A MAP BETWEEN ARBORIFICATIONS OF MULTIPLE ZETA VALUES

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
范　谷瑜
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, NAGOYA UNIVERSITY
KU-YU FAN

Abstract. 本稿では、樹形化の方法と樹形化多重ゼータ値について解説し、Manchon が提出した根つき木の Hopf 代数間の写像に関する問題を述べ、その解答を与える.

1. 樹形化と多重ゼータ値

多重ゼータ値 (multiple zeta values) は級数

$$\zeta(k_1,\dots,k_d) \coloneqq \sum_{0<n_1<\cdots<n_d} \prod_{i=1}^{d} \frac{1}{n_i^{k_i}} \qquad k_1,\dots,k_d \in \mathbb{N}, k_d > 1$$

で定義される実数であり、$k_d > 1$ によりその収束が保証される. 反復積分表示は多重ゼータ値の重要な性質の一つである.

$$\zeta(k_1,\dots,k_d) = (-1)^d I(0;1,\{0\}^{k_1-1},\dots,1,\{0\}^{k_d-1};1), \tag{1}$$

ここで

$$I(a_0;a_1,\dots,a_k;a_{k+1}) = \int_{a_0<t_1<\cdots<t_k<a_{k+1}} \prod_{j=1}^{k} \frac{dt_j}{t_j - a_j}.$$

Fauvet と Menous [3] は、根つき木 (rooted tree) を用いて樹形化 (arborification) の方法を構成した. 具体的には、下の (1) 全順序を (2) 根つき梯子木とみなし、これを (3) 根つき木へ拡張し、さらに (4) 半順序へ対応させる. この手順により、根つき木の Hopf 代数と根つき梯子木の Hopf 代数の間の Hopf 代数写像が自然に導かれる.

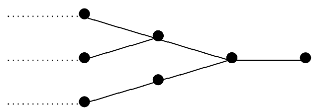
Date: January 9, 2026.

(1) 全順序

$$x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec \cdots \prec x_{n-2} \prec x_{n-1} \prec x_n$$

(2) 根つき梯子木

(3) 根つき木



(4) 半順序

$$\begin{array}{l} \cdots \prec x_e \\ \cdots \prec x_f \end{array} \succ\!\!\prec x_c \quad \begin{array}{l} \\ \cdots \prec x_g \prec x_d \end{array} \succ\!\!\prec x_b \prec x_a$$

Manchon [7] はこの方法を多重ゼータ値に適用し、樹形化多重ゼータ値を定義した.

Definition 1 ([2]). 順序付き三つ組 $Y = (Y, \prec_Y, \delta_Y)$ をとる．ただし、Y は (3) と同様の根つき木、$\prec_Y$ は (4) と同様の半順序、$\delta_Y : V(Y) \to \mathbb{N}$ を頂点にラベルをづける写像とする．この Y に付随する**第一種樹形化多重ゼータ値**を、次の調和級数で定義する：

$$\zeta(Y) \coloneqq \sum_{\substack{n_v \in \mathbb{N} \\ n_u < n_v \text{ if } u \prec_Y v}} \prod_{v \in V(Y)} \frac{1}{n_v^{\delta_Y(v)}}.$$

Definition 2 ([2]). 順序付き三つ組 $X = (X, \prec_X, \delta_X)$ をとる．ただし、X は (3) と同様の根つき木、$\prec_X$ は (4) と同様の半順序、$\delta_X : V(X) \to \{0, 1\}$ を頂点にラベルをづける写像とする．この X に付随する**第二種樹形化多重ゼータ値**を、次の山本積分 [8] で定義する：

$$\zeta(X) \coloneqq I(X) = \int_{\Delta(X)} \prod_{v \in V(X)} \frac{dt_v}{\delta_X(v) + (-1)^{\delta_X(v)} t_v},$$

ここで

$$\Delta(X) \coloneqq \{\mathbf{t} = (t_v)_{v \in V(X)} \in (0,1)^{V(X)} \mid t_u < t_v \text{ if } u \prec_X v\}.$$

以上の順序付き三つ組を装飾根つき木と呼ぶ．言い換えると、樹形化多重ゼータ値は装飾根つき木に付随する多重ゼータ値である.

2. Manchon の問題

Manchon [7] は、装飾根つき木が生成する代数 $\mathbb{Q}[\mathcal{T}^{\mathcal{D}}]$ を考える．ここで $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}$ は、集合 $\mathcal{D}$ で装飾された装飾根つき木全体からなる集合である．第一種樹形化多重ゼータ値に対応する Hopf 代数を $\mathcal{H}_{BCK}^{\mathcal{Y}} \coloneqq (\mathbb{Q}[\mathcal{T}^{\{y_n|n\in\mathbb{N}\}}], *, \Delta)$ と書き、$*$ を調和積、Δ を余積とする [3]．第二種樹形化多重ゼータ値に対応する Hopf 代数を $\mathcal{H}_{BCK}^{\mathcal{X}} \coloneqq (\mathbb{Q}[\mathcal{T}^{\{x_0,x_1\}}], *, \Delta)$ と書き、$\sqcup\!\sqcup$ をシャッフル積、Δ を余積とする [3].

