On the sum of the representation function related to square-full numbers

上智大学 理工学研究科　荻原 芙美
Fumi Ogihara
Graduate School of Science and Technology, Sophia University

概要

本稿では，十分大きな自然数を素数と square-full number の和で表す問題について考える．その表し方の個数を対数関数による重みをつけた表現関数を短区間で和をとった平均について述べる．

1　背景と主定理

1923 年に G. H. Hardy と J. E. Littlewood によって，以下が予想された．

予想 1.1　(Hardy–Littlewood 予想 [4]).　十分大きな自然数は平方数であるか, そうでないものは素数と平方数の和で表せる．つまり, 十分大きな自然数 N は, 自然数 n と素数 p で

$$N = n^2 \quad \text{もしくは} \quad N = p + n^2$$

と書ける．

この問題を考えるために, 十分大きな自然数 N を素数と平方数の和で表した表し方の個数を対数関数の重み付きで数える以下の表現関数を考える:

$$R_{HL}(N) \coloneqq \sum_{p+n^2=N} \log p.$$

このような関数のことを表現関数と呼ぶ．2016 年に A. Languasco と A. Zaccagnini [8] は，表現関数 $R_{HL}(N)$ を短区間 $X < N \leq X + H$ で平均をとったものに対して以下の評価を得た．

定理 1.2 (Languasco–Zaccagnini (2016)). 実数 $X, H \geq 4$, $\varepsilon > 0$ に対し、ある定数 $C > 0$ が存在して, 範囲

$$X^{\frac{1}{2}} \exp\Big(-C\Big(\frac{\log X}{\log\log X}\Big)^{\frac{1}{3}}\Big) \leq H \leq X^{1-\varepsilon}$$

で

$$\sum_{X < N \leq X+H} R_{HL}(N) = HX^{\frac{1}{2}} + O\Big(HX^{\frac{1}{2}} \exp\Big(-C\Big(\frac{\log X}{\log\log X}\Big)^{\frac{1}{3}}\Big)\Big) \tag{1}$$

が成り立つ.

これに対して, Y. Suzuki [11] は H の範囲を改良した.

定理 1.3 (Suzuki (2023)). (1) が, 範囲 $X^{\frac{32-4\sqrt{15}}{49}+\varepsilon} \leq H \leq X^{1-\varepsilon}$ で成り立つ.

本稿では，これらの先行研究に着想を得て，square-full number に関する表現関数の短区間における平均について考察する．ここで，square-full number の定義は以下である．

定義 1.4 正の整数 n のすべての素因子 p について $p^2 | n$ であるとき, n は square-full number であると言う.

$Q(x)$ を x 以下の square-full number の個数を表す関数とすると, 以下が示されている. ただし, $\zeta(s)$ はリーマンゼータ関数である.

補題 1.5 (Bateman–Grosswald (1958), [1]). 実数 $x \geq 1$ に対して,

$$Q(x) = \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{\zeta(3)} x^{\frac{1}{2}} + \frac{\zeta(\frac{2}{3})}{\zeta(2)} x^{\frac{1}{3}} + O(x^{\frac{1}{6}})$$

が成り立つ.

補題 1.6 (Filaseta–Trifonov (1994), [2]). $\theta = \frac{5}{39}$ に対し, 範囲 $x^{\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon} \leq H \leq x^{1-\epsilon}$ で,

$$Q(x+H) - Q(x) \sim \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{2\zeta(3)} H x^{-\frac{1}{2}} \quad (x \to \infty) \tag{2}$$

が成り立つ.

2002 年に, O. Trifonov [12] は補題 1.6 における H の条件を改良した.

補題 1.7 (Trifonov (2002), [12]). $\theta = \frac{19}{154}$ で, (2) が成り立つ.

