Quantitative estimates of hybrid universality for Dirichlet L-functions

中井 啓太（Keita Nakai）*

名古屋大学多元数理科学研究科

1 導入

複素数を s として, 実部を σ, 虚部を t とする. Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ は, $\sigma > 1$ なる複素数に対し, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ により定義される関数である. この関数は $\sigma > 1$ において絶対収束し, さらに全平面の有理型関数に解析接続できることが知られている. さらに, Riemann ゼータ関数は素数と密接な関係があることが知られており, この関数の値の分布を調べることは素数の観点からも重要となる. Riemann ゼータ関数の値の分布を調べる研究の 1 つの結果として, 普遍性定理という Riemann ゼータ関数によるある種の近似定理が存在する. この定理は, 1975 年に Voronin により初めて証明され, 現在では以下のような主張で知られている. ここで簡単のため, $D(a,b) = \{s : a < \sigma < b\}$ とし, $\mathbb{C}$ の部分集合 K に対し, K 上で零点を持たない連続かつ, K の内部で正則な関数からなる集合を $H_0^c(K)$ とする.

Theorem 1.1 (Voronin [14], 1975)**.** K を $\mathbb{C}$ でコンパクトかつ補集合が連結な $D(1/2,1)$ 内の集合とし, $f \in H_0^c(K)$ とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

ただし, meas を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度とする.

大雑把な書き方をしてしまえば, 零点を持たない正則関数は Riemann ゼータ関数の虚軸方向の平行移動 $+i\tau$ で一様に近似でき, さらに近似できる τ の集合は正の下極限密度を持つ. 即ち, 普遍性定理はある種の Riemann ゼータ関数の値の挙動の複雑さの定式化であるといえる. この普遍性定理は様々なゼータ関数, L 関数に拡張されている. 例えば, Dirichlet L 関数, Dedekind ゼータ関数, Selberg クラスの L 関数, Hurwitz ゼータ関数に対して証明がされている. さらに, より一般的な形での普遍性定理も証明されている. Gonek [5] は, 次の Dirichlet L 関数に対する Hybrid 同時普遍性定理を証明した.

Theorem 1.2. q を 1 以上の整数とし, K を $\mathbb{C}$ でコンパクトかつ補集合が連結な $D(1/2,1)$ 内の集合とする.

* m21029d@math.nagoya-u.ac.jp

q の各素因子 $p|q$ に対し, $0 \le \theta_p < 1$ とし, 各 $\chi \pmod q$ に対し, $f_\chi \in H_0^c(K)$ とする. このとき, $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \max_{\chi \bmod q} \sup_{s\in K} |L(s+i\tau,\chi) - f_\chi(s)| < \varepsilon, \right.$$
$$\left. \max_{p|q} \left\| \tau \frac{\log p}{2\pi} - \theta_q \right\| < \varepsilon \right\} > 0$$

が成り立つ. ただし, $\|x\|$ は x と一番近い整数との距離とする.

すなわち, Hybrid 同時普遍性定理は, 同時普遍性定理と Kroneker–Weyl の近似定理を同時に考える近似の定理である.

Remark 1.3. 実際には, Gonek は [5] においては近似が成り立つ τ の存在性しか示していないことに注意する. 上の定式化は, Gonek の結果 [5] と Kaczorowski–Kulas [7] の結果を組み合わせた結論である. 現在では Hybrid 同時普遍性定理はもう少し一般化されているが, ここでは省略する.

一方, 普遍性定理の別の発展として, 普遍性定理の定量化がある. Voronin の普遍性定理は次の 2 つのパートに分けることが出来る.

(E1) ある $T > 0$ に対し, ある $\tau \in [T, 2T]$ が存在し,

$$\sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

(E2) ある定数 $C = C(f, K, \varepsilon) > 0$ が存在し,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [T,2T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} \ge C$$

が成り立つ.

現在の普遍性定理の証明方法は, Voronin [14] の手法, または確率論を用いた Bagchi [1] の手法が主流である. しかしながら, Voronin の手法, 及び Bagchi の手法において, それぞれ非定量的な結果を用いるため, 彼らの手法で (E1), (E2) を定量的に求めるのは困難である.

