Estimates for the partial sums of Apostol's Möbius function under the Riemann hypothesis

九州大学大学院マス・フォア・イノベーション連係学府
寺田怜央
Reo Terada
Joint Graduate School of Mathematics for Innovation
Kyushu University

§0.　記号

整数 m, n に対してそれらの最大公約数と最小公倍数をそれぞれ $(m, n), [m, n]$ とかく. Möbius 関数と Euler のトーシェント関数をそれぞれ μ, φ で表す.

§1.　先行研究

1970 年, T. M. Apostol [1] は Möbius 関数の一般化として次のような数論的関数を導入した.

定義 1. 正の整数 k, n に対して

$$\mu_k(n) := \begin{cases} 1 & n = 1 \text{ のとき}, \\ 0 & \text{ある素数 } p \text{ に対して } p^{k+1} \mid n \text{ となるとき}, \\ (-1)^r & n = (p_1 \cdots p_r)^k \prod_{i>r} p_i^{a_i} \ (0 \leq a_i < k) \text{ とかけるとき}, \\ 1 & \text{その他} \end{cases}$$

と定め, これを **Apostol Möbius 関数**という.

$k = 1$ のとき, これは通常の Möbius 関数に一致する. T. M. Apostol [1] はさらに Apostol Möbius 関数の部分和に対して次の漸近公式を与えた.

定理 2. 実数 $x \geq 2$ と整数 $k \geq 2$ に対して

$$\sum_{n \leq x} \mu_k(n) = A_k x + O_k\Big(x^{1/k} \log x\Big)$$

が成り立つ. 但し

$$A_{k,n} \coloneqq \frac{\varphi(n)}{n} \prod_{\substack{p:\ \text{素数} \\ p \nmid n}} \Big(1 - 2p^{-k} + p^{-(k+1)}\Big), \quad A_k \coloneqq A_{k,1}$$

である.

1977 年に D. Suryanarayana [9] は Riemann 予想を仮定して次を示した.

定理 3. Riemann 予想を仮定するとき, 実数 $x \geq 3$ と整数 $k \geq 2$ に対して

$$\sum_{n \leq x} \mu_k(n) = A_k x + O\left(x^{4k/(4k^2+1)} \exp\left(A \frac{\log x}{\log \log x}\right)\right)$$

が成り立つ. 但し A はある正の絶対定数である.

A. Bege [4] は 2001 年に次を予想した.

予想 4. (1) 実数 $x \geq 3$ と整数 $k \geq 2, n \geq 1$ に対して

$$\sum_{\substack{r \leq x \\ (r,n)=1}} \mu_k(r) = A_{k,n} x + O\left(2^{\omega(n)} x^{1/k} \exp\left(-D \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log \log x)^{1/5}}\right)\right)$$

が成り立つ. 但し $\omega(n)$ は n の相異なる素因数の個数であり, D はある正の絶対定数である.

(2) Riemann 予想を仮定するとき, 実数 $x \geq 3$ と整数 $k \geq 2, n \geq 1$ に対して

$$\sum_{\substack{r \leq x \\ (r,n)=1}} \mu_k(r) = A_{k,n} x + O\left(2^{\omega(n)} x^{2/(2k+1)} \exp\left(A' \frac{\log x}{\log \log x}\right)\right)$$

が成り立つ. 但し A' はある正の絶対定数である.

2023 年に D. Banerjee, Y. Fujisawa, T. M. Minamide, Y. Tanigawa [3] は次を示した.

定理 5. 実数 $x \geq 3$ と整数 $k \geq 2$ に対して

$$\sum_{n \leq x} \mu_k(n) = A_k x + O_k\left(x^{1/k} \exp\left(-D' k^{-13/5} \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log \log x)^{1/5}}\right)\right)$$

が成り立つ. 但し D' はある正の絶対定数である.

2025 年, G. Martin と C. H. Yip [8] は D. Suryanarayana [9] の結果 (定理 3) を改良した.

定理 6. Riemann 予想を仮定するとき, 実数 $x \geq 3, \varepsilon > 0$ と整数 $k \geq 2$ に対して

$$\sum_{n \leq x} \mu_k(n) = A_k x + O_{k,\varepsilon}\Big(x^{1/(k+1)+\varepsilon}\Big)$$

が成り立つ.

