2 - n_1; u), (m_1 + m_2; n_1)) & (u < n_2 - n_1) \\ ((m_1 + m_2; n_2; u), (m_1; n_1 - n_2)) & (0 < n_1 - n_2) \end{cases}$$

また, $\varphi_2 = \underbrace{\widetilde{\varphi}_2 \circ \widetilde{\varphi}_2 \circ \dots \circ \widetilde{\varphi}_2}_{\text{enough times}}$ とする.

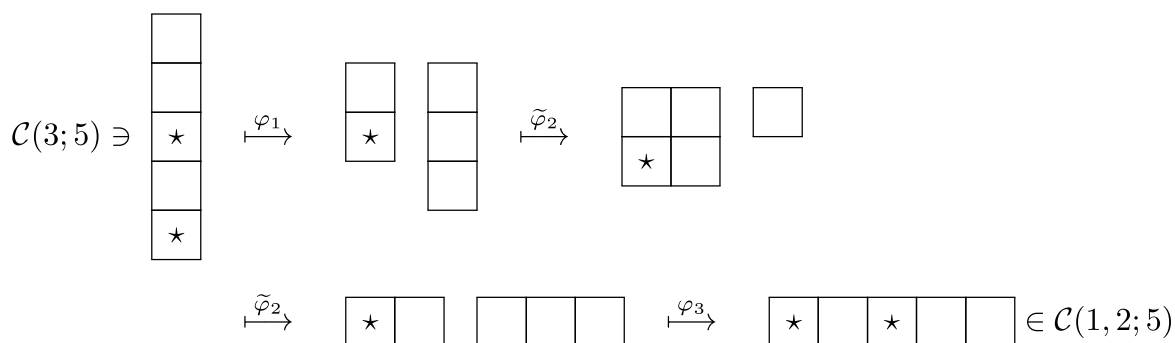
最後に, $\varphi_3 : \varphi_2(\mathcal{C}(2) \times \mathcal{C}(1)) \rightarrow \mathcal{C}(1, 2)$ を以下で定める.

$$((m_2; n_2; u), (m_1; n_1)) \mapsto (m_2, m_2 + m_1; n_2 - n_1, n_1; u)$$

こうして, $\varphi = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ として φ が定まる.

\mathcal{C} は視覚的理解がしやすい点にも特長がある。本稿では \mathcal{C} との対応の詳細には立ち入らないが、一部のマスに印のついたグリッドによって φ を解釈することができる。この方法は、Brindle[3] によって導入された marked partition による BZ type の q 多重ゼータ値の表示に着想を得ている。

例 2.5. 以下の図は、 $(1; 5; 0, 2) \in \mathcal{C}(3; 5)$ を φ によって $(2, 5; 0, 1; 0) \in \mathcal{C}(1, 2; 5)$ に送る様子を図示したものである。



謝辞

今回貴重な講演の機会をくださった、研究代表者の大野泰生先生および関真一朗先生に深く感謝申し上げます。

参考文献

- [1] D. M Bradley, *Multiple q -zeta values*, Journal of Algebra, **283** (2005), 752–798.
- [2] B. Brindle, *Proving dualities for q MZVs with connected sums*, Proc. Japan Acad., **98** (2022), 29–33.
- [3] ———, *a unified approach to q MZVs*, Integers, **24** (2024), no. A6, 41.
- [4] S. Seki and S. Yamamoto, *A new proof of the duality of multiple zeta values and its generalizations*, Int. J. Number Theory, **15** (2019), no. 06, 1261–1265.
- [5] S. Seki, *Connectors*, RIMS Kôkyûroku, **2160** (2020), 15–27.
- [6] T. Suda, *多重ゼータ値の q 類似とその組合せ論的解釈*, 東北大学大学院理学研究科修士論文 (2026).