(E1) に関しての研究はいくつかあり, 例えば, 次の結果がよく知られている.

Theorem 1.4 ([4, Theorem 4])**.** $s_0 = \sigma_0 + it_0$, $1/2 < \sigma_0 < 1$, $r > 0$, $K = \{s \in \mathbb{C} : |s - s_0| \le r\}$, g を K 上解析的かつ $g(s_0) \ne 0$ を満たすとする. さらに $M(g) = \max_{|s-s_0|=r} |g(s)|$ とし, $0 < \varepsilon < 1$ と $0 < \delta_0 < 1$ を固定する. もし, $N = N(\delta_0, \varepsilon, g)$ と $T = T(g, \varepsilon, \sigma_0, \delta_0, N)$ が

$$M(g)\frac{\delta_0^N}{1-\delta_0} < \frac{\varepsilon}{3}$$

及び

$$T \ge \max\{c_0(\sigma_0, N)\exp(\exp(c_1(\sigma_0,N)A(N,g,(\varepsilon/3)\exp(\delta_0 r)))), r\}$$

を満たすならば, ある $\tau \in [T - t_0, 2T - t_0]$ が存在し,

$$\max_{|s-s_0|\le\delta r} |\zeta(s+i\tau) - g(s)| < \varepsilon$$

が

$$M(\tau)\frac{\delta^N}{1-\delta} < \frac{\varepsilon}{3}$$

を満たす全ての $0 \le \delta < \delta_0$ に対し成り立つ．ここで, $c_0(\sigma_0, N), c_1(\sigma_0, N)$, $A(N, g, (\varepsilon/3)\exp(\delta_0 r))$ は定量的な定数であり, $M(\tau) = \max_{|s-s_0|=r} |\zeta(s+i\tau)|$ である．

この結果は, Selberg クラスの L 関数に拡張され [2], 最近では短区間における Riemann ゼータ関数に対する弱い普遍性定理でも考えられている [12].

一方, Garunkštis [3] は Good [6] の手法を用いることにより (E2) に関する結果を得た．

Theorem 1.5 ([3, Corollary 2])**.** $0 < \varepsilon < 1/2$, $r = 0.0001$ とする．$g(s)$ を円盤 $|s| \le 0.06$ で解析的かつ $\max_{|s|\le 0.06} |g(s)| \le 1$ が成り立つとする．このとき,

$$\begin{aligned}&\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [T, 2T] : \sup_{|s|\le r}\left|\log\zeta\left(s+\frac{3}{4}+i\tau\right) - g(s)\right| < \varepsilon\right\}\\ &\ge \exp(-\varepsilon^{-13})\end{aligned}$$

が成り立つ．

言い換えると, Garunkštis は非常に限定された条件下で, Riemann ゼータ関数の普遍性定理の下極限密度の下限を求めることに成功した．この手法を用い, 中村と Pańkowski [11] は Riemann ゼータ関数の自己近似に関する定量的な評価を得ており, Sourmelidis と Steuding [13] は代数的無理数をパラメータにもつ Hurwitz ゼータ関数の普遍性定理に関連した定量的な結果を得ている．しかしながら, (E2) に関連する結果は筆者が知る限りでは, この 3 つの結果のみである．本講演では, Dirichlet L 関数の Hybrid 同時普遍性定理に関する下限の評価を得たことを報告した．

2 主結果

主結果について述べる前に, 中村と Pańkowski の結果 [11] について記載する．

Theorem 2.1 ([11, Theorem 1.3])**.** $0 < r < 1/4$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\omega = 1/4 - r$, $K = \{s \in \mathbb{C} : |s - (3/4 + i\lambda)| \le r\}$ とする．さらに, $n \ge 3$ を自然数, $0 < \varepsilon \le 1$,

$$\log T \ge 217\exp\left(\frac{10}{\omega}\left(\frac{\exp(\frac{7}{2\omega} + (n-1)(3+2\lambda)(55(n+1) + \frac{115}{\omega})}{2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\omega}}\right)\omega^{-\frac{45}{\omega}}$$

