An alternative proof of the asymptotic formula for the Fourier coefficients of the elliptic modular j-function

九州大学 マス・フォア・イノベーション連携学府
池田 香凜
Karin Ikeda
Joint Graduate School of Mathematics for Innovation
Kyushu University

1 序論

楕円モジュラー j-関数は最も基本的なモジュラー関数であり，ムーンシャイン現象や虚数乗法論など様々な広がりを見せる興味深い対象である．本稿では，楕円モジュラー j-関数の Fourier 係数 c_n の漸近公式に焦点を当て，その漸近公式を確率論を用いて導出する方法を簡単にまとめる．

定義 1 (楕円モジュラー j-関数)**.** 楕円モジュラー j-関数 $j(\tau)$ は，重さ 4 の Eisenstein 級数 $E_4(\tau)$ とエータ関数 $\eta(\tau)$ を用いて，上半平面 $\mathfrak{H} := \{z \in \mathbb{C}\,; \Im(z) > 0\}$ 上の関数として以下のように定義される．

$$j(\tau) := \frac{E_4(\tau)^3}{\eta(\tau)^{24}}.$$

ここに，

$$E_4(\tau) := 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d^3 \right) q^n \quad (q := e^{2\pi i \tau}, \tau \in \mathfrak{H}),$$

$$\eta(\tau) := q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).$$

楕円モジュラー j-関数は $\mathfrak{H}$ 上で正則関数であり，$\mathfrak{H}$ への $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用に関して不変である．すなわち

$$j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = j(\tau) \qquad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \right)$$

が成り立つ．また，無限遠点 $i\infty$ で留数 1 の一位の極をもち，Fourier 展開は

$$\begin{aligned} j(\tau) &= \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \cdots \\ &= \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n \end{aligned}$$

となる．

本稿の主題である，Fourier 係数 c_n（すべて正整数）の漸近公式は Petersson [8] および Rademacher [9] によって，円周法を用いることにより

$$c_n \sim \frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{4}}} \qquad (n \to \infty) \tag{1}$$

と証明されている．この円周法は，Hardy と Ramanujan [5] により 1918 年に，分割数

$$p(n) := \#\{(n_1, \ldots, n_r) \mid n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n,\, n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_r\} \quad (n \in \mathbb{Z}_{>0})$$

の漸近公式の導出に用いられた．分割数の漸近公式はその後，他にも様々な方法で証明がなされているが，特に Báez-Duarte [1] によって，確率論を用いた別証明が与えられた．j-関数の Fourier 係数の漸近公式についても，Dewar と R. Murty [4] が Laplace の “steppest descent” 法を用いることで示したり，R. Murty と Sampath [7] が特異モジュラスのトレースを用いた j-関数の明示公式 [6] を用いることで証明がなされているが，本稿では，上述の確率論を用いる方法で導出する．

2 Báez-Duarte の方法

非負係数，収束半径 $R > 0$ の冪級数

$$F(t) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n \qquad (f_n \in \mathbb{R}_{\geq 0})$$

に対して，$t \in (0, R)$ を固定するごとに，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数 X_t に対して以下を満たすものを考える．

$$P[X_t = n] := \frac{f_n t^n}{F(t)}.$$

この確率空間上で，平均 $m(t)$，分散 $\sigma^2(t)$，特性関数 $E[e^{i\theta X_t}]$ を以下のように計算することができる．

$$m(t) := E[X_t] = t\frac{d}{dt}\log F(t), \tag{2}$$

$$\sigma^2(t) := E[X_t^2] - (E[X_t])^2 = t\frac{d}{dt}m(t), \tag{3}$$

$$E[e^{i\theta X_t}] = \frac{F(te^{i\theta})}{F(t)} \qquad (\theta \in \mathbb{R}).$$

この確率空間に対して成り立つ，次に述べる補題が，漸近公式を得るための鍵となっている．

定義 2 (Strong Gaussian 条件)**.** 冪級数 $F(t)$ が strong Gaussian 条件を満たすとは，

$$\lim_{t \to R} \int_{-\pi\sigma(t)}^{\pi\sigma(t)} |E[e^{i\theta Z(t)}] - e^{-\frac{1}{2}\theta^2}| d\theta = 0$$

