

スツルム格子と強非周期タイル集合

筑波大学 数理物質系数数学域

秋山 茂樹

Institute of Mathematics, University of Tsukuba

1 強非周期タイル集合の定義

タイルとは平面の空でない有界閉集合であって内点の閉包と一致するものである。この定義は [4] では正規 (regular) なタイルと呼ばれている。タイル張りに関して [5] の古典的な教科書があるが、そこではタイルは閉球と同相であることを仮定している。本稿ではこれは仮定しないし連結性も仮定していないことに注意する。

平面の等長変換群の部分群 G を固定する。有限個のタイル集合 \mathcal{A} が与えられており、平面が (\mathcal{A}, G) でタイル張り可能であるとは、 \mathcal{A} の元の G による変換像で平面を重なりなく埋め尽くすことである。境界は重なってよいが、二つの異なるタイルは内点を共有してはいけない。より形式的に述べればタイルの有限集合 $\mathcal{A} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ と G の m 個の部分集合 J_i ($i = 1, 2, \dots, m$) があって

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{g \in J_i} g(T_i)$$

が成り立ち、 $g(T_i)^\circ \cap h(T_j)^\circ \neq \emptyset$, ($g \in J_i, h \in J_j$) ならば $i = j$ かつ $g = h$ が成り立つことである。このときタイル張りとは可算個のタイルの集合

$$\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^m \{g(T_i) \mid g \in J_i\}$$

である。タイル張りの平行移動とは $v \in \mathbb{R}^2$ について

$$\mathcal{T} + v := \bigcup_{i=1}^m \{g(T_i) + v \mid g \in J_i\}$$

のことである。これもタイル張りであるが、 $\mathcal{T} = \mathcal{T} + v$ が成り立つときその平行移動ベクトル v を周期と呼ぶ。零ベクトル以外に周期がないタイル張りのことを非周期的であるという。

タイルの有限集合 \mathcal{T} はタイル張り可能であるが、出来上がったタイル張りが必ず非周期的になるもののことを強非周期タイル集合という。強非周期は

aperiodic の訳、非周期は non-periodic の訳である。混同しやすいが形容する対象が異なることに注意する。非周期はタイル張りを形容しているが、強非周期はタイルの有限集合を形容している。

2 ワンタイル

まずもって強非周期タイル集合は面白い概念である。説明を行うためまず記号力学系の説明を行う。 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ を与えられた有限文字 $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, m\}$ 上の両側無限語 $(w_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ の集合とし \mathcal{A}^* を \mathcal{A} による有限語の集合とする。集合 X が $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ の無限直積位相で閉であり、シフト $\sigma((w_i)) = (w_{i+1})$ について $\sigma(X) = X$ の成り立つものをサブシフトと呼ぶ。サブシフトには集合 $F \subset \mathcal{A}^*$ が対応し、 F の元が現れない両側無限語の全体 X_F と表すことができる。この F の元の事を禁止語という。 F として有限集合が取れる場合 X を有限型サブシフトという。有限型サブシフトは力学系をコード化して調べるときの基本的な道具である。有限型サブシフトは有向有限グラフ上の無限路の集まりという表示を持つので有限型サブシフトは空集合でなければ周期的な元を含む。

さてこの二次元版を考えよう。二次元の有限型サブシフトは $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ の部分集合で、与えられたパターンの有限集合 F が現れないものの集合である。ここでは二次元なので有限語を禁止するのではなく有界なパターンを禁止することに注意する。 X_F のシフト $\sigma_{m,n}$ は

$$\sigma_{m,n}(w_{i,j}) = w_{i+m,j+n}$$

で定義される平行移動である。 $\sigma_{m,n}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ ならば \mathcal{T} は周期 (m,n) を持つという。 \mathcal{T} が周期的とは $(m,n) \neq (0,0)$ が存在して $\sigma_{m,n}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ が成り立つことである。このとき空でない二次元の有限型サブシフトで周期的な元を含まないものが存在する。つまり次元によって基本的な状況は完全に変わってしまうのである。

この状況をはじめて数学の問題として考えたのはハオ・ワンである。彼はタイル集合 \mathcal{A} として各辺に色を塗った有限個の正方形を与えた。群 $G = \mathbb{Z}^2$ とする。つまり格子上の平行移動のみを許すこととする。二つのタイルが隣接するための条件として向かい合う辺が同じ色であることを要求することにする。このとき強非周期タイル集合が存在しないというのがワンの予想であったが、彼の弟子のバーガーはその反例を 2 万個を越すタイルを用いて実現した。

実は、この設定は上記の二次元の有限型サブシフトで記述することができるし、逆に任意の二次元有限型サブシフトは、この正方形タイルで記述することができる。したがって、空でない二次元有限型サブシフトで周期的な元を含まないものがあれば、この正方形の設定で強非周期タイル集合が構成で