とする．このとき,

$$\begin{aligned}&\mathrm{meas}\left\{\tau \in [T, 2T] : \sup_{s\in K}\left|\zeta(s+i\tau) - \zeta\left(s+i\frac{1}{n}\tau\right)\right| < \varepsilon\right\}\\ &\ge \frac{T}{2}\exp\left(-\left(\frac{\exp(\frac{7}{2\omega} + (n-1)(3+2\lambda)(55(n+1) + \frac{115}{\omega}))}{2\omega}\right)^{\frac{1}{\omega}}\right).\end{aligned}$$

が成り立つ．

この結果は, Riemann ゼータ関数の自己近似を動機に考えられた結果である. もし, この下限が n に依存しなければ, Riemann 予想が成り立つことが [11] で言及されている. この結果を踏まえて, 主結果が次である.

Theorem 2.2 ([10, Corollary 1.7])**.** q を素数とし, $k=1,\dots,q-1$ に対し, χ_k を mod q の Dirichlet 指標とし, θ_q を $0 \le \theta_q < 1$ なる実数とする. $R=0.06$, $\beta=0.039$, $r \le 0.0001$ とし,

$$\delta := \frac{\frac{1}{4}-R-\beta}{\log\frac{e}{2R}} = 0.0483933\dots,$$

かつ

$$a(r) := \frac{(1-4\delta)^4\left(\frac{1}{4}-r\right)^4}{47920e\delta^3} + 3 + \frac{9}{2}(1-4\delta)\left(\frac{1}{4}-r\right) + 188\sqrt{\frac{(1-4\delta)(\frac{1}{4}-r)}{2}} + 16\frac{3-4r}{1-4r}\sqrt{\frac{(1-4\delta)(\frac{1}{4}-r)}{2}}$$

とする. $k=1,\dots,q-1$ に対し, $g_k(s)$ を $|s| \le R$ で解析的な関数とする. ε, ε_1, ρ を $\varepsilon \le 1$, $2.006\varepsilon_1 \le 1$,

$$\rho \ge \left(\frac{2a(r)}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{(1-4\delta)(\frac{1}{4}-r)}}, \quad \frac{\rho^\beta}{5e\delta^3\log^4\rho} \ge \max_{1\le k\le q-1}\max_{|s|\le 0.06}|g_k(s)|+6$$

を満たす正の数とする. このとき,

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau\in[T,2T] : \max_{1\le k\le q-1}\sup_{|s|\le r}\left|\log L\left(s+\frac{3}{4}+i\tau,\chi_k\right)-g_k(s)\right|<\varepsilon, \left\|\tau\frac{\log q}{2\pi}-\theta_q\right\|<\varepsilon_1\right\} \ge \varepsilon_1 e^{-(q-1)\rho} > 0.$$

が成り立つ.

Remark 2.3. Theorem 1.5 と Theorem 2.2 を比べると, 下限の定式化が違うことに気づくが, その理由は, Theorem 1.5 を筆者が導出出来ていないことに起因する. というのも, Garunkštis は, 色々パラメーターを導入し [3, Theorem 1] を示し, 具体的にパラメーターの値を取ることにより, Theorem 1.5 を証明している. 即ち, Theroem 1.5 は系なのである. パラメーター自体は, Theorem 2.2 で出てきているある条件を満たす $R,\beta,r,\varepsilon,\rho$ という実数を考えている. 例えば, Garunkštis は

$$\frac{\rho^\beta}{5\delta^3\log^4\rho} \ge 1.8 + \frac{3.5}{1-4R} \tag{1}$$

かつ $\rho > 355991$ を満たすパラメーター ρ を導入している. Garunkštis は [3] において, $\beta=0$ と取ると書いている. しかしながら, $\beta=0$ では取れない. なぜなら, $\beta=0$ とすると (1) の不等式は

$$\frac{1}{5\delta^3\log^4\rho} \ge 1.8 + \frac{3.5}{1-4R} \tag{2}$$

となり, [3] にあるように $R=0.06$, $r=0.0001$ にすると, δ は大体 0.0482685 より大きく, (2) を満たす ρ の範囲を数値計算すると, $0.0168733<\rho<1$ または, $1<\rho<59.2652$ になる. したがって, 全然 $\rho>355991$ にならないのである. 以上より, 少なくとも $\beta>0$ で取る必要があるため, この条件下で Theorem 1.5 にある下限を導出出来ていないのである. もし, これを読んでいる方で導出出来た方がいれば教えてほしい.