が成り立つときをいう．ここに，$Z(t) := (X_t - m(t))/\sigma(t)$ とした．

補題 3 (Báez-Duarte [1]). 冪級数 $F(t)$ が strong Gaussian 条件を満たすとする．また，$\widetilde{m}(t)$ と $\widetilde{\sigma}(t)$ を，$t \to R$ のとき以下を満たすような連続関数とする．

$$\widetilde{m}(t) \to \infty \text{ (単調)}, \qquad \widetilde{\sigma}(t) \sim \sigma(t), \qquad \epsilon(t) := \frac{\widetilde{m}(t) - m(t)}{\sigma(t)} \to 0. \tag{4}$$

このとき，

$$f_n \sim \frac{F(\tau_n)}{\sqrt{2\pi}\widetilde{\sigma}(\tau_n)\tau_n^n} \quad (n \to \infty)$$

が成立．ここに，τ_n は $\widetilde{m}(t) = n$ の唯一の解．

注意 4.

1. 条件 $(-1)^n g_n \geq 0$ を満たす，交代級数

   $$G(t) := \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n$$

   に対して，確率分布

   $$P[\widetilde{X_t} = n] := \frac{(-1)^n g_n t^n}{G^*(t)} \qquad \left(G^*(t) := \sum_{n=0}^{\infty} |g_n| t^n\right)$$

   をもつ確率変数 $\widetilde{X_t}$ を考える．すると，Báez-Duarte と同様の証明方法で以下のような漸近公式を得る．

   $$g_n \sim \frac{G(\tau_n)}{\sqrt{2\pi}\widetilde{\sigma}(\tau_n)(-\tau_n)^n}.$$

2. 式 (4) の 3 条件を満たすような $\widetilde{m}(t)$ と $\widetilde{\sigma}(t)$ は，平均と分散の主要項をそれぞれとることで見つけることができる．

最後に，strong Gaussian 条件を確認するときに用いる Lyapunov の中心極限定理を紹介する．

定理 5. [2, Theorems 26.3, 27.3] 各 n に対し，独立な確率変数 $X_{n,1}, \dots, X_{n,r_n}$ が与えられているとする（ただし，r_n は $n \to \infty$ のとき $r_n \to \infty$）．また，

$$\sigma_{n,k}^2 := E[X_{n,k}^2], \quad s_n^2 := \sum_{k=1}^{r_n} \sigma_{n,k}^2, \quad S_n := X_{n,1} + \cdots + X_{n,r_n}$$

とし，各 $1 \leq k \leq r_n$ に対し $E[X_{n,k}] = 0$ を仮定する．このとき，ある $\delta > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} E\left[|X_{n,k}|^{2+\delta}\right] = 0 \tag{5}$$

を満たすとき

$$E\left[e^{i\theta \frac{S_n}{s_n}}\right] \to e^{-\frac{\theta^2}{2}} \quad (n \to \infty)$$

が成立．

3 証明の概略

前節で紹介した補題 3 を利用して，楕円モジュラー j-関数の Fourier 係数の漸近公式が証明される．この節では，その証明の概略を述べる．最初に，証明の鍵となった等式を紹介する．

補題 6 (Kaneko)**.** 任意の $\tau \in \mathfrak{H}$ に対して，

$$j(\tau) = 2^7(\theta_0(\tau)^8 + \theta_2(\tau)^8 + \theta_3(\tau)^8)(\theta_0(\tau)^{-8} + \theta_2(\tau)^{-8} + \theta_3(\tau)^{-8})$$

が成り立つ．ここに，$\theta_i(\tau)$ $(i = 0, 2, 3)$ は古典的な Jacobi のテータ関数

$$\begin{aligned}
\theta_0(\tau) &:= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n^2}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)(1-q^{n-\frac{1}{2}})^2, \\
\theta_2(\tau) &:= \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = 2q^{\frac{1}{8}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)(1+q^n)^2, \\
\theta_3(\tau) &:= \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{n^2}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)(1+q^{n-\frac{1}{2}})^2
\end{aligned}$$

である．

この等式を

$$\begin{aligned}
j(\tau) = 2^7 \cdot 3 &+ \underbrace{2^7\left(\left(\frac{\theta_0(\tau)}{\theta_2(\tau)}\right)^8 + \left(\frac{\theta_3(\tau)}{\theta_2(\tau)}\right)^8\right)}_{H_1(\tau)} \\
&+ \underbrace{2^7\left(\left(\frac{\theta_0(\tau)}{\theta_3(\tau)}\right)^8 + \left(\frac{\theta_3(\tau)}{\theta_0(\tau)}\right)^8\right)}_{H_2(\tau)} + \underbrace{2^7\left(\left(\frac{\theta_2(\tau)}{\theta_3(\tau)}\right)^8 + \left(\frac{\theta_2(\tau)}{\theta_0(\tau)}\right)^8\right)}_{H_3(\tau)}
\end{aligned}$$