また次も示した.

定理 7. 整数 $k \geq 2$ に対して

$$\sum_{n \leq x} \mu_k(n) = A_k x + B_k x^{1/(k+1)} + \Omega_{\pm}\Big(x^{1/(2k)} \log x\Big) \quad (x \to +\infty)$$

が成り立つ. 但し

$$B_k \coloneqq \frac{\zeta\left(\frac{1}{k+1}\right)}{\zeta^2\left(\frac{k}{k+1}\right)} \prod_{p:\text{ 素数}} \frac{\left(1 - 2p^{-k/(k+1)} + p^{-1}\right)\left(1 - p^{-1}\right)}{\left(1 - p^{-k/(k+1)}\right)^2}$$

である.

§2. 主結果

次に主結果を紹介する.

定理 8. 実数 $x \geq 3$ と整数 $k \geq 2, n \geq 1$ に対して

$$\sum_{\substack{r \leq x \\ (r,n)=1}} \mu_k(r) = A_{k,n} x + O_k\left(2^{\omega(n)} x^{1/k} \exp\left(-D'' k^{-8/5} \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\right)\right)$$

が成り立つ. 但し D'' はある正の絶対定数である.

定理 9. Riemann 予想を仮定するとき, 実数 $x \geq 3$ と整数 $k \geq 2, n \geq 1$ に対して

$$\sum_{\substack{r \leq x \\ (r,n)=1}} \mu_k(r) = A_{k,n} x + O\left(2^{\omega(n)} x^{1/(k+1)} \exp\left(A'' \frac{\log x}{\log\log x}\right)\right)$$

が成り立つ．但し A'' はある正の絶対定数である．

特に, 定理 9 より予想 4 (2) は正しい．

定理 10. Riemann 予想を仮定するとき, 実数 $T \geq 1, \varepsilon > 0$ と整数 $k \geq 2$ に対して

$$\int_1^T \Xi_k^2(x)\,\mathrm{d}x \ll_{k,\varepsilon} T^{1+1/k+\varepsilon}$$

が成り立つ．但し

$$\Xi_k(x) \coloneqq \sum_{n \leq x} \mu_k(n) - A_k x - B_k x^{1/(k+1)}$$

である．

§3.　準備

証明の概要を述べるためにいくつか補題を準備する．

補題 11. 整数 $k \geq 2$ に対して $\mu_k = f_k * c_k$ である．ここで

$$f_k(n) \coloneqq \sum_{d^k \mid n} (\mu * \mu)(d)$$

であり, c_k は対応する Dirichlet 級数が

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_k}{n^s} = \prod_{p:\text{ 素数}} \frac{1 - 2p^{-ks} + p^{-(k+1)s}}{(1-p^{-ks})^2}, \quad \operatorname{Re} s > \frac{1}{k+1} \tag{1}$$

とかける数論的関数である．また, (1) の両辺は $\operatorname{Re} s > 1/(k+1)$ で絶対収束する．

証明. 容易に証明できる．　□

補題 12 ([5] の Lemma 3.4)**.** 実数 $x \geq 1$ と整数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{\substack{r \leq x \\ (r,n)=1}} 1 = \frac{\varphi(n)}{n} x + O\left(2^{\omega(n)}\right)$$

が成り立つ．

補題 13 ([7] の Theorem 2.1)**.** Dirichlet 級数 $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ は $\mathrm{Re}\, s > \sigma_{\mathrm{a}}$ で絶対収束するとする．実数 $x \geq 2, T \geq 2, H \geq 2, b > \sigma_{\mathrm{a}}$ に対して

$$\sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s}{s} \,\mathrm{d}s + O\left(\sum_{x-x/H<n\leq x+x/H} |a_n| + \frac{x^b H}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^b} \right)$$