以下, $\mathscr{Q} := \{n \in \mathbb{N} \mid n$ は square-full number$\}$ とし,

$$R(N) := \sum_{\substack{p+f=N \\ f\in\mathscr{Q}}} \log p$$

について考える. 和を分解することによって,

$$\sum_{X<N\leq X+H} R(N) = \sum_{p\leq X+H} \log p \sum_{\substack{X-p<f\leq X-p+H \\ f\in\mathscr{Q}}} 1$$

であり, これに補題 1.6 および 1.7 を用いると, 次が示せる.

命題 1.8　(O.–Suzuki).　範囲 $X^{\frac{1}{2}+\theta+\varepsilon} \leq H \leq X$ で, $\theta = \frac{5}{39}, \frac{19}{154}$ に対して

$$\sum_{X<N\leq X+H} R(N) \sim \sum_{p\leq X+H} \log p \left(\frac{\zeta(\frac{3}{2})}{2\zeta(3)} H X^{-\frac{1}{2}} \right) \sim \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{\zeta(3)} H X^{\frac{1}{2}} \quad (X \to \infty)$$

が成り立つ.

我々は命題 1.8 とは異なる方法で，θ の値を改善した．以下が主定理である．

定理 1.9　([9]). 範囲 $X^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \leq H \leq X^{1-\varepsilon}$ で, 以下が成り立つ.

$$\sum_{X<N\leq X+H} R(N) = \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{\zeta(3)} H X^{\frac{1}{2}} (1 + O((\log X)^{-1})). \tag{3}$$

リーマンゼータ関数の非自明な零点に関する評価を用いることで，定理 1.9 の H の範囲をさらに改善した.

定理 1.10　([10]). 範囲 $X^{\frac{32-4\sqrt{15}}{49}+\varepsilon} \leq H \leq X^{1-\varepsilon}$ で, (3) が成り立つ.

2　証明の共通部分

定理 1.9 と 1.10 は，ある段階まで共通の手法によって行われる．本節ではその共通部分について述べる.

補題 2.1　任意の $f \in \mathscr{Q}$ は, ある自然数 a と square-free number b で

$$f = a^2 b^3$$

と一意的に表せる.

これより, $R(N)$ は以下のように書き換えられる．ここで, $\mu(b)$ は Mobius 関数である.

$$R(N) = \sum_{p+a^2b^3=N} (\log p)\mu(b)^2.$$

関数 $R(N)$ に対して, B を実数値のパラメータとして以下の関数を考える.

$$\widetilde{R}_B(N) := \sum_{\substack{p+a^2b^3=N \\ b\le B}} (\log p)\mu(b)^2.$$

命題 2.2　(O.–Suzuki).　自然数 N と実数 $B \ge 1$ について, 以下が成り立つ.

$$R(N) = \widetilde{R}_B(N) + O((N^{\frac{1}{2}}\log N)B^{-\frac{1}{2}}).$$

証明 $R(N)$ と $\widetilde{R}_B(N)$ の差を考えることで, 以下を得る.

$$R(N) - \widetilde{R}_B(N) = \sum_{\substack{p+a^2b^3=N \\ b>B}} (\log p)\mu(b)^2 \le N^{\frac{1}{2}}\log N \sum_{b>B} b^{-\frac{3}{2}} \ll (N^{\frac{1}{2}}\log N)B^{-\frac{1}{2}}.$$

以上より，成り立つ.　□

命題 2.2 において $B := (\log X)^4$ とすると

$$\sum_{X<N\le X+H} R(N) = \sum_{X\le N\le X+H} \widetilde{R}_B(N) + O(HX^{\frac{1}{2}}(\log X)^{-1}) \tag{4}$$

が得られる．よって，あとは右辺の第 1 項について考えればよい.