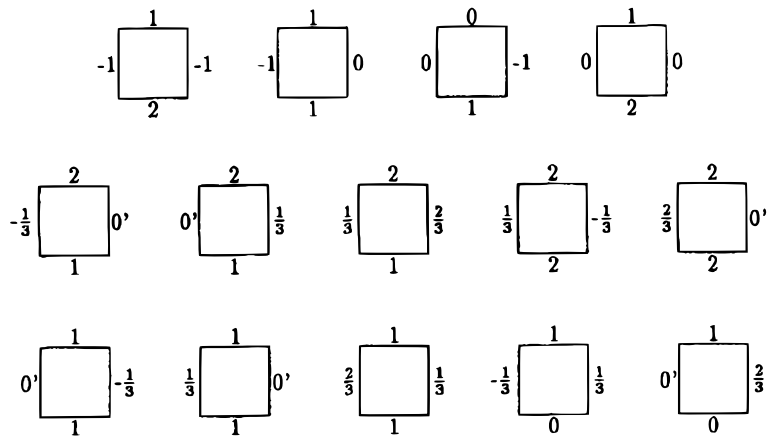


図 1: ヤルコ・カリのワントイル

き、逆もまた真である。この強非周期タイル集合は ワントイルと呼ばれている。ヤルコ・カリ [7] は図 1 のワントイルを構成した。

そのアイデアは大変素晴らしいもので正方形タイルを入力と出力をもつ計算機と見做すのである。後述するスツルム列を用いるのだが、各行から下の行への移行がスツルム列の傾きに有理数 2 または $2/3$ を掛ける操作を表すように設計する。これができれば、2 と 3 は乗法的独立なのでタイル張りが出来れば、それは周期を持つことができない。2 または $2/3$ を掛ける操作は発散しないように繰り返すことができタイル張りは存在する。

ジャンデル-ラオ [6] はワントイルの個数の最小化の問題に終止符を打った。これは図 2 の 11 枚のタイルによる。さらに 10 枚以下にはワントイルが存在しないことも証明した。彼らは多量の候補を計算機で探し出し、その中で候補となるものに証明を行った。このように虱潰しで見つけたものであるにもかかわらず面白いことに、ここでも計算機の構造がカリのやり方で出現し、そこで掛ける数は黄金比に関連しているのである。

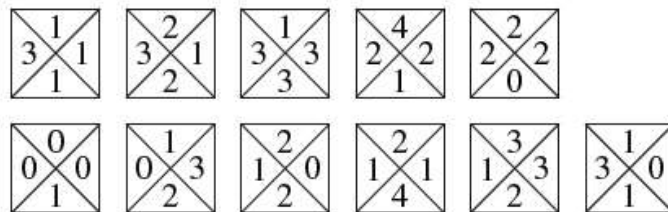


図 2: ジャンデル-ラオのワントイル

3 アンマンタイル

ロバート・アンマンの考えた強非周期タイル集合のバージョンの一つを紹介する。詳しくは [1] を参照のこと。これは二枚の相似なタイルである。 $c = \sqrt{(1 + \sqrt{5})/2}$ とし図 3 のように辺に切れ目が入っている。群としては平面の等長変換群をとる。つまりタイルは平行移動、回転、裏返しなどをして構わない。

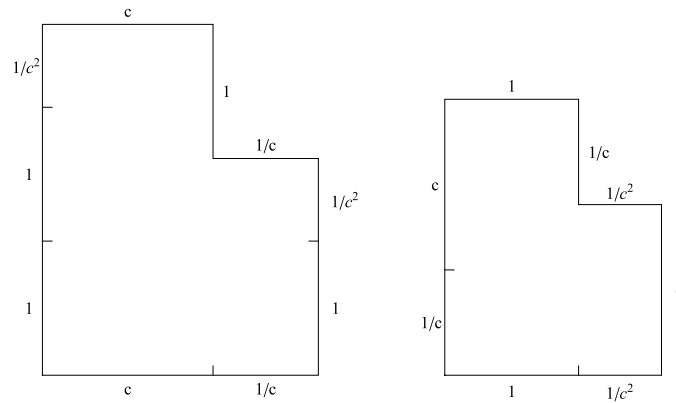


図 3: アンマンタイル A と B

切れ目の入った辺は、ここで辺が切れていると考える。したがって A は 6 辺ではなく 10 辺をもち、 B は 8 辺を持っている。タイル張りをする際には各辺が、もう一方の辺とぴったり一致するときに配置を許される。このような規則をマッチング規則と呼ぶこともある。