が成り立つ．

補題 14 ([2] の Theorem 3.3)**.** 実数 $x \geq 1$ に対して

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O\Big(x^{1/2}\Big)$$

が成り立つ．但し γ は Euler–Mascheroni 定数であり $\tau(n)$ は n の正の約数の個数である．

補題 15. ある絶対定数 $c > 0$ が存在して領域

$$\mathrm{Re}\, s \geq 1 - \frac{c}{(\log \tau)^{2/3} (\log\log \tau)^{1/3}}$$

で

$$\zeta^{-1}(s) = O\Big((\log \tau)^{2/3} (\log\log \tau)^{1/3}\Big)$$

が成り立つ．但し $\tau = |\mathrm{Im}\, s| + e^e$ である．

証明. [6] の Lemma 12.3 より従う． □

補題 16. 実数 $x \geq 1$ に対して

$$\sum_{n \leq x} (\mu * \mu)(n) \ll x \delta(x) \tag{2}$$

が成り立つ．但し

$$\delta(x) = \exp\left(-D''' \frac{\Big(\log\Big(x + e^{e^{1/3}}\Big)\Big)^{3/5}}{\big(\log\log\big(x + e^{e^{1/3}}\big)\big)^{1/5}} \right)$$

であり D''' はある正の絶対定数である．

証明. $x \geq 2$ と仮定してよい．補題 13 と補題 14 より

$$\sum_{n \leq x} (\mu * \mu)(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} \zeta^{-2}(s) \frac{x^s}{s} \,\mathrm{d}s$$

$$+ O\left(\sum_{x-x/H<r\le x+x/H} |(\mu*\mu)(n)| + \frac{x^\alpha H}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|(\mu*\mu)(n)|}{n^\alpha} \right)$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT}\zeta^{-2}(s)\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s + O\left(\frac{x(\log x)^2}{T^{1/2}} + x^{1/2}\right)$$

が成り立つ．ここで $\alpha = 1 + 1/\log x, H = T^{1/2}$ である．積分路を

$$\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} = \int_{\beta+iT}^{\alpha+iT} + \int_{\beta-iT}^{\beta+iT} + \int_{\alpha-iT}^{\beta-iT} =: K_1 + K_2 + K_3$$

と分けてそれぞれ評価する．ここで

$$\beta = 1 - c(\log(T+e^e))^{-2/3}(\log\log(T+e^e))^{-1/3}$$

である．補題 15 より

$$K_1, K_3 \ll \int_{\beta}^{\alpha}\left|\zeta^{-2}(\sigma+iT)\right|\frac{x^\sigma}{T}\,\mathrm{d}\sigma$$
$$\ll xT^{-1}(\log(T+e^e))^{4/3}(\log\log(T+e^e))^{2/3}$$

であり

$$K_2 \ll \int_{-T}^{T}\left|\zeta^{-2}(\beta+it)\right|\frac{x^\beta}{1+|t|}\,\mathrm{d}t$$
$$\ll x^\beta(\log(T+e^e))^{7/3}(\log\log(T+e^e))^{2/3}$$

である．

$$T = \exp\left(\frac{\left(\log\left(x+e^{e^{1/3}}\right)\right)^{3/5}}{\left(\log\log\left(x+e^{e^{1/3}}\right)\right)^{1/5}}\right)$$

とおけば (2) を得る． □

注意 17. 関数 $\delta(x)$ は $x \ge 0$ で単調減少で, 実数 $x, y \ge 0$ に対して

$$\delta(xy) \ge \delta(x)\delta(y)$$

が成り立つ．

補題 18. 実数 $x \ge 1$ と整数 $n \ge 1$ と乗法的関数 f に対して

$$\sum_{\substack{r\le x\\(r,n)=1}} f(r) = \sum_{\substack{d\le x\\ \mathrm{rad}(d)|n}} f^{*(-1)}(d)\sum_{q\le x/d} f(q) \tag{3}$$

が成り立つ. 但し $f^{*(-1)}$ は f の Dirichlet 逆関数であり

$$\mathrm{rad}(d) \coloneqq \prod_{\substack{p:\,\text{素数} \\ p \mid d}} p$$

である.