一方で [11] は, [3] の下限の定式化の仕方と若干異なる. そのため, Theorem 2.2 は, [11] を参考にして導出した下限である. 具体的な計算は, [10] を見てほしい.

3　いくつかの命題

証明方針自体は, [3], [6] の手法を用いる．Theorem 2.2 を示すために, まずは次の 3 つの命題を示すことになる．

Proposition 3.1. q を 1 または素数とする．χ を q を法とする Dirichlet 指標とし, β, r, R を $0 < r < R < 1/4$, $0 < \beta + R < 1/4$, $r < \delta e^{-1-\frac{1}{4\delta}}$ を満たす実数とする．ただし,

$$\delta := \frac{\frac{1}{4} - R - \beta}{\log \frac{e}{2R}}.$$

である．さらに, $g(s)$ を $|s| \le R$ で正則とし,

$$M := \max_{|s|\le R} |g(s)| + 1.5 + \frac{3.42}{1-4R} \le \frac{\rho^{\beta}}{5e\delta^3 \log^4 \rho}$$

とし, $\rho > 355991^{\frac{1}{1-4\delta}}$ とする．このとき, ある実数 θ_p, $p \le \rho$, $p \ne q$ が存在し,

$$\begin{aligned}
&\left| g(s) - \left(-\sum_{p\le\rho} \log\left(1 - \frac{\chi(p)e^{-2\pi i\theta_p}}{p^{s+\frac{3}{4}}}\right)\right)\right| \\
&\le \frac{M}{\left(\frac{R}{r}-1\right)\rho^{\delta \log \frac{R}{r}}} + \frac{3}{\rho^{\alpha}\log\rho} + \frac{3\log\rho}{\rho^{(1-4\delta)(\frac{3}{4}-r)}} + \frac{3}{\rho^{(1-4\delta)(\frac{1}{2}-2r)}\log\rho}
\end{aligned}$$

が成り立つ.

ここで,

$$L_Q(s,\chi) = \prod_{p\le Q}\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

とする．ただし, $Q \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{C}$ である．このとき, 次の命題が成り立つ.

Proposition 3.2. $q_1, \dots, q_K$ を $q_1 \le \cdots \le q_K$ を満たす 1 または素数とし, $k = 1, \dots, K$ に対し, χ_k を $\bmod q_k$ の Dirichlet 指標とする．$0 < r < \frac{1}{4}$, $0 < \varepsilon \le 1$ とする．このとき,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{meas}\left\{ \max_{1\le k\le K} \max_{|s|\le r} \left| \log L\left(s + \frac{3}{4} + i\tau, \chi_k\right) - \log L_Q\left(s + \frac{3}{4} + i\tau, \chi_k\right)\right| < \varepsilon \right\} \\
&\ge T\left(1 - 0.51K \frac{\varphi^4(q_K)}{q_K^4} \frac{\log^2 Q}{(0.25-r)^5 Q^{0.25-r}\varepsilon^2}\right)
\end{aligned}$$

が,

$$Q > \max\{\exp(q_K^8), 355991\}, \quad T \ge \pi e^{\frac{1.02(0.75+r)(Q-872)}{0.25-r}}$$

のとき成り立つ.