と展開し，各 $H_i(\tau)$ $(1 \le i \le 3)$ に対して Báez-Duarte の方法を用いる．そこから得られる 3 つの漸近公式を比較し，主要項を見つけ出すことで目的の Fourier 係数の漸近公式 (1) を導出する．補題 3 で現れるような，$\widetilde{m}(t)$ および $\widetilde{\sigma}(t)$ を求めるための準備として，以下の補助関数を定義する．

$$\begin{aligned}
P_{m,a}(t) &:= \prod_{n=0}^{\infty} (1 - t^{mn+a})^{-1} \quad (1 \le a \le m), \\
Q(t) &:= \prod_{n=1}^{\infty} (1 + t^{2n-1}), \qquad R(t) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + t^{2n}).
\end{aligned}$$

式 (2)，(3) および Euler–Maclaurin の和公式を用いて，それぞれの関数の平均と分散を計算する．その結果，関数 $P_{m,a}(t)$ の平均 $m_{P_{m,a}}(t)$ と分散 $\sigma^2_{P_{m,a}}(t)$ は以下のようになる．

$$m_{P_{m,a}}(t) = \frac{\pi^2}{6m\rho^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho}\right), \qquad \sigma^2_{P_{m,a}}(t) = \frac{\pi^2}{3m\rho^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^2}\right). \tag{6}$$

ここに，$\rho := -\log t$ とし，$\rho \to 0$ のときの評価をした．以降この記号を用いることとする．また，関数 $Q(t)$ と $R(t)$ の平均と分散については，同じ計算結果を得る．

$$m_\bullet(t) = \frac{\pi^2}{24\rho^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho}\right), \qquad \sigma_\bullet^2(t) = \frac{\pi^2}{12\rho^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \quad (\bullet \in \{Q, R\}). \tag{7}$$

証明の準備が完了したので，各項 $H_i(\tau)$ $(1 \le i \le 3)$ の Fourier 係数に注目していきたい．それぞれの Fourier 展開を Mathematica を用いて見てみると，以下のようであることがわかる．

$$\begin{aligned}
H_1(\tau) &:= 2^7\left(\left(\frac{\theta_0(\tau)}{\theta_2(\tau)}\right)^8 + \left(\frac{\theta_3(\tau)}{\theta_2(\tau)}\right)^8\right) = \frac{1}{q} + 104 + 276q - 2048q^2 + 11202q^3 - \cdots, \\
H_2(\tau) &:= 2^7\left(\left(\frac{\theta_0(\tau)}{\theta_3(\tau)}\right)^8 + \left(\frac{\theta_3(\tau)}{\theta_0(\tau)}\right)^8\right) \left(= \sum_{n=0}^{\infty} h_{2,n}q^n\right) \\
&= 2^7\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+(-q^{1/2})^{2n-1}}{1-(-q^{1/2})^{2n-1}}\right)^{16} + 2^7\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+(q^{1/2})^{2n-1}}{1-(q^{1/2})^{2n-1}}\right)^{16} \\
&= (128 - 4096q^{1/2} + 65536q - 704512q^{3/2} + 5767168q^2 - \cdots) \\
&\quad + (128 + 4096q^{1/2} + 65536q + 704512q^{3/2} + 5767168q^2 + \cdots) \\
&= 256 + 131072q + 11534336q^2 + \cdots,
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
H_3(\tau) &:= 2^7\left(\left(\frac{\theta_2(\tau)}{\theta_3(\tau)}\right)^8 + \left(\frac{\theta_2(\tau)}{\theta_0(\tau)}\right)^8\right) \left(= \sum_{n=0}^{\infty} h_{3,n}q^n\right) \\
&= 2^7\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+(-q^{1/2})^{2n}}{1-(-q^{1/2})^{2n-1}}\right)^{16} + 2^7\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+(q^{1/2})^{2n}}{1-(q^{1/2})^{2n-1}}\right)^{16} \\
&= (32768q - 524288q^{3/2} + 4980736q^2 - 35651584q^{5/2} + 211156992q^3 - \cdots) \\
&\quad + (32768q + 524288q^{3/2} + 4980736q^2 + 35651584q^{5/2} + 211156992q^3 + \cdots) \\
&= 65536q + 9961472q^2 + 422313984q^3 + \cdots.
\end{aligned} \tag{9}$$