3　定理 1.9 の証明

この節では, 定理 1.9 の証明の概略を述べる．$\mathscr{Q}_B := \{n \in \mathbb{N} \,|\, n = a^2b^3 \ (b \le B$ かつ $b:$ square-free number$)\}$ とおく．素数定理を用いることで,

$$\begin{aligned}\sum_{X<N\le X+H} \widetilde{R}_B(N) &= \sum_{\substack{f\le X-2H \\ f\in\mathscr{Q}_B}} \sum_{X-f<p\le X+H-f} \log p + \sum_{\substack{X-2H<f\le X+H \\ f\in\mathscr{Q}_B}} \sum_{X-f<p\le X+H-f} \log p \\ &= \sum_{m^2\le X-2H} \sum_{\substack{m^2\le f<(m+1)^2 \\ f\le X-2H \\ f\in\mathscr{Q}_B}} \sum_{X-f<p\le X+H-f} \log p + O(H^{\frac{3}{2}}). \end{aligned} \tag{5}$$

(5) の右辺第 1 項に以下の補題を用いる.

補題 3.1　$m^2 \leq f \leq (m+1)^2$ において

$$\sum_{X-f<p\leq X+H-f} \log p = \int_m^{m+1} \sum_{X-u^2<p\leq X+H-u^2} \log p \, du + O(m \log X)$$

が成り立つ.

証明 $m^2 \leq f \leq (m+1)^2$ において

$$\left| \sum_{X-f<p\leq X+H-f} \log p \quad - \sum_{X-u^2<p\leq X+H-u^2} \log p \right| \ll m \log X$$

である．両辺を $m \leq u \leq m+1$ で積分をとる事によって，補題を示すことができる． □

補題 3.1 より,

$$\begin{aligned}
&\sum_{X<N\leq X+H} \widetilde{R}_B(N) \\
&= \sum_{m^2\leq X-2H} \sum_{\substack{m^2\leq f<(m+1)^2 \\ f\leq X-2H \\ f\in \mathscr{Q}_B}} \left(\int_m^{m+1} \sum_{X-u^2<p\leq X+H-u^2} \log p \, du + O(m \log X) \right) + O(H^{\frac{3}{2}}) \\
&= \sum_{m^2\leq X-2H} \sum_{\substack{m^2\leq f<(m+1)^2 \\ f\leq X-2H \\ f\in \mathscr{Q}_B}} \int_m^{m+1} \left(\sum_{X-u^2<p\leq X+H-u^2} \log p - H \right) du \\
&\quad + \sum_{m^2\leq X-2H} \sum_{\substack{m^2\leq f<(m+1)^2 \\ f\leq X-2H \\ f\in \mathscr{Q}_B}} H + O(H^{\frac{3}{2}} + X \log X).
\end{aligned}$$

第 1 項を Σ_1, 第 2 項を Σ_2 とおく.

まずは Σ_1 の評価を行う. 評価には以下の定理を用いる.

定理 3.2　(Huxley (1972), [5]).　A を任意の正の実数とする．$X^{\frac{1}{6}+\varepsilon} \leq H \leq X$ で,

$$\int_X^{2X} \left| \sum_{x<p\leq x+H} \log p - H \right|^2 dx \ll H^2 X (\log X)^{-A}$$

が成り立つ.

この定理と Cauchy-Schwarz の不等式を用いることで,

$$
\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \sum_{m^2 \le X-2H} \sum_{\substack{m^2 \le f < (m+1)^2 \\ f \le X-2H \\ f \in \mathscr{Q}_B}} \int_m^{m+1} \Bigg(\sum_{X-u^2 < p \le X+H-u^2} \log p - H \Bigg) du \\
&\ll B \int_1^{[\sqrt{X-2H}]+1} \Bigg| \sum_{X-u^2 < p \le X+H-u^2} \log p - H \Bigg| du \\
&\ll B \Bigg(\int_H^{X-1} \Bigg| \sum_{t < p \le t+H} \log p - H \Bigg|^2 dt \Bigg)^{\frac{1}{2}} (\log X)^{\frac{1}{2}} \ll H X^{\frac{1}{2}} (\log X)^{-A}.
\end{aligned}
$$

次に, Σ_2 の評価を行う. Σ_2 を以下のように分解し直す.

$$
\Sigma_2 = \sum_{m^2 \le X-2H} \sum_{\substack{m^2 \le f < (m+1)^2 \\ f \le X-2H \\ f \in \mathscr{Q}_B}} H = \sum_{\substack{f \le X-2H \\ f \in \mathscr{Q}_B}} H = \sum_{\substack{f \le X-2H \\ f \in \mathscr{Q}}} H - \sum_{\substack{f \le X-2H \\ f \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}_B}} H.
$$