証明. まず, 任意の正の整数 r に対してある正の整数 a, b が一意的に存在して

$$r = ab, \quad \mathrm{rad}(a) \mid n, \quad (b, n) = 1$$

とできることと, さらにこのとき

$$a = (r, n^r), \quad b = \frac{r}{(r, n^r)}, \quad (a, b) = 1$$

となることに注意する. 以上の注意より

$$f(r) = f\left((r, n^r)\frac{r}{(r, n^r)}\right) = f((r, n^r))f\left(\frac{r}{(r, n^r)}\right) = \sum_{\substack{ab=r \\ \mathrm{rad}(a)\mid n \\ (b,n)=1}} f(a)f(b)$$

が成り立つことがわかる. また, 正の整数 d, q に対して $[\mathrm{rad}(d), \mathrm{rad}(q)] = \mathrm{rad}(dq)$ であるから

$$\sum_{\substack{dq=r \\ \mathrm{rad}(d)\mid n \\ \mathrm{rad}(q)\mid n}} f^{*(-1)}(d)f(q) = \sum_{\substack{dq=r \\ \mathrm{rad}(r)\mid n}} f^{*(-1)}(d)f(q) = \left\lfloor \frac{1}{r} \right\rfloor$$

が成り立つ. 以上を組み合わせて

$$\sum_{\substack{dq=r \\ \mathrm{rad}(d)\mid n}} f^{*(-1)}(d)f(q) = \sum_{\substack{dab=r \\ \mathrm{rad}(d)\mid n \\ \mathrm{rad}(a)\mid n \\ (b,n)=1}} f^{*(-1)}(d)f(a)f(b) = \sum_{\substack{mb=r \\ (b,n)=1}} \left\lfloor \frac{1}{m} \right\rfloor f(b) = f(r)\left\lfloor \frac{1}{(r, n)} \right\rfloor$$

を得る. x 以下の正の整数 r に関して足し合わせれば (3) が従う. □

補題 19. 実数 $x \geq 1$ と整数 $k \geq 2$ に対して

$$\sum_{\substack{r \leq x \\ (r,n)=1}} (\mu * \mu)(r) \ll 2^{\omega(n)} x\delta(x)$$

が成り立つ.

証明. 補題 18 と補題 16 より

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{r\le x\\(r,n)=1}}(\mu*\mu)(r) &= \sum_{\substack{d\le x\\ \mathrm{rad}(d)\mid n}}\tau(d)\sum_{q\le x/d}(\mu*\mu)(q)\\ &\ll \sum_{\substack{d\le x\\ \mathrm{rad}(d)\mid n}}\tau(d)\frac{x}{d}\delta\Bigl(\frac{x}{d}\Bigr)\\ &\le x\delta(x)\sum_{\mathrm{rad}(d)\mid n}\frac{\tau(d)}{d\delta(d)}\\ &\ll x\delta(x)\sum_{\mathrm{rad}(d)\mid n}\frac{\tau(d)}{d^{1/2}}\\ &= x\delta(x)\prod_{\substack{p:\,\text{素数}\\ p\mid n}}\frac{1}{\bigl(1-p^{-1/2}\bigr)^2}\\ &\ll 2^{\omega(n)}x\delta(x)\end{aligned}$$

が成り立つ. □

補題 20. 実数 $x\ge 1$ と整数 $k\ge 2$ に対して

$$\sum_{\substack{r\le x\\(r,n)=1}}\frac{(\mu*\mu)(r)}{d^k}=\frac{n^{2k}}{\zeta^2(k)J_k^2(n)}+O\Bigl(2^{\omega(n)}x^{-k+1}\delta(x)\Bigr)$$

が成り立つ. 但し複素数 s と整数 $n\ge 1$ に対して

$$J_s(n)\coloneqq n^s\prod_{\substack{p:\,\text{素数}\\ p\mid n}}\bigl(1-p^{-s}\bigr)$$

である.

証明. Abel の総和公式と補題 19 から従う. □

補題 21. 実数 $x\ge 1, 0<\sigma<1$ に対して

$$\sum_{n\le x}n^{-\sigma}\ll\frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

が成り立つ.

証明. [2] の Theorem 3.2 (b) より従う. □

補題 22. 実数 $x \geq 1$ と整数 $k \geq 2, n \geq 1$ に対して

$$\sum_{\substack{r \leq x \\ (r,n)=1}} \frac{c_k(r)}{r} = \frac{\zeta^2(k) J_k^2(n) A_{k,n}}{\varphi(n) n^{2k-1}} + O_k\Big(x^{2/(2k+1)-1}\Big)$$

が成り立つ.