この観察を踏まえて，各 $H_i(\tau)$ $(1 \le i \le 3)$ の Fourier 係数の評価を行なう．Báez-Duarte の手法を 3 回適用することになるのだが，$H_2(\tau)$ についてのみ少し詳しく書くこととする．

$H_1(\tau)$ について

よく知られた等式

$$\eta(\tau)^3 = \frac{1}{2}\theta_0(\tau)\theta_2(\tau)\theta_3(\tau), \qquad \theta_3(\tau)^4 = \theta_0(\tau)^4 + \theta_2(\tau)^4 \tag{10}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
H_1(\tau) &= 2^7\frac{(\theta_0(\tau)^8 + (\theta_0(\tau)^4 + \theta_2(\tau)^4)^2)\theta_2(\tau)^4}{\theta_2(\tau)^{12}} \\
&= 2^7\frac{\theta_2(\tau)^{12} + 2\theta_0(\tau)^4\theta_2(\tau)^4(\theta_0(\tau)^4 + \theta_2(\tau)^4)}{\theta_2(\tau)^{12}} \\
&= 2^7\left(1 + 2\frac{(2\eta(\tau)^3)^4}{\theta_2(\tau)^{12}}\right) = 2^7 + \frac{1}{q}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)^{-24}.
\end{aligned}$$

となる（式 (10) については，例えば [3], p.29 を見よ）．実は $H_1(\tau)$ は主要項ではないため，係数の値がある所以降 $H_1(\tau)$ より大きい

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-24} = 1 + 24q + 324q^2 + 3200q^3 + 25650q^4 + 176256q^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} h_{1,n}^* q^n$$

に対して，補題 3 を用いて漸近公式を導出すれば十分である．実際，Báez-Duarte の手法を用いることで

$$h_{1,n}^* \sim \frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2}n^{\frac{27}{4}}}$$

を得るので，$H_1(\tau)$ は j-関数の Fourier 係数の漸近公式に影響を及ぼさないことがわかる．

$H_2(\tau)$ について

Mathematica を用いて得られる式 (8) において観察されるように，第 2 項に注目し，

$$H_2^*(t) := 2^7 \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+t^{2n-1}}{1-t^{2n-1}}\right)^{16} = \sum_{n=0}^{\infty} h_{2,n}^* t^n$$

に対して Báez-Duarte の手法を用いれば良いことがわかる（第 1 項は交代級数であるため，注意 4 で述べたような扱いをする）．

まず，$H_2^*(t)$ が strong Gaussian 条件を満たすことを確認する．関数

$$H_{2,k}^*(t) := \left(\frac{1+t^{2k-1}}{1-t^{2k-1}}\right)^{16} = \sum_{n=0}^{\infty} h_{2,n,k}^* t^n$$

に対し，確率分布

$$P[X_{t,k} = n] = \frac{h_{2,n,k}^* t^n}{H_{2,k}^*(t)}$$

をもつ確率変数 $X_{t,k}$ を考える．関数 $H_{2,k}^*(t)$ の平均を $m_k(t)$，分散を $\sigma_k^2(t)$ と表すこととする．$Y_{t,k} := X_{t,k} - m_k(t)$ とすると $E[Y_{t,k}] = 0$ であり，Euler–Maclaurin の和公式を用いて $E[Y_{t,k}^4]$ を計算することで，定理 5 の条件式 (5) が $\delta = 2$ の場合に成り立つことが確認できる．定理 5 から得られる結果と $|E[e^{i\theta Z(t)}]| < e^{-c/\rho}$ $(\exists c > 0)$ という評価を合わせることで strong Gaussian 条件を確かめることができる．

次に，$H_2^*(t)$ の平均 $m_{H_2^*}(t)$ および分散 $\sigma_{H_2^*}^2(t)$ を計算し，主要項を見つける．式 (2)，(3) より，それぞれ

$$m_{H_2^*}(t) = 16(m_{P_{2,1}}(t) + m_Q(t)), \qquad \sigma_{H_2^*}^2(t) = 16(\sigma_{P_{2,1}}^2(t) + \sigma_Q^2(t))$$