第 1 項は, 定理 1.5 より以下のように評価できる.

$$
\sum_{\substack{f \le X-2H \\ f \in \mathscr{Q}}} H = \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{\zeta(3)} H X^{\frac{1}{2}} + O(H^2 X^{-\frac{1}{2}} + H X^{\frac{1}{2}} (\log X)^{-A}).
$$

第 2 項は, 以下のように評価ができる.

$$
\sum_{\substack{f \le X-2H \\ f \in \mathscr{Q} \setminus \mathscr{Q}_B}} H \ll \sum_{B < b \le X^{\frac{1}{2}}} \sum_{a^2 \le \frac{X}{b^3}} H \ll \sum_{b > B} H X^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{3}{2}} \ll H X^{\frac{1}{2}} (\log X)^{-A}.
$$

これまでの評価を合わせると,

$$
\sum_{X < N \le X+H} \widetilde{R}_B(N) = \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{\zeta(3)} H X^{\frac{1}{2}} + O(H X^{\frac{1}{2}} (\log X)^{-A} + H^{\frac{3}{2}} + H^2 X^{-\frac{1}{2}} + X \log X).
$$

$X^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \le H \le X^{1-\varepsilon}$ であることから, 以下を得る.

$$
\sum_{X < N \le X+H} \widetilde{R}_B(N) = \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{\zeta(3)} H X^{\frac{1}{2}} \Big(1 + O((\log X)^{-A}) \Big).
$$

4　定理 1.10 の証明

この節では，定理 1.10 の証明の概略を述べる．まず，(4) の右辺第 1 項によく知られている von Mangoldt 関数 $\Lambda(m)$ に関する評価

$$\sum_{m\le x}\Lambda(m)=\sum_{p\le x}\log p+O(x^{\frac{1}{2}})$$

を用いることで，

$$\begin{aligned}\sum_{X<N\le X+H}R_B(N)&=\sum_{\substack{X<m+f\le X+H\\ f\in\mathcal{Q}_B}}\Lambda(m)+O(HX^{\frac{1}{2}}(\log X)^{-1})\\&=\sum_{\substack{f\le X\\ f\in\mathcal{Q}_B}}\sum_{X-f<m\le X+H-f}\Lambda(m)+O(HX^{\frac{1}{2}}(\log X)^{-1})\end{aligned}\tag{6}$$

を得る．リーマンゼータ関数の非自明な零点を $\rho=\beta+i\gamma$ とする．(6) の第 1 項を，以下の明示公式を用いて評価をする．

補題 4.1　([11], Lemma 9). 実数 X,T,x に対して $2\le T\le 2X$ が $0\le x\le X$ 成り立つとき，

$$\sum_{m\le x}\Lambda(m)=x-\sum_{\substack{\rho\\ |\gamma|\le T}}\frac{x^{\rho}}{\rho}+O(XT^{-1}(\log X)^2)$$

が成り立つ．

この補題を (6) の第 1 項に用いることで，

$$\begin{aligned}\sum_{X<N\le X+H}R_B(N)=&\sum_{\substack{f\le X\\ f\in\mathcal{Q}_B}}H-\sum_{\substack{\rho\\ |\gamma|\le T}}\frac{1}{\rho}\sum_{\substack{f\le X\\ f\in\mathcal{Q}_B}}\Big((X+H-f)^{\rho}-(X-f)^{\rho}\Big)\\&+O(X^{\frac{3}{2}}T^{-1}(\log X)^2+HX^{\frac{1}{2}}(\log X)^{-1})\end{aligned}$$

を得る．次に，上記の右辺第 2 項について評価をする．

補題 4.2 整数 n と実数 $\alpha \leq 1$, $|\gamma| \geq 1$, $1 \leq U \leq V \leq Q$ に対して,

$$\int_U^V u^{\alpha+i\gamma-1} \exp\left(2\pi in(Q-u)^{\frac{1}{2}}\right)du \ll \begin{cases} \dfrac{V^\alpha \log X}{|\gamma|^{\frac{1}{2}}} & (\alpha \geq 0), \\ \dfrac{U^\alpha \log X}{|\gamma|^{\frac{1}{2}}} & (\alpha \leq 0), \\ \dfrac{Q^{\frac{1}{2}}}{|n|} & (|n| > 2Q^{\frac{1}{2}}|\gamma|) \end{cases}$$

が成り立つ.