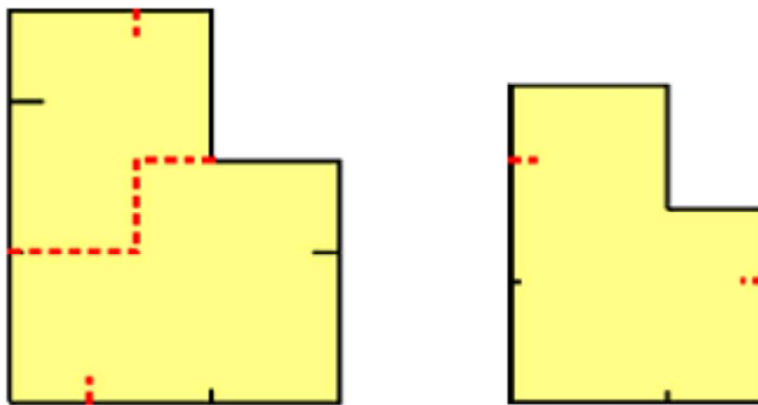


図 4: 超タイル cA と cB

面白いことに図4のように組み合わせると、 A と B の合併は A の c 倍となっており A は B の c 倍となっているので $A \rightarrow AB, B \rightarrow A$ というように A を c 倍し分解、 B を c 倍する置換規則を考えると、これを図5のように繰り返すことができる。この操作で、マッチング規則が守られていることも容易に確認することができる。

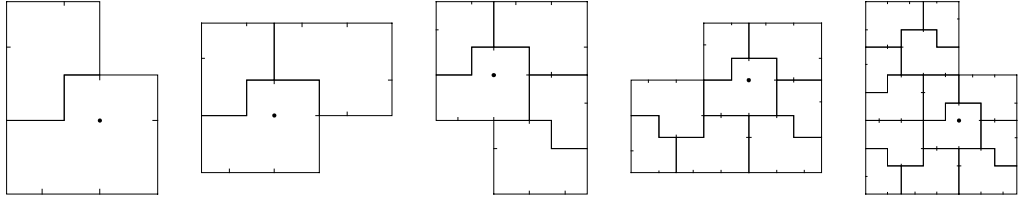


図 5: 置換規則

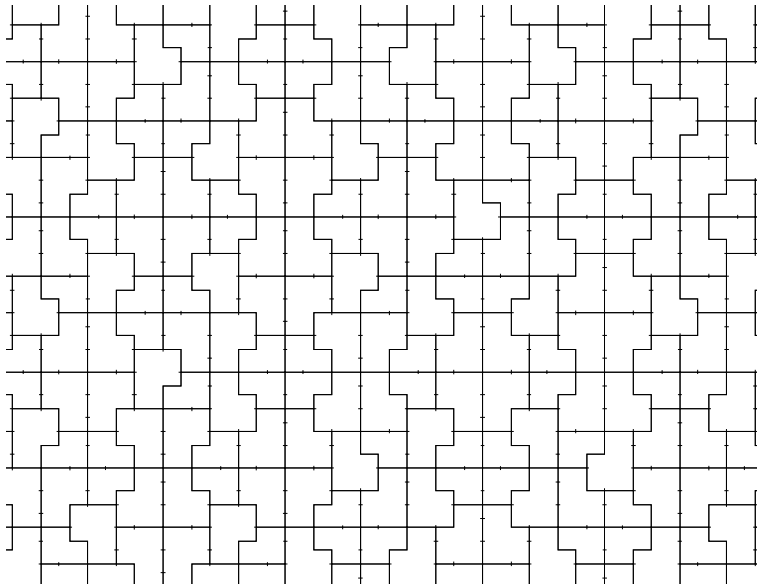


図 6: アンマンタイル張り

これでいくらかでも大きなパッチを生成することができる。対角線論法と似た議論をすると、タイル張りが可能である事を示すことができる。図6を参照のこと。

これで A, B でタイル張りが可能であることは分かった。実は難関は、 A, B で出来るいかなるタイル張りにも周期がないことである。それを示すには図4でできた超タイルの構造が任意の A, B からなるタイル張りに一意的に表れることを示し、次に、この超タイルが A, B と同じ働きをするを示す

さなくてはならない。もしそうなら、このことが無限に繰り返されるので、 A, B のタイル張りは一意的に cA, cB のタイル張りでもあり、 $c^n A c^n B$ のタイル張りでもある。 n を増やすとタイルはいくらでも大きな球を含む。もし周期があれば、その超タイルはそれ自身と内部で交差してしまうので矛盾することになる。

しかしここでいう「同じ働き」とはなんだろうか。これは論理式で述べるのが難しい事項である。このアンマンタイルの場合は、その部分をかかなり明確に述べることができる。図4の超タイルでは、赤い点線が現れている。この赤い点線は A, B から引き継いだものであるが、この赤い点線を付けることでできるタイル張りの総体が、赤い点線を除去したタイル張りの総体と同じであればよい。つまり赤い点線は存在するけれどもあってもなくても構わないという事を厳密に示すことになる。詳しい議論は論文 [1] を見てほしい。