Proposition 3.3. q を素数とし, χ_k $(k = 1, \dots, q-1)$ を mod q の Dirichlet 指標とする．$\rho \ge 355991$, $50 \le V \le \rho < Q$, $q < Q$,

$$V\left(\frac{Q}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} (q-1)Q\left(241(q-1)Q + 434\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - (q-1)\right)\log q + 217(q-2)\log\log q\right) \le \log T$$

とし, $k=1,\ldots,q-1$, $p \le \rho$ に対し, $\lambda_p^{(k)}$ を実数とする．さらに, $r < \frac{1}{4}$, $0 \le \theta_q < 1$, $1.003\varepsilon_1 \le 1$ とする．このとき,

$$\max_{1\le k\le q-1}\max_{|s|\le r}\left|\sum_{p\le Q}\log\left(1-\frac{\chi_k(p)}{p^{s+\frac{3}{4}+i\tau}}\right)-\sum_{p\le\rho}\log\left(1-\frac{\chi_k(p)e^{-2\pi i\lambda_p^{(k)}}}{p^{s+\frac{3}{4}}}\right)\right| \le 188\frac{\rho^{\frac{1}{4}+r}}{V\log\rho}+\frac{3-4r}{1-4r}\frac{16}{\rho^{\frac{1}{4}-r}\sqrt{\log\rho}}$$

かつ

$$\left\|\tau\frac{\log q}{2\pi}-\theta_q\right\| < \frac{\varepsilon_1}{2}$$

を満たす $\tau \in [T,2T]$ の測度は $\frac{1}{2}\varepsilon_1 TV^{-(q-1)\pi(\rho)}$ 以上である．

Proposition 3.1 は, 定量的な Good の結果を用いることで示すことが出来る．Proposition 3.2 は, 定量的な Montgomery-Vaughn の不等式を用い, Dirichlet 多項式の 2 乗平均値を定量的に計算し得ることが出来る．Proposition 3.3 は, 定量的な Weyl の criterion である Koksma の補題を連続版に拡張した補題を用いることにより, 証明することが出来る．細かい計算自体は, やはり [10] を見てほしい．

4　応用について

ここまで色々と書いてきたが, Remark 2.3 を除くと, 大体集会で講演で話した内容と同じである．それだけだと味気ないので, もう少し進んだ話を書く．実はこの結果は, Garunkštis の結果 [3] を Dirichlet L 関数に拡張しようと思って始めた結果ではない．実の動機は, 代数的無理数をパラメーターにもつ Hurwitz ゼータ関数の普遍性定理である．Hurwitz ゼータ関数は, $0 < \alpha \le 1$ に対し,

$$\zeta(s,\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)^s}$$

で定義される関数である．Riemann ゼータ関数の時と同様に, $\sigma > 1$ で絶対収束し, さらに全平面の有理型関数に解析接続することが出来る．定義から直ちに, $\zeta(s,1)=\zeta(s)$, $\zeta(s,1/2)=(2^s-1)\zeta(s)$ になることが分かる．したがって $\alpha = 1/2, 1$ のとき, 普遍性定理が成り立つことが従う．α が超越数のときは, Voronin や Bagchi や Gonek により, $\{\log(n+\alpha)\}_{n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立である事実を用い, 普遍性定理が証明されている．それでは, 一般的に $\{\log(n+\alpha)\}_{n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立にならない代数的数 α に対して, $\zeta(s,\alpha)$ の普遍性定理が証明できないのかというとそうではない．有理数 $\alpha = p/q$ に対し, Hurwitz ゼータ関数は次のように Dirichlet L 関数の和で書くことが出来る:

$$\zeta\left(s,\frac{p}{q}\right)=\frac{q^s}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\overline{\chi}(p)L(s,\chi).$$

ただし, 和は全ての mod q の Dirichlet 指標をわたる．この事実と, 例えば Dirichlet L 関数の hybrid 同時普遍性定理を組み合わせることにより, α が有理数の場合の Hurwitz ゼータ関数の普遍性定理を証明することが出来る．したがって, 残っている問題は代数的無理数をパラメーターにもつ Hurwitz ゼータ関数の普遍性である．最近, 峰 [9] が代数的無理数をパラメータにもつ Hurwitz ゼータ関数の普遍性で進展を得たが, 完全解決には至っていたない．このような背景から, 定量的なアプローチが出来るのではないかと考えて始めたのが, 定量的な Hybrid 同時普遍性定理である．定量的なアプローチとして, 次の結果がある．

Theorem 4.1 ([10, Theorem 6.5])**.** K を $D(1/2,1)$ に含まれるコンパクトで補集合が連結な集合で, $g(s)$ を K 上で連続, かつ K の内部で正則な関数とする．$\alpha \in (0,1)$ とし, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1]$ を $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$ とす