補題 4.3 リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の非自明な零点 $\rho = \beta + i\gamma$ が $|\gamma| \leq 2X$ を満たすとき，範囲 $X^\varepsilon \leq H \leq X^{1-\varepsilon}$ で

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{f \leq X \\ f \in \mathscr{Q}_B}} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T}} \left(\frac{(X+H-f)^\rho}{\rho} - \frac{(X-f)^\rho}{\rho}\right) \\ \ll &\left| \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T}} \frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\rho+\frac{3}{2})}\left((X+H)^{\rho+\frac{1}{2}} - X^{\rho+\frac{1}{2}}\right)\right| + \left| \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T}} \frac{(X+H)^\rho - X^\rho}{2\rho} B\right| \\ &+ (\log X)^2 \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T}} H^\beta |\gamma|^{\beta - \frac{1}{2}} + BT(\log X)^2 + HX^{\frac{1}{2}}(\log X)^{-1} \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明 $X \leq Q \leq X+H$ として

$$\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T}} \frac{1}{\rho} \sum_{\substack{f \leq X \\ f \in \mathscr{Q}_B}} (Q-f)^\rho$$

を考える．実数 x に対し，x の小数部分を $\{x\}$ とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T}} \frac{1}{\rho} \sum_{\substack{f \leq X \\ f \in \mathscr{Q}_B}} (Q-f)^\rho &= \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T}} \frac{1}{\rho} \sum_{b \leq B} \mu(b)^2 \sum_{a^2 \leq \frac{X}{b^3}} (Q - a^2b^3)^\rho \\ = \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leq T}} \sum_{b \leq B} \mu(b)^2 &\left(\frac{1}{2\rho}\int_0^{\frac{X}{b^3}} (Q-b^3u)^\rho u^{-\frac{1}{2}} du - \frac{1}{\rho}\int_0^{\frac{X}{b^3}} (Q-b^3u)^\rho d\left(\{u^{\frac{1}{2}}\} - \frac{1}{2}\right)\right). \end{aligned} \tag{7}$$

(7) の第 1 項について，ベータ関数 $B(x,y)$ はガンマ関数 $\Gamma(x)$ を用いて

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

とできることから

$$\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|\le T}}\sum_{b\le B}\mu(b)^2\biggl(\frac{1}{2\rho}\int_0^{\frac{X}{b^3}}(Q-b^3u)^\rho u^{-\frac12}du\biggr)$$

$$=\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|\le T}}\sum_{b\le B}\mu(b)^2\biggl(\frac{1}{2\rho}b^{-\frac32}\int_0^{Q}u^{-\frac12}(Q-u)^\rho du\biggr)+O(HX^{\frac12}(\log X)^{-1})$$

$$=O\biggl(\biggl|\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|\le T}}\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\frac12)}{\Gamma(\rho+\frac32)}Q^{\rho+\frac12}\biggr|+HX^{\frac12}(\log X)^{-1}\biggr).$$