4 スツルム語

A^* は A による有限語の集合で $A^{\mathbb{N}}$ は A による右無限語の集合である。

$x \in A^* \cup A^{\mathbb{N}}$ と $y \in A^*$ について y が x の部分語であるとき $y \prec x$ と書く。 $\omega \in A^{\mathbb{N}}$ に対して、

$$p_{\omega}(n) = \text{Card}\{y \in A^n \mid y \prec x\}$$

とおき、これを ω の複雑度という。 M を A の元の個数とすれば $p_{\omega}(n) \leq M^n$ がなりたつ。

ランダムな無限語では $p_{\omega}(n) = M^n$ が成り立つ ω が周期的とは $x, y \in A^*$ があって $\omega = xyxy \cdots = xy^{\infty}$ が成り立つことである。 $|x|$ を x の文字列としての長さとするとき $|x| = \ell, |y| = m$ で $|x|$ と $|y|$ が最小になるよう $\omega = xy^{\infty}$ を選べば、 $p_{\omega}(n) = \ell + m$ が $n \geq \ell$ で成り立つ。特に複雑度は有界となる。

$p_{\omega}(n)$ は単調非減少な自然数列であり、 $p_{\omega}(n) = p_{\omega}(n+1)$ がある n で成立すると、 n 文字が与えられると次に続く文字は決まってしまう。このことから ω は周期的となる。 $p_{\omega}(1) \geq 2$ であるから、周期的でなければ $p_{\omega}(n) \geq n+1$ が成立する。そこで $p_{\omega}(n) = n+1$ が成り立つ語のことをスツルム列という。すなわちスツルム列とは複雑度最小の非周期右無限語である。

スツルム語は $p_{\omega}(1) = 2$ なので $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ とする。 $x \in A^* \cup A^{\mathbb{N}}$ がバランス語であるとは、 $y, z \prec x$ で $|y| = |z|$ が成り立つならば

$$|y|_1 - |z|_1 \in \{-1, 0, 1\}$$

が成り立つことをいう。ここで $|y|_1$ は y に 1 が何回現れたかを表す。つまり任意の長さ n の部分語の 1 の出現回数が n のみで変動幅が高々 1 しかない語をバランス語という。

実数 $\rho \in [0, 1]$ および無理数 $\alpha \in [0, 1]$ を固定した時

$$([\alpha(n+1) + \rho] - [\alpha n + \rho])_{n=1}^{\infty}$$

を傾き α 切片 ρ の器械語という (図7を参照)。さらに $[\dots]$ を $\{\dots\}$ に取り換えたものも器械語¹ という。

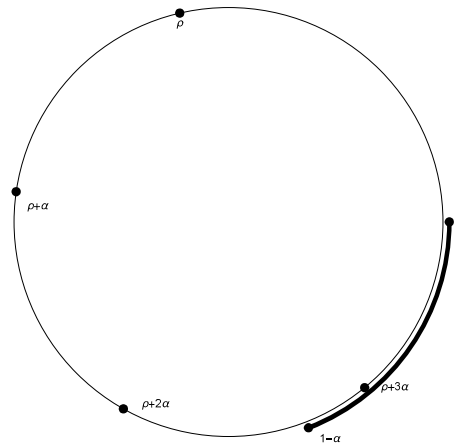


図7: 傾き α 切片 ρ の器械語 0001...

すると Morse-Hedlund による以下の特徴づけがある。

定理 1. $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ について次の三つは同値である。

1. ω はスツルム語である。
2. ω は非周期的なバランス語である。
3. ω はある無理数 α を傾きとする器械語である。

これら三つの主張は組み合わせ論的特徴、統計的特徴、アルゴリズム的な特徴づけが全て等価であると言っている。すなわち無限文字列が、最も簡単な非周期語であること、極端に偏りのない非周期語であること、無理回転のコード化であることの三つを直接つなぐ興味深い定理である。証明は現在はいろいろと整理がされているが、証明を読むとかなり非自明な主張であることが分かる。

スツルム語はもっとも単純な非周期構造であり様々な数理学の境界での現象に現れる。私は周期と非周期の境目に現れるものに興味を持っており、スツルム語はその一つである。

実は、強非周期タイル集合からできるタイル張りにもスツルム語がしばしば観察できる。著名なペンローズタイルでも、さらにアンマンタイルにもこ

¹Mechanical word の訳。器械語だとプログラム言語と間違えるので漢字を替えた。

の構造を見つける事ができる。実は次節のスミス亀にもこの構造を見つけることができる。

5 スミス亀の強非周期性

スミス亀とは、スミス、カプラン、マイヤーズ、グッドマン-ストラウスの4人の共著論文 [8] で 2023 年に発表された強非周期モノタイルである。なおモノタイルというのはタイル張り可能な一枚からなるタイル集合という意味で、モノヘドラルタイルの略である。このモノタイルは連続変形パラメータをもち、スミス亀はその中の選択肢の一つである。強非周期性の証明には、順に大きなパッチを作っていくのだが [8] のパッチの構成のやり方は少し難しい。毎回規則が少しずつ変わっていき、全体として一つのやり方に“収束”していくという記述である。

