# チェビシェフ予想のいくつかの変種 [1]

東京科学大学・理学院 数学系　鈴木正俊 (Suzuki, Masatoshi)
Department of Mathematics, School of Science, Institute of Science Tokyo

## 1. はじめに

表題に関する研究集会での講演の筋道は, 概ね出版論文 [11] にそったものであった [2]. しかし多くの場合にそうであるように, この話題に関しても, 論文で述べられている動機や背景は, 実際の研究でのそれとは異なっている. そこで本稿では, 筆者が講究録の記事でよくやるように, 実際の研究の進捗と近い形で, 得られた諸結果について述べる. こういったメイキング映像ならぬメイキング記事のようなものが, いつか誰かの研究の刺激になれば嬉しい限りである.

## 2. 最初に得られた結果

素数定理によれば, 正数 $x > 2$ 以下の素数の個数 $\pi(x)$ は, $x \to \infty$ のとき対数積分 $\mathrm{li}(x)$ に漸近する. これらの差について, $\pi(x) - \mathrm{li}(x) < 0$ がすべての $x > 2$ で成り立つことが予想されていたが, Littlewood (1914) によって否定的に解決された. この話は有名なので講演の枕に用いたが, 実際のところ, これは本稿で述べる研究の動機ではない. 本来の動機は筆者が 2022 年以来関心を持っているスクリュー関数への興味であった (cf. 論文 [8], 概説 [9]).

実軸上で定義された複素数値関数 $g(t)$ がスクリュー関数であるとは, $g(-t) = \overline{g(t)}$ が成り立ち, 核 $G_g(t,u) := g(t-u) - g(t) - g(-u) + g(0)$ が非負値であることをいう. 核 $G_g(t,u)$ が非負値とは, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $t_i \in \mathbb{R}$, $\xi_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ に対し,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} G_g(t_i, t_j)\,\xi_i\overline{\xi_j} \;\geqslant\; 0$$

が成り立つことである. Riemann ゼータ関数や Dirichlet $L$ 関数などの Selberg クラスに属す関数 $F$ に対して, ある実軸上の関数 $g_F(t)$ を定義することができる. そして, これが $g_F(0) = 0$ を満たすスクリュー関数であることと, $F$ に対する Grand Riemann Hypothesis (GRH) が成り立つことが同値であることが示される ([10, Theorem 5.1]). 特に, もし GRH が成り立つなら,

$$-\Re(g_F(t)) = \frac{1}{2} G_{g_F}(t,t)$$

は実軸上で非負値である. 以降, 用語の濫用になるが, $g_F(t)$ を $F$ のスクリュー関数とよぶことにする.

Dirichlet $L$ 関数 $L(s,\chi)$ のスクリュー関数は

$$g_\chi(t) := g_{\chi,0}(t) + g_{\chi,\infty}(t), \quad g_{\chi,0}(t) := \sum_{n \leqslant \exp(|t|)} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{\sqrt{n}} \log \frac{\exp(|t|)}{n}$$

という形になる. この $g_{\chi,0}(t)$ は Euler 積から定まり, $g_{\chi,\infty}(t)$ はガンマ因子から定まる.

---

[1] この研究は基盤研究 (C)（研究代表者：鈴木正俊, 研究課題番号：23K03050）の助成を受けています.
[2] 集会中かつ講演の 2 日前という絶妙 (最悪?) なタイミングで校正刷りが届いた.

GRH との関係から, 筆者は $\Re(g_\chi(t))$ の符号に関心を持ってはいたが, その一部分である $\Re(g_{\chi,0}(t))$ や $\Re(g_{\chi,\infty}(t))$ の符号に注意を払ったことはなかった. そんな折, arXiv で Conrey の論文 [3] (のプレプリント) を見かけた. これの定理 3 と定理 4 を見たとき, 筆者ははじめて

『$\Re(g_{\chi,0}(t))$ の符号はどうなっているのだろう?』

という疑問をもった. そこで早速, Mathematica を使って幾つかの具体的な $\chi$ について $\Re(g_{\chi,0}(t))$ の値を計算させてみると, $|t|$ が十分大きなとき, $\Re(g_{\chi,0}(t))$ は一定符号であることが観察された. こういった観察が得られれば, この現象と GRH との関係性を見つけることは難しくなかった:

**定理 1** ([11, Theorem 8]). Dirichlet 指標 $\chi$ を主指標でない法 $q$ の指標とする. ある $x_0 \geqslant 2$ が存在して, すべての $x \geqslant x_0$ に対し

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \Re(\chi(n)) \log \frac{x}{n} \tag{2.1}$$

が一定の符号をもつと仮定する. さらに, ある $1/2 \leqslant \beta < 1$ に対して $\sigma > \beta$ なるすべての $\sigma$ について $L(\sigma, \chi) \neq 0$ が成り立つと仮定する. このとき, $L(s, \chi)$ は右半平面 $\Re(s) > \beta$ に零点をもたない.

特に, (2.1) が十分大きなすべての $x > 0$ に対して一定の符号をもち, かつ $\sigma > 1/2$ に対して $L(\sigma, \chi) \neq 0$ であれば, $L(s, \chi)$ に対する GRH が成り立つ.