(7) の第 2 項については，部分積分と，$\{u\}-\dfrac12=-\displaystyle\sum_{n\ne0}\frac{e^{2\pi inu}}{2\pi in}$ であることにより，

$$\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|\le T}}\sum_{b\le B}\mu(b)^2\biggl(\frac{1}{\rho}\int_0^{\frac{X}{b^3}}(Q-b^3u)^\rho d\Bigl(\{u^{\frac12}\}-\frac12\Bigr)\biggr)$$

$$=\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|\le T}}\sum_{b\le B}\mu(b)^2\biggl(\sum_{n\ne0}\frac{b^3}{2\pi in}\int_0^{\frac{X}{b^3}-\frac{1}{b^3}}(Q-b^3u)^{\rho-1}e^{2\pi inu^{\frac12}}du\biggr)$$

$$+O\biggl(BT(\log X)^2+\biggl|\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|\le T}}\frac{Q^\rho}{2\rho}B\biggr|+HX^{\frac12}(\log X)^{-1}\biggr)$$

を得る．第 1 項と第 2 項の評価を合わせることによって，

$$\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|\le T}}\frac{1}{\rho}\sum_{\substack{f\le X \\ f\in\mathscr{Q}_B}}\Bigl((X+H-f)^\rho-(X-f)^\rho\Bigr)$$

$$=\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|\le T}}\sum_{b\le B}\mu(b)^2\biggl(\sum_{n\ne0}\frac{b^3}{2\pi in}\int_0^{\frac{X}{b^3}-\frac{1}{b^3}}(X+H-b^3u)^{\rho-1}e^{2\pi inu^{\frac12}}du\biggr)$$

$$+\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|\le T}}\sum_{b\le B}\mu(b)^2\biggl(\sum_{n\ne0}\frac{b^3}{2\pi in}\int_0^{\frac{X}{b^3}-\frac{1}{b^3}}(X-b^3u)^{\rho-1}e^{2\pi inu^{\frac12}}du\biggr)$$

$$+O\biggl(\biggl|\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|\le T}}\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\frac12)}{\Gamma(\rho+\frac32)}\Bigl((X+H)^{\rho+\frac12}-X^{\rho+\frac12}\Bigr)\biggr|+\biggl|\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|\le T}}\frac{(X+H)^\rho-X^\rho}{2\rho}B\biggr|$$

$$+BT(\log X)^2+HX^{\frac12}(\log X)^{-1}\biggr).$$

右辺第 3 項と第 4 項に補題 4.2 を用いることで，補題が成り立つ． □

よって，

$$M=\sum_{\substack{f\le X\\ f\in\mathcal{Q}_B}}H,\quad R_1=\sum_{\substack{\rho\\ |\gamma|\le T}}\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\rho+\frac{3}{2})}\Big((X+H)^{\rho+\frac{1}{2}}-X^{\rho+\frac{1}{2}}\Big),$$

$$R_2=\sum_{\substack{\rho\\ |\gamma|\le T}}\frac{(X+H)^{\rho}-X^{\rho}}{2\rho}B,\quad R_3=(\log X)^2\sum_{\substack{\rho\\ |\gamma|\le T}}H^{\beta}|\gamma|^{\beta-\frac{1}{2}}$$

とすると

$$\sum_{X<N\le X+H}R_B(N)=M+O(|R_1|+|R_2|+R_3+(X^{\frac{3}{2}}T^{-1}+BT)(\log X)^2+HX^{\frac{1}{2}}(\log X)^{-1})$$

と書ける．条件 $X^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\le H$ の下で，$B=(\log X)^4$ とすると，

$$(X^{\frac{3}{2}}T^{-1}+BT)(\log X)^2\ll HX^{\frac{1}{2}}(\log X)^{-1}$$

であるので，この条件のもとで

$$\sum_{X<N\le X+H}R_B(N)=M+O(R_1+R_2+R_3+HX^{\frac{1}{2}}(\log X)^{-1})$$

を得る．次に，M についての評価を行う．評価には以下を用いる．

$$\sum_{n\le x}\frac{\mu(n)^2}{n^s}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}+O(x^{-s+1}).$$

上記より，$B=(\log X)^4$ とすると，

$$\begin{aligned}M=H\sum_{b<B}\mu(b)^2\sum_{a^2\le\frac{X}{b^3}}1&=H\Big(X^{\frac{1}{2}}\sum_{b<B}\frac{\mu(b)^2}{b^{\frac{3}{2}}}+O(B)\Big)\\&=\frac{\zeta(\frac{3}{2})}{\zeta(3)}HX^{\frac{1}{2}}+O(HX^{\frac{1}{2}}(\log X)^{-1}).\end{aligned}$$