Foissy の定理 [4] を用いて、Manchon は simple arborification

$$\mathfrak{a}_{\mathcal{X}} : \mathcal{H}_{BCK}^{\mathcal{X}} \to \mathbb{Q}\langle\mathcal{X}\rangle$$

と contracting arborification

$$\mathfrak{a}_{\mathcal{Y}} : \mathcal{H}_{BCK}^{\mathcal{Y}} \to \mathbb{Q}\langle\mathcal{Y}\rangle$$

という二つの Hopf 代数準同型を導入した．ここで

$$\mathbb{Q}\langle\mathcal{X}\rangle \coloneqq (\mathbb{Q}\langle x_0, x_1\rangle, *, \Delta), \qquad \mathbb{Q}\langle\mathcal{Y}\rangle \coloneqq (\mathbb{Q}\langle y_n|n\in\mathbb{N}\rangle, *, \Delta)$$

は多重ゼータ値に対応する Hopf 代数である．さらに、式 (1) により両者の間の代数準同型 $\mathfrak{s} : \mathbb{Q}\langle\mathcal{Y}\rangle \to \mathbb{Q}\langle\mathcal{X}\rangle$ が得られる．Manchon は木の構造を保ち、かつ次の図式を可換にするような写像 $\mathfrak{s}^T$ は存在するかという問題を提出した.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}_{BCK}^{\mathcal{Y}} & \xrightarrow{\mathfrak{s}^T} & \mathcal{H}_{BCK}^{\mathcal{X}} \\
{\scriptstyle \mathfrak{a}_{\mathcal{Y}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{a}_{\mathcal{X}}} \\
\mathbb{Q}\langle\mathcal{Y}\rangle & \xrightarrow{\mathfrak{s}} & \mathbb{Q}\langle\mathcal{X}\rangle
\end{array}$$

この問題に対し、Manchon [7] は図式を可換にするが木構造を保たない線形写像 $\mathfrak{a}_{\mathcal{X}}^{-1} \circ \mathfrak{s} \circ \mathfrak{a}_{\mathcal{Y}}$ を与え、Clavier [1] は木構造を保つが図式を可換にしない線形写像 $\mathfrak{s}^N : \mathcal{H}_{BCK}^{\mathcal{Y}} \to \mathcal{H}_{BCK}^{\mathcal{X}}$ を与えた．Foissy [5, 6] の結果に基づき、著者 [2] は平面根つき木の Hopf 代数 $\mathcal{H}_{NBCK}^{P\mathcal{Y}}$ と $\mathcal{H}_{NBCK}^{P\mathcal{X}}$ を用いて問題を平面根つき木の場合へ持ち上げた．さらに、持ち上げた Clavier の写像 $\mathfrak{s}^{PN}$ を線形写像 ϕ に補正して可換な写像 $\mathfrak{s}^{PT}$ を構成し、次の定理を得た.

Theorem 3. 以下の図式は可換である.

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{H}^{P\mathcal{Y}}_{NBCK} \arrow[dr, "\mathfrak{s}^{PN}"] & \\
\mathcal{H}^{P\mathcal{Y}}_{NBCK} \arrow[ur, "\phi"] \arrow[rr, "\mathfrak{s}^{PT}"] \arrow[dd, bend right, "\mathfrak{a}_{P\mathcal{Y}}"'] & & \mathcal{H}^{P\mathcal{X}}_{NBCK} \arrow[d, "\hat{\alpha}_{\mathcal{X}}"'] \arrow[dd, bend left, "\mathfrak{a}_{P\mathcal{X}}"] \\
\mathcal{H}^{\mathcal{Y}}_{BCK} \arrow[u, "\beta_{\mathcal{Y}}"'] \arrow[rr, "\mathfrak{s}^{T}"] \arrow[d, "\mathfrak{a}_{\mathcal{Y}}"] & & \mathcal{H}^{\mathcal{X}}_{BCK} \arrow[d, "\mathfrak{a}_{\mathcal{X}}"'] \\
\mathbb{Q}\langle\mathcal{Y}\rangle \arrow[rr, "\mathfrak{s}"] & & \mathbb{Q}\langle\mathcal{X}\rangle
\end{tikzcd}
$$

References

[1] Clavier, Pierre J. *Double shuffle relations for arborified zeta values.* Journal of Algebra. Volume 543, pp. 111-155. (2020)

[2] Fan, Ku-Yu. *A map between arborifications of multiple zeta values.* preprint. arXiv:2508.20387.

[3] Fauvet, Frédéric and Menous, Frédéric. *Ecalle's arborification-coarborification transforms and Connes-Kreimer Hopf algebra.* Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série,Volume 50, no. 1, pp. 39-83. (2017)

[4] Foissy, Loïc. *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés. I.* Bull. Sci. Math. Volume 126, no. 3, pp. 193-239. (2002)

[5] Foissy, Loïc. *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés. II.* Bull. Sci. Math. Volume 126, no. 4, pp. 249-288. (2002)

[6] Foissy, Loïc. *Faà di Bruno subalgebras of the Hopf algebra of planar trees from combinatorial Dyson-Schwinger equations.* Adv. Math. Volume 218, no. 4, pp. 136-162. (2008)

[7] Manchon, Dominique. *Arborified multiple zeta values.* Springer Proc. Math. Stat. Volume 314, pp. 469-481. (2020)

[8] Yamamoto, Shuji. *Multiple zeta-star values and multiple integrals.* Research Institute for Mathematical Sciences. Volume B68, no. 1, pp. 3-14. (2017)

〒 464-8602 名古屋市千種区不老町名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Email address: `ku-yu.fan.d2@math.nagoya-u.ac.jp`