荒木氏と私は図 8 のような簡単な構成を行った。つぎのように大きなパッチを帰納的に構成する。深い青色、黄色であらわされたタイルは裏向きに用いられている。

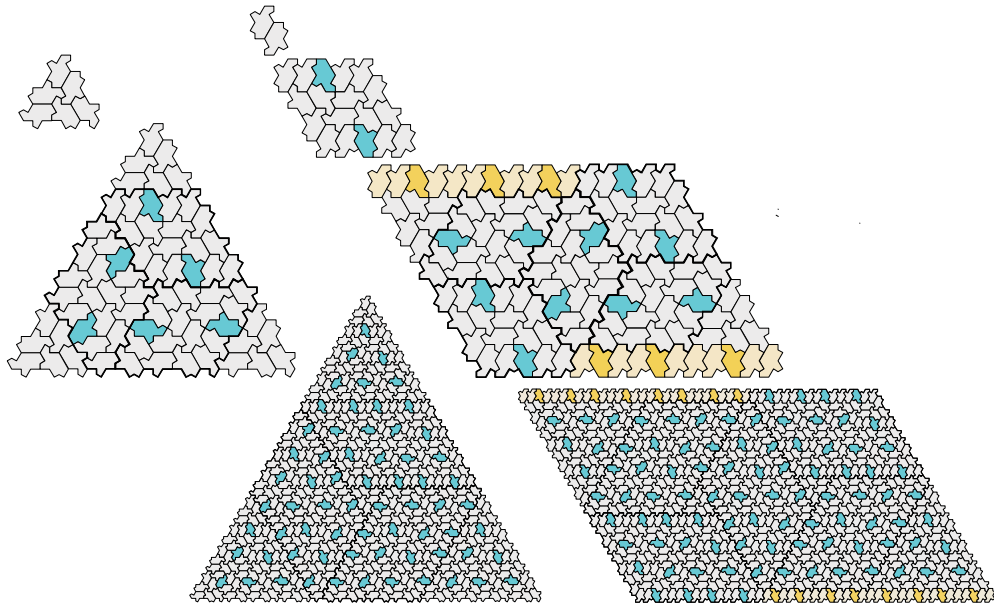


図 8: スミス亀タイル張りの帰納的構成

各段階では、帰納的に前段階のパッチを用いるがさらに黄色のほぼ一直線上にみえるパッチを補助的に用いる。この黄色の部分をよく見るとこの構成にも無理数の傾き $(5 - \sqrt{5})/10$ をもつスツルム列が現れていることがわかる。この線分パッチが、第 n 段階から第 $n + 1$ 段階に進む際の鍵となる。実はこの帰納的な構成の本質となっているのはスツルム列に現れる回文なのである。回文に対応する線分状のパッチは「ほぼ」点対称になる。異なるのは端の4つの小さな扇型のみである。この事実が元となってこの帰納法は成立する。詳しくは論文 [2] でご確認いただきたい。

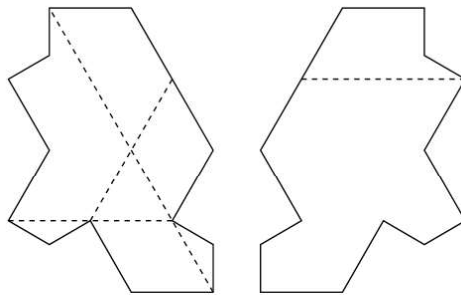


図 9: スミス亀のアンマン棒

このスミス亀には図 9 のアンマン棒を描くことができる。アンマン棒はやはりロバート・アンマンによって考案されたマッチング規則で、タイルの表面に線分を描き、タイルを隣接させる場合にこのアンマン棒が直線になるようにしなければいけないというものである。他のパラメータではこのようなものは現れないようなのでスミス亀は特別に良い選択であると考えている。

スミス亀の場合には、アンマン棒は描かなくても強非周期性は確保される。アンマン棒が直線につながらないようなタイル張りは存在しない。いいかえると、この線はあってもなくても実質が変わらない。

さらに、アンマン棒の全体のなす図形は、格子に似ているが格子ではない不思議な構造をなす。図 10 のように、二つの直線が交わるとかならずその交点の近くに第三の傾きのアンマン棒が通過して小さい正三角形をなす。この小三角形の出現の仕方は一つの直線を固定するとその左右に散らばっており、ちょっと見ただけでは規則がわからない。次の二つの事実に注目する。