次に，R_1 の評価を行う．Stirling の公式を用いることで，

$$\begin{aligned}R_1&=\sum_{\substack{\rho\\ |\gamma|\le T}}\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\rho+\frac{3}{2})}\Big(\rho+\frac{1}{2}\Big)\int_X^{X+H}u^{\rho-\frac{1}{2}}du\\&\ll\sum_{\substack{\rho\\ |\gamma|\le T}}\frac{1}{|\gamma|^{\frac{3}{2}}}\times|\gamma|HX^{\beta-\frac{1}{2}}=HX^{-\frac{1}{2}}\sum_{\substack{\rho\\ |\gamma|\le T}}\frac{X^{\beta}}{|\gamma|^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

と評価できる．次に，R_2 についての評価を行うと，

$$R_2 = B \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \le T}} \frac{1}{2} \int_X^{X+H} u^{\rho-1} du \ll HX^{-\frac{1}{2}} B \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \le T}} \frac{X^{\beta}}{|\gamma|^{\frac{1}{2}}}.$$

ここで，リーマンゼータ関数の非自明な零点についての結果を述べる．N. M. Korobov と I. M. Vinogradov は以下の定理を得た．

定理 4.4 ([7], Theorem 6.1). 複素数 $s = \sigma + it$ について，定数 $c_0 > 0$ が存在して，

$$\sigma > 1 - c_0 (\log \tau)^{-\frac{2}{3}} (\log\log \tau)^{-\frac{1}{3}}, \quad \tau = |t| + 4$$

において $\zeta(s) \neq 0$.

M. N. Huxley と A. E. Ingham は以下の零点密度定理を得た．

定理 4.5 ([5, 6]) 実数 $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$, $T \ge 2$ に対して，

$$N(\alpha, T) \ll T^{c(\alpha)} (\log T)^A, \quad c(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{3(1-\alpha)}{3\alpha - 1} & (\dfrac{3}{4} \le \alpha \le 1), \\ \dfrac{3(1-\alpha)}{2-\alpha} & (\dfrac{1}{2} \le \alpha \le \dfrac{3}{4}) \end{cases}$$

が成り立つ．ただし，$A > 0$ は定数で，

$$N(\alpha, T) := \#\{\rho \,|\, \alpha \le \beta \le 1, |\gamma| \le T\}.$$

注意 4.6 最近，L. Guth and J. Maynard [3] によって，定理 4.5 の改善がされた．彼らの結果を用いても，現時点では定理 1.10 の結果には影響はない．

定理 4.4 と定理 4.5 を用いることで，以下の補題を得る．

補題 4.7 実数 $1 \le K \le Y \le X^2$ に対して，以下が成り立つ．

$$\sum_{\substack{\rho \\ K \le |\gamma| \le 2K}} Y^{\beta} \ll (Y^{\phi(\lambda)} + Y^{1-\eta+2\eta\lambda})(\log X)^A.$$

ここで，$A, c_1 > 0$ は定数で，

$$\phi(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{3}{5}\lambda + \dfrac{3}{4} & (0 \le \lambda \le \dfrac{25}{48}), \\ 3\lambda + 2(1 - \sqrt{3\lambda}) & (\dfrac{25}{48} \le \lambda \le \dfrac{3}{4}), \\ \lambda + \dfrac{1}{2} & (\dfrac{3}{4} \le \lambda \le 1), \end{cases}$$

$$\eta = c_1 (\log X)^{-\frac{2}{3}} (\log\log X)^{-\frac{1}{3}}, \quad \lambda = \frac{\log K}{\log Y}.$$