であることがわかるので，(6) と (7) を用いることで

$$m_{H_2^*}(t) = \frac{2\pi^2}{\rho^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho}\right) \qquad \sigma_{H_2^*}^2(t) = \frac{4\pi^2}{\rho^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$$

を得る．

最後に,

$$\widetilde{m}_{H_2^*}(t) := \frac{2\pi^2}{\rho^2}, \qquad \widetilde{\sigma}_{H_2^*}(t) := \sqrt{\frac{4\pi^2}{\rho^3}}$$

とし，Euler–Maclaurin の和公式を用いて得られる式

$$\log H_2^*(e^{-\lambda}) = \log\frac{1}{2} + \frac{2\pi^2}{\lambda} + \mathcal{O}(\lambda) \quad (\lambda > 0, \lambda \to 0)$$

を用いて補題 3 を適用することで

$$h_{2,n}^* \sim \frac{H_2^*(\tau_n)}{\sqrt{2\pi}\widetilde{\sigma}_{H_2^*}(\tau_n)\tau_n^n} = \frac{e^{2\pi\sqrt{2n}}}{2(2n)^{\frac{3}{4}}}$$

を得る．したがって，$H_2(\tau)$ の Fourier 係数の漸近公式は

$$h_{2,n} \sim (1+(-1)^{2n})\frac{e^{2\pi\sqrt{2(2n)}}}{2(2(2n))^{\frac{3}{4}}} = \frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{2\sqrt{2}n^{\frac{3}{4}}} \tag{11}$$

となる．

$H_3(\tau)$ について

関数 $H_3(\tau)$ は $H_2(\tau)$ と同様の構造をしていることが式 (8) と (9) を見比べてみるとわかる．したがって，$H_3(\tau)$ では,

$$H_3^*(t) := 2^7 \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+t^{2n}}{1-t^{2n-1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} h_{3,n}^* t^n$$

に着目する．前述の $H_2^*(t)$ のように計算することで

$$h_{3,n}^* \sim \frac{e^{2\pi\sqrt{2n}}}{2(2n)^{\frac{3}{4}}}$$

を得ることができ，したがって,

$$h_{3,n} \sim (1+(-1)^{2n})\frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{2(4n)^{\frac{3}{4}}} = \frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{2\sqrt{2}n^{\frac{3}{4}}} \tag{12}$$

となる．

以上より，式 (11) と (12) を合わせることで，j-関数の Fourier 係数 c_n の漸近公式 (1) を得る．

謝辞

2025 年度 RIMS 共同研究（公開型）「解析的整数論とその周辺」での講演の機会を与えて下さった，谷口 隆先生（神戸大学），立谷 洋平先生（弘前大学）に感謝申し上げます．本研究は，日本学術振興会特別研究費（課題番号：25KJ1953）と九州大学マス・フォア・イノベーション卓越大学院プログラムの助成を受けたものです．

参考文献

[1] L. Báez-Duarte, Hardy–Ramanujan's asymptotic formula for partitions and the central limit theorem, Adv. Math., **125** (1) (1997), 114–120.

[2] P. Billingsley, Probability and Measure, anniversary edition, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, (2012).

[3] J. H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder and D. Zagier, The 1-2-3 of Modular Forms, Universitext, Springer-Verlag, Belin–Heidelberg (2008).

[4] M. Dewar and M. R. Murty, An asymptotic formula for the coefficients of $j(z)$, Int. J. Number Theory, **9** (2013), 641–652.

[5] G. H. Hardy and S. Ramanujan, Asymptotic formulae in combinatory analysis, Proc. London Math. Soc. (2), (1918), 17:75–115.

[6] M. Kaneko, Traces of singular moduli and the Fourier coefficients of the elliptic modular function $j(\tau)$. CRM Proc. Lect. Notes (Ottawa, ON, 1996) (Number Theory, 19). American Mathematical Society, Providence, RI, (1999), 173–176.

[7] M. R. Murty and K. Sampath, On the asymptotic formula for the Fourier coefficients of j-function, Kyushu J. Math. **70** (2016), no.1, 83–91.

[8] H. Petersson, Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen, Acta Math. **58** (1) (1932) 169–215.

[9] H. Rademacher, The Fourier coefficients of the modular invariant $j(\tau)$, Amer. J. Math. **60** (2) (1938) 501–512.