1. 二つのアンマン棒の交点は、裏側に向いたタイルに一対一対応する。
2. 表のタイルと裏のタイルに描かれたアンマン棒の長さは 1:4 である。

すると出来上がったタイル張りに周期がないことを容易に示すことができる。実際アンマン棒の出現に対して自然に密度を定義することができるが、上の事項を仮定し、さらにアンマン棒の出現が自然密度を持つと仮定するとその

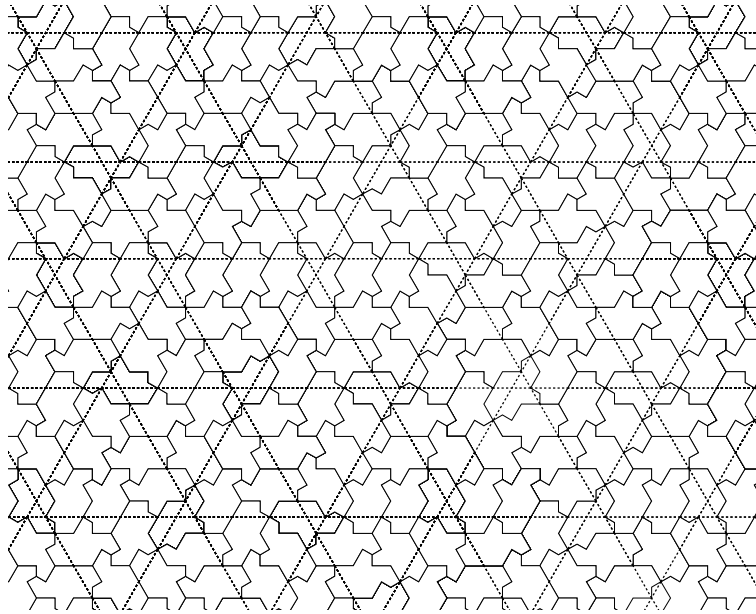


図 10: スミス亀のタイル張り

密度は二次の無理数となることが導ける。タイル張りに周期があると仮定すれば、自然密度が存在し有理数でなければならず、矛盾が導かれる。

6 スツルム格子と強非周期タイル集合

前節の強非周期性の証明の後半ではアンマン棒の成す格子構造が本質的に役に立った。では、このような格子構造は一体いつ生じるのか？そもそも、この格子構造と称しているものは何なのか？我々はスツルム格子という公理を立てて考えることにした。スツルム格子の分類を行い、この分類を用いることで新たな強非周期タイル集合ができるのではないかと考えた。以下は筑波大の院生の浜田忠久氏、伊藤克樹君との共同研究の成果である。詳しくは [3] を見てください。

スツルム格子は次のように定義できる。平面で原点で 120 度で交わる 3 本の座標軸に関する六角座標 (x, y, z) を用いるとしよう。この表示は冗長性があり $x + y + z = 0$ が成り立つことに注意する。 a, b, c を $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ の写像で $a(i+1) - a(i) \geq 1$, $b(i+1) - b(i) \geq 1$, $c(i+1) - c(i) \geq 1$ を満たすとする。 $(0, 0, 0)$ を含む集合 $V \in \mathbb{Z}^3$ があって

$$\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2 \exists^1 k \in \mathbb{Z} \quad (i, j, k) \in V,$$

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2 \exists^1 i \in \mathbb{Z} \quad (i, j, k) \in V,$$

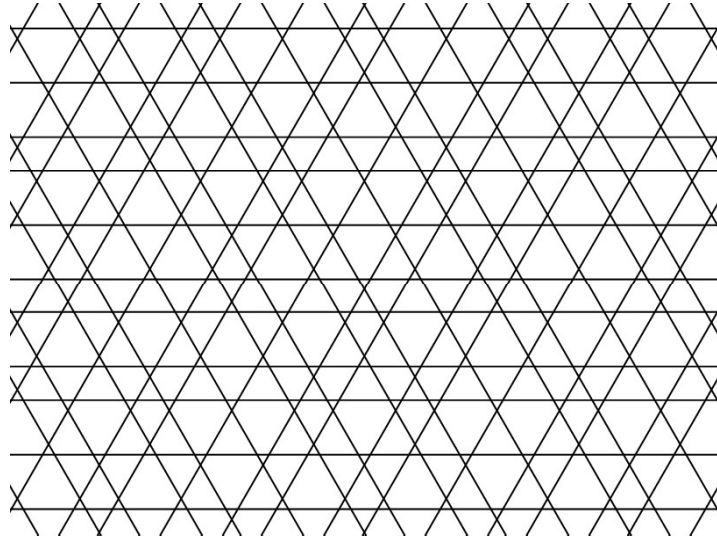


図 11: 傾き $\sqrt{6} - 1$, $\kappa = 2$ のスツルム格子

$$\forall (i, k) \in \mathbb{Z}^2 \exists j \in \mathbb{Z} \quad (i, j, k) \in V$$