以下，$XH^{-1} = X^{\Delta}$ とする．上記の補題を用いると，

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 \ll & HX^{-\frac{1}{2}} B \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \le T}} \frac{X^{\beta}}{|\gamma|^{\frac{1}{2}}} + (\log X)^2 \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \le T}} H^{\beta} |\gamma|^{\beta - \frac{1}{2}} \\ \ll & HX^{\phi(\Delta) - \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{20}} + HX^{\phi(\Delta) + \frac{1}{2}\Delta - 1 + \frac{\varepsilon}{20}} \end{aligned}$$

が得られる．

補題 4.8　方程式

$$\phi(\lambda_1) - \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \phi(\lambda_2) + \frac{1}{2}\lambda_2 - 1 = \frac{1}{2}$$

の解は，

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{17 + 4\sqrt{15}}{49}$$

である．

補題 4.9　範囲 $0 \le \lambda \le \min(1, \frac{17+4\sqrt{15}}{49}) - \varepsilon$ で以下が成り立つ．

$$\phi(\lambda) - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{10}, \quad \phi(\lambda) + \frac{1}{2}\lambda - 1 \le \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{10}.$$

補題 4.8 と 4.9 より，条件 $X^{1 - \frac{17+4\sqrt{15}}{49} + \varepsilon} = X^{\frac{32-4\sqrt{15}}{49} + \varepsilon} \le H \le X^{1-\varepsilon}$ で

$$R_1 + R_2 + R_3 \ll HX^{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{20}} \ll HX^{\frac{1}{2}} (\log X)^{-1}.$$

これまでの評価をまとめると，$B = (\log X)^4$ としたとき，$X^{\frac{32-4\sqrt{15}}{49} + \varepsilon} \le H \le X^{1-\varepsilon}$ で，

$$\begin{aligned} \sum_{X < N \le X+H} R_B(N) =& M + O(R_1 + R_2 + R_3 + HX^{\frac{1}{2}} (\log X)^{-1}) \\ =& \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{\zeta(3)} HX^{\frac{1}{2}} + O(HX^{\frac{1}{2}} (\log X)^{-1}) \end{aligned}$$

となり，定理 1.10 を得る．

謝辞

本稿は 2025 年度 RIMS 共同研究 (公開型)「解析的整数論とその周辺」における講演をもとに作成されたものです．講演の機会を与えてくださった世話人である谷口隆先生，立谷洋平先生に感謝申し上げます．本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2169 の支援を受けたものです．

参考文献

[1] P. T. Bateman and E. Grosswald, *On a theorem of Erdös and Szekeres*, Illinois J. Math. **2** (1958), 88–98.

[2] M. Filaseta and O. Trifonov, *The distribution of squarefull numbers in short intervals*, Acta Arith. **67**, no. 4 (1994), 323–333.

[3] L. Guth and J. Maynard, *New large value estimates for Dirichlet polynomials*, Annals of Math. **203** (2) (2026), 623–675.

[4] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of 'Partitio Numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math. **44** (1) (1923), 1–70.

[5] M. N. Huxley, *On the difference between consecutive primes*, Invent. Math. **15** (1972), 164–170.

[6] A. E. Ingham, *On the estimation of* $N(\sigma, T)$, Q. J. Math **8** (1940), 291–292.

[7] A. Ivić, The Riemann Zeta-Function, *Wiley, New York* (1985).

[8] A. Languasco and A. Zaccagnini, *Short intervals asymptotic formulae for binary problems with primes and powers, I: density 3/2*, Ramanujan J. **42** (2) (2017), 371–383.

[9] F. Ogihara and Y. Suzuki, *"Asymptotic formula for the sum of a prime and a square-full number in short intervals"*, preprint, arXiv:2405.04509 [math.NT] (2024).

[10] F. Ogihara, *"Asymptotic formula for the sum of a prime and a square-full number in short intervals shorter than* $X^{1/2}$*"*, arXiv:2505.03447[math.NT] (2025).

[11] Y. Suzuki, *On the sum of a prime power and a power in short intervals*, Ark. Mat. **61** (2023), 437–474.

[12] O. Trifonov, *Lattice points close to a smooth curve and squarefull numbers in short intervals*, J. London Math. Soc. **65** (2002), 303–319.