証明. Abel の総和公式と補題 11 から従う. □

§4. 証明

定理 8 のみ示す. まず f_k に関する和を評価する. $z = x^{1/k}, x^{-1/k} \leq \rho \leq 1$ として次のように和を分解する.

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{r \leq x \\ (r,n)=1}} f_k(r) &= \sum_{\substack{d^k q \leq x \\ (d,n)=(q,n)=1}} (\mu * \mu)(d) \\
&= \left(\sum_{\substack{d^k q \leq x \\ d \leq \rho z \\ (d,n)=(q,n)=1}} + \sum_{\substack{d^k q \leq x \\ q \leq \rho^{-k} \\ (d,n)=(q,n)=1}} - \sum_{\substack{d \leq \rho z \\ q \leq \rho^{-k} \\ (d,n)=(q,n)=1}} \right) (\mu * \mu)(d) \\
&=: S_1 + S_2 - S_3.
\end{aligned}$$

これらを順に評価していく. 補題 12, 補題 20, 補題 14 より

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{\substack{d \leq \rho z \\ (d,n)=1}} (\mu * \mu)(d) \sum_{\substack{q \leq x/d^k \\ (q,n)=1}} 1 \\
&= \frac{\varphi(n)}{n} x \sum_{\substack{d \leq \rho z \\ (d,n)=1}} \frac{(\mu * \mu)(d)}{d^k} + O\left(2^{\omega(n)} \sum_{\substack{d \leq \rho z \\ (d,n)=1}} |(\mu * \mu)(d)| \right) \\
&= \frac{\varphi(n) n^{2k-1}}{\zeta^2(k) J_k^2(n)} x + O\Big(2^{\omega(n)} \rho^{1-k} z \delta(\rho z)\Big) + O\Big(2^{\omega(n)} \rho z \log(\rho z + 1)\Big)
\end{aligned}$$

が成り立つ. また補題 19, 補題 21 より

$$S_2 = \sum_{\substack{q \leq \rho^{-k} \\ (q,n)=1}} \sum_{\substack{d \leq (x/q)^{1/k} \\ (d,n)=1}} (\mu * \mu)(d)$$

$$
\begin{aligned}
&\ll 2^{\omega(n)} x^{1/k} \sum_{\substack{q \le \rho^{-k} \\ (q,n)=1}} q^{-1/k} \delta\left(\left(\frac{x}{q}\right)^{1/k}\right) \\
&\ll 2^{\omega(n)} \rho^{1-k} z \delta(\rho z)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．そして補題 19 より

$$
S_3 = \sum_{\substack{d \le \rho z \\ (d,n)=1}} (\mu * \mu)(d) \sum_{\substack{q \le \rho^{-k} \\ (q,n)=1}} 1 \ll 2^{\omega(n)} \rho^{1-k} z \delta(\rho z)
$$

が成り立つ．$x \ge \exp\bigl(\exp\bigl(224D^5\bigr)\bigr) =: B$ のとき $\rho = \delta^{1/k}\bigl(z\delta^{1/k}(z)\bigr)$ とおけば

$$
\begin{aligned}
\rho^{1-k} z \delta(\rho z) &= \rho z \delta^{-1}\Bigl(z\delta^{1/k}(z)\Bigr)\delta\Bigl(z\delta^{1/k}\Bigl(z\delta^{1/k}(z)\Bigr)\Bigr) \\
&\le \rho z \delta^{-1}\Bigl(z\delta^{1/k}(z)\Bigr)\delta\Bigl(z\delta^{1/k}(z)\Bigr) \\
&= \rho z
\end{aligned}
$$