が成り立ち、 $\forall (i, j, k) \in V$ に対し $a(i) + b(j) + c(k) = \pm 1/2$ を満たすものとする。

もしこれらが成り立てば $(i, j, k) \in V$ に対し $x = a(i), y = b(j), z = c(k)$ で決まる互いに 120 度に交わる平面の三直線群をスツルム格子であるという。

この定義から $V = \{(i, j, k) \in \mathbb{Z}^3 \mid i + j + k = 0\}$ を帰納的に導くことができる。これは、図形的には二つの異なる線が交わる所に 3 番目の傾きの線が唯一つ対応し小三角形を作る事を意味する。つまりスミス亀で見られた構造を公理的に述べたものである。

この公理から重要な観察ができる。

$$a(i+1) - a(i), \quad b(j+1) - b(j), \quad c(k+1) - c(k)$$

は廊下幅であるが、これは高々 3 種類の数となる。さらに 3 つの数が $a(i+1) - a(i)$ に現れると $b(j+1) - b(j), c(k+1) - c(k)$ は周期的となる。これはスツルム格子が退化する場合である。これが生じないとき廊下幅の集合は $\{\kappa, \kappa+1\}$ の二元で書ける。このとき

$$a_i = \begin{cases} 0 & a(i+1) - a(i) = \kappa \\ 1 & a(i+1) - a(i) = \kappa + 1 \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} 0 & b(j+1) - b(j) = \kappa \\ 1 & b(j+1) - b(j) = \kappa + 1 \end{cases}$$

$$c_k = \begin{cases} 0 & c(k+1) - c(k) = \kappa \\ 1 & c(k+1) - c(k) = \kappa + 1 \end{cases}$$

と定めると、 $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ の元が決まる。この無限語は任意の $i, j, k \in \mathbb{Z}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して次の関係を満たす。

$$|a_i a_{i+1} \dots a_{i+n-1}|_1 - |b_j b_{j+1} \dots b_{j+n-1}|_1 \in \{-1, 0, 1\},$$

$$|b_j b_{j+1} \dots b_{j+n-1}|_1 - |c_k c_{k+1} \dots c_{k+n-1}|_1 \in \{-1, 0, 1\},$$

$$|c_k c_{k+1} \dots c_{k+n-1}|_1 - |a_i a_{i+1} \dots a_{i+n-1}|_1 \in \{-1, 0, 1\}$$

すなわち、 $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $(b_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ に現れる長さ n の語は相互にバランスが取れていて、1 の出現回数が高々 1 しか違わない。このことは、各 $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $(b_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ が 2-バランス語であることを意味する。すなわち任意の $i, j, k \in \mathbb{Z}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_i a_{i+1} \dots a_{i+n-1}|_1 - |a_j a_{j+1} \dots a_{j+n-1}|_1 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

$$|b_j b_{j+1} \dots b_{j+n-1}|_1 - |b_k b_{k+1} \dots b_{k+n-1}|_1 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

$$|c_k c_{k+1} \dots c_{k+n-1}|_1 - |c_i c_{i+1} \dots c_{i+n-1}|_1 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

が成り立つ。このことから $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $(b_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ に 1 の生ずる頻度 α が存在し共通に定まることが分かる。この $\alpha \in [0, 1]$ をスツルム格子の傾きという。スツルム格子は完全に分類でき傾きが無理数の場合には、非周期的な 1-バランス語、すなわち両側スツルム語となって一番簡単に表示できる。

定理 2. 傾きが無理数のとき、 $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $(b_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ は両側スツルム語である。さらにそれらの器械語としての切片の和は整数となり、逆に切片の和が整数のとき三直線群 $x = a(i)$, $y = b(j)$, $z = c(k)$ がスツルム格子を与える。

この結果によりスツルム格子は無理数の傾きを与えれば描くことができることになった。では、この結果から強非周期タイル集合を構成できるだろうか？

定理 3. 任意の実二次無理数の傾きのスツルム格子を用いて、このスツルム格子の誘導するポロノイタイル張りを組み換えることで強非周期タイル集合を作ることができる。

この構成ではタイルをいくつか組にしたパッチを新しいタイル（パッチタイル）と考える。そのためこの稿の最初で述べたようにタイルの幾何学的形状について強い仮定をしていないことが重要である。この証明では準周期秩序の数学に現れる二つの Delone 集合の bounded displacement equivalence (以下 BD) の考え方が本質的に用いられる。