る．もし, 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し, ある定数 $c(\varepsilon) > 0$ が存在し,

$$\liminf_{T\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [T, 2T] : \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau, \alpha_n) - g(s)| < \varepsilon\right\} \geq c(\varepsilon) > 0$$

が成り立つならば,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [T, 2T] : \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau, \alpha) - g(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

が成り立つ．

即ち, α に収束する点列 α_n で, $\zeta(s, \alpha_n)$ の下極限密度が α_n に依存せずに一様に評価できたら, $\zeta(s, \alpha)$ の普遍性定理が証明できる．有理数で代数的無理数を近似出来ることはよく知られているため, 有理数をパラメーターにもつ Hurwitz ゼータ関数の普遍性定理の下極限密度を下から評価したかったというのが, 元々の動機である．しかしながら, Theorem 2.2 で得た下限はパラメーターに依存してしまっているため, 残念ながらこの結果からは, 代数的無理数をパラメーターにもつ Hurwitz ゼータ関数の普遍性に応用出来ないというのが現状である．

一方, 超越数をパラメーターにもつ Hurwitz ゼータ関数の普遍性を定量的に評価することも勿論可能であろう．実際, 筆者は現在, 超越数をパラメーターにもつ Hurwitz ゼータ関数の定量的な普遍性定理に取り組んでいる．この講究録が世に出る頃には, 少なくともプレプリントとして世に出ているだろうと願望を込めてこの講究録を終える．

謝辞

本稿は, 2025 年度 RIMS 共同研究（公開型）「解析的整数論とその周辺」での講演を基に作成したものです．講演の機会をくださりました世話人の谷口隆先生, 立谷洋平先生に感謝申し上げます．本研究は, JSPS 科研費特別研究員奨励費 25KJ1412 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] B. Bagchi, Statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, Thesis, Calcutta, Indian Statistical Institute, 1981.

[2] K. Endo, Effective uniform approximation by L-functions in the Selberg class, Funct. Approx. Comment. Math. **68** (2023), no. 1, 59–99.

[3] R. Garunkštis, The effective universality theorem for the Riemann zeta function, in *Proceedings of the Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations*, 21 pp., Bonner Math. Schriften, 360, Univ. Bonn, Bonn.

[4] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, K. Matsumoto, J. Steuding and R. Steuding, Effective uniform approximation by the Riemann zeta-function, Publ. Mat. **54** (2010), no. 1, 209–219.

[5] S. M. Gonek, Analytic properties of zeta and L-functions, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1979.

[6] A. Good, On the distribution of the values of Riemanns zeta function, Acta Atith, **38** (1981), 347–388.

[7] J. Kaczorowski and M. Kulas, On the non-trivial zeros off the critical line for L-functions from the extended Selberg class, Monatsh. Math. **150** (2007), no. 3, 217–232.

[8] E. Kowalski, *An Introduction to Probabilistic Number Therory*, Cambridge University Press, 2021.

[9] M. Mine, New developments toward the Gonek Conjecture on the Hurwitz zeta-function. arXiv preprint arXiv:2305.01262, 2023.

[10] K. Nakai, Effective hybrid joint universality for Dirichlet L-functions and its application. arXiv preprint arXiv:2512.02428.

[11] T. Nakamura and Ł. Pańkowski, Effective version of self-approximation for the Riemann zeta function, Math. Nachr. **290** (2017), no. 2-3, 401–414.

[12] N. Rungtanapirom, J. Steuding and S. Wananiyakul, Effective weak universality in short intervals, Publ. Math. Debrecen **107** (2025), no. 1-2, 215–236.

[13] A. Sourmelidis and J. Steuding, On the value-distribution of Hurwitz zeta-functions with algebraic parameter, Constr. Approx. **55** (2022), no. 3, 829–860.

[14] S. M. Voronin, Theorem on the universality of the Riemann zeta-function, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **39** (1975) 475 – 486 (in Russian); Math. USSR Izv. **9** (1975), 443 – 453.