であり

$$
\begin{aligned}
\rho z \log(\rho z + 1) &\le z\delta^{1/k}\Bigl(z\delta^{1/k}(z)\Bigr)\log(1+\rho z) \\
&\le z\delta^{1/k}\Bigl(z\delta^{1/k}(x)\Bigr)\log(1+z) \\
&\le z\delta^{1/k}\Bigl(z^{1/2}\Bigr)\log(1+z) \\
&\le z\delta^{1/(2k)}(z)\log(1+z) \\
&\ll_k z\delta^{1/(3k)}(z) \\
&= x^{1/k}\exp\left(-\frac{D'''}{3k}\frac{\Bigl(\log\Bigl(x^{1/k}+e^{e^{1/3}}\Bigr)\Bigr)^{3/5}}{\bigl(\log\log\bigl(x^{1/k}+e^{e^{1/3}}\bigr)\bigr)^{1/5}}\right) \\
&\le x^{1/k}\exp\left(-\frac{D'''}{3k}\frac{\Bigl(\frac{1}{k}\log\Bigl(x+e^{e^{1/3}}\Bigr)\Bigr)^{3/5}}{\bigl(\log\log\bigl(x+e^{e^{1/3}}\bigr)\bigr)^{1/5}}\right) \\
&= x^{1/k}\delta^{k^{-8/5}/3}(x)
\end{aligned}
$$

である．また $1 \le x \le B$ のとき $\rho = 1$ とおけば

$$
\rho^{1-k} z \delta(\rho z) \le \rho z
$$

であり

$$
\rho z(\log(1+\rho z)) \le x^{1/k}(\log(1+x))
$$

$$
\begin{aligned}
&\ll x^{1/k}\delta^{-1}(x) \\
&= x^{1/k}\delta^{-2}(x)\delta(x) \\
&\le x^{1/k}\delta^{-2}(B)\delta(x) \\
&\ll x^{1/k}\delta^{k^{-8/5}/3}(x)
\end{aligned}
$$

である. 従って $x \ge 1$ で

$$
\sum_{\substack{r\le x\\(r,n)=1}} f_k(r) = \frac{\varphi(n)n^{2k-1}}{\zeta^2(k)J_k^2(n)}x + O_k\Big(2^{\omega(n)}x^{1/k}\delta_k(x)\Big)
$$

が成り立つ. ここで $\delta_k(x) := \delta^{k^{-8/5}/3}(x)$ とおいた. 最後に補題 11, 補題 22 より

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{r\le x\\(r,n)=1}} \mu_k(r) &= \sum_{\substack{d\le x\\(d,n)=1}} c_k(d) \sum_{\substack{q\le x/d\\(q,n)=1}} f_k(q) \\
&= \frac{\varphi(n)n^{2k-1}}{\zeta^2(k)J_k^2(n)}x \sum_{\substack{d\le x\\(d,n)=1}} \frac{c_k(d)}{d} + O_k\left(2^{\omega(n)}x^{1/k}\delta_k(x) \sum_{\substack{d\le x\\(d,n)=1}} \frac{|c_k|}{d^{1/k}\delta_k(d)}\right) \\
&= A_{k,n}x + O_k\Big(2^{\omega(n)}x^{1/k}\delta_k(x)\Big)
\end{aligned}
$$

を得る.

参考文献

[1] T. M. Apostol. “Möbius functions of order k”. In: *Pacific J. Math.* 32 (1970), pp. 21–27.

[2] T. M. Apostol. *Introduction to analytic number theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976, pp. xii+338.

[3] D. Banerjee, Y. Fujisawa, T. M. Minamide, and Y. Tanigawa. “A note on the partial sum of Apostol’s Möbius function”. In: *Acta Math. Hungar.* 170.2 (2023), pp. 635–644.

[4] A. Bege. “A generalization of Apostol’s Möbius functions of order k”. In: *Publ. Math. Debrecen* 58.3 (2001), pp. 293–301.

[5] E. Cohen. “Arithmetical functions associated with the unitary divisors of an integer”. In: *Math. Z.* 74 (1960), pp. 66–80.

[6] A. Ivić. *The Riemann zeta-function.* Theory and applications, Reprint of the 1985 original [Wiley, New York; MR0792089 (87d:11062)]. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003, pp. xxii+517.

[7] J. Liu and Y. Ye. "Perron's formula and the prime number theorem for automorphic L-functions". In: *Pure Appl. Math. Q.* 3.2 (2007), pp. 481–497.

[8] G. Martin and C. H. Yip. "Oscillation results for the summatory functions of fake μ's". In: *Canadian Journal of Mathematics* (2025), pp. 1–44.

[9] D. Suryanarayana. "On a theorem of Apostol concerning Möbius functions of order k". In: *Pacific J. Math.* 68.1 (1977), pp. 277–281.