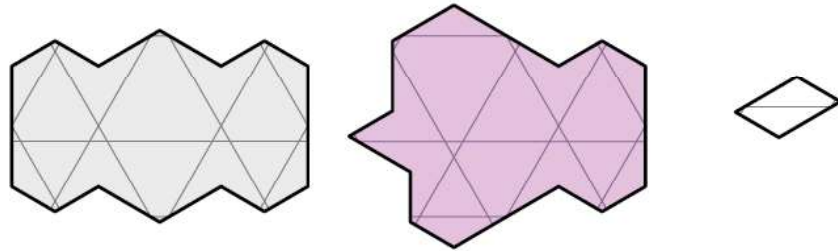


図 12: スツルム格子から得られた拡大係数 $\sqrt{2} - 1$ の強非周期タイル集合

実二次体の単数はスツルム列の自己相似性を表すが、単数に対して強非周期タイル集合を作ると、スツルム格子に付随するタイル張りはこの単数の拡大係数を持つ自己相似タイル張りとなる。拡大係数が異なるタイル張りは全く異なるものであるため、本質的に異なる無限個の強非周期タイル集合が構成できたことになる。強非周期タイル集合は散在的に発見されてきたが、今回の構成方法は比較的容易に可算個の強非周期タイル集合を作り出せたことになる。

なおこの方法でできるタイルの枚数は、実二次無理数の高さに比例するくらいで収まることも示すことができた。BD の取り方は非常に柔軟性が高く、この上限は数えやすい方法を取ってえられたもので枚数を少なくする方向での最適化は行っていない。もし、最適化を行った場合には別のモノタイルが見つかる可能性は残されている。なおタイルの形状については本研究では議論していない。

スツルム格子は全ての傾きで作ることが可能である。定理 3 ではスツルム格子のもつ自己相似性は用いていない。したがって二次無理数でなく別の無理数（例えば 3 次の無理数）で同様の構成が可能かもしれない。

なお自己相似性を用いると強非周期タイル集合の枚数を減らせる美しい構成ができる場合もある。図 12, 13 はその例である。ただ自己相似性を用いる方法は今のところ一般化できていないし BD を用いる手法との関係はまだよくわかっていない。

参考文献

- [1] S. Akiyama. A note on aperiodic Ammann tiles. *Discrete Comput. Geom.*, Vol. 48, No. 3, pp. 702–710, 2012.
- [2] S Akiyama and Y Araki. An Alternative Proof for an Aperiodic Monotile. *Discrete Comput. Geom.*, Vol. 74, No. 3, pp. 771–792, 2025.

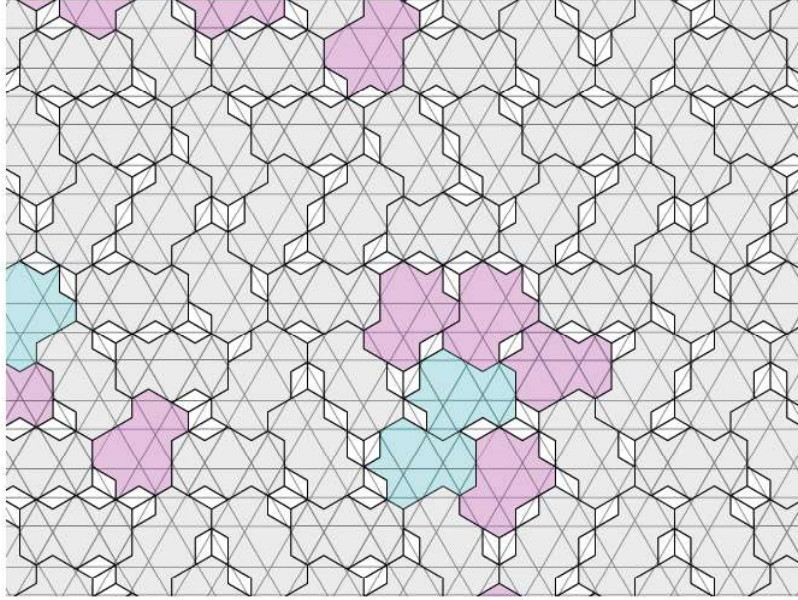


図 13: 対応するタイル張り

- [3] S Akiyama, T. Hamada, and K. Ito. Sturmian lattices and aperiodic tile sets. *arXiv:2506.19362*.
- [4] M. Baake and U. Grimm. *Aperiodic Order. Vol. 1*, Vol. 149 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [5] B. Grünbaum and G. C. Shephard. *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman and Company, New York, 1987.
- [6] E. Jeandel and M. Rao. An aperiodic set of 11 Wang tiles. *Adv. Comb.*, 2021:1, 37pp.
- [7] J. Kari. A small aperiodic set of Wang tiles. *Discrete Math.*, Vol. 160, No. 1-3, pp. 259–264, 1996.
- [8] D. Smith, J. S. Myers, C. S. Kaplan, and C. Goodman-Strauss. An aperiodic monotile. *Combinatorial Theory*, Vol. 4-1, 2024.