こうした結果が得られると, Riemann ゼータ関数に付随するスクリュー関数 $g_\zeta(t)$ でも状況は同じだろうかという疑問が自然にわく. この場合 $g_{\chi,0}(t)$ にあたるのは,

$$g_{\zeta,0}(t) := \sum_{n \leqslant \exp(|t|)} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \log \frac{\exp(|t|)}{n} - 4(e^{t/2} + e^{-t/2} - 2)$$

になる. これの値も計算してみると, 十分大きな $|t|$ について (実際には $t \neq 0$ で) これが負値であることが観察される. そして, 次が証明される:

**定理 2** ([11, Theorem 1]). RH が成り立つことと, 十分大きなすべての $x > 2$ に対し

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \log \frac{x}{n} - 4\sqrt{x} \ \leqslant\ 0 \tag{2.2}$$

が成り立つことは同値である.

## 3. 転機となった気付き

さて, 一つ二つの結果が得られたとはいえ, スクリュー関数という数論では知名度が低い対象について何か言えたというだけでは, 論文として発表するにはインパクトに欠ける. そのような理由で定理 1, 2 の発表はしばらく保留にしていた. ところが, 昨年度の RIMS 集会で発表した [7] との関連で, Bhowmik–Halupczok–Matsumoto–Suzuki [2] による Goldbach 問題の論文を読んでいたとき, 法 4 の非自明指標 $\chi_4$ に対して

$$\frac{g_{\chi_4,0}(\log x)}{\log x} = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv 1 \bmod 4}} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\log n}{\log x}\right) - \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv 3 \bmod 4}} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\log n}{\log x}\right) \tag{3.1}$$

と書けることに気がついた. こう書き直してみると, Chebyshev の予想

$$\sum_{p\equiv 1 \bmod 4} e^{-p/x} \quad - \sum_{p\equiv 3 \bmod 4} e^{-p/x} \to -\infty \quad (x\to\infty)$$

が連想される. そうすると, (3.1) の $x\to\infty$ での挙動に興味が持たれる. そこで, 再び Mathematica で (3.1) の値を数値計算してみると, どうも $x\to\infty$ のとき定数に収束するようなグラフが得られる. この観察をもとに計算した結果, 次が得られた:

**定理 3** ([11, Theorem 3])**.** Dirichlet $L$ 関数 $L(s,\chi_4)$ について GRH が成り立つことと,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g_{\chi_4,0}(\log x)}{\log x}=\lim_{x\to\infty}\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)\chi_4(n)}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{\log n}{\log x}\right)=-\frac{L'}{L}\left(\frac{1}{2},\chi_4\right) \tag{3.2}$$

が成り立つことは同値である.

(3.1) や (3.2) に表れた重み関数

$$\left(1-\frac{\log n}{\log x}\right)=\frac{1}{\log x}\log\frac{x}{n}$$

には次のような解釈がある: 数列 $\{a_n\}$ に対して,

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{n\leqslant x}a_n\left(1-\frac{\log n}{\log x}\right)^k=a$$

であるとき, $\{a_n\}$ は次数 $k$ で $a$ に Riesz 総和可能であるという. 定理 3 は $L(s,\chi_4)$ について GRH が成り立つことと, 数列 $\{\Lambda(n)\chi_4(n)/\sqrt{n}\}$ が次数 1 で Riesz 総和可能であることは同値だと主張する.

さて, Chebyshev の予想の類似として, Hardy–Littlewood (1916) と Landau (1918) は

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{p>2}(-1)^{(p-1)/2}e^{-p/x}\log p=-\infty \tag{3.3}$$

が成り立つことを予想し, これが $L$ 関数 $L(s,\chi_4)$ の GRH と同値なことを示した. (3.1) は von Mangoldt 関数 $\Lambda(n)$ で書かれているので, 定理 3 はオリジナルの Chebyshev 予想よりもこちらに近い. この結果を意識して定理 3 の証明より若干詳しい計算を行うことで, Hardy–Littlewood, Landau と類似の主張が得られる:

**定理 4.** Dirichlet $L$ 関数 $L(s,\chi_4)$ について GRH が成り立つことと,

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{2<p\leqslant x}(-1)^{(p-1)/2}\left(\sqrt{\frac{x}{p}}\log\frac{x}{p}\right)\log p=-\infty \tag{3.4}$$

が成り立つことは同値である.

Chebyshev の予想は有名なので, それと類似の結果というのは論文にするには良い切り口に思われた. また, 定理 3 にあるような, $g_{\chi,0}(t)$ の $|t|\to\infty$ での符号が $L(s,\chi)$ の対数微分の中心値で決まるという結果はなかなかキレイに見えたので, 類似の結果を探して見つからなければ, 論文として発表するだけの内容であると判断するに至った.

## 4. 横道での拾い物

上記のような経緯で論文 [11] を書き始めたのだが, 定理 1 と 2 を同じ論文で扱っていると, (2.2) の $4\sqrt{x}$ のような項を排除して, 同じような見た目で結果を定式化できないかと思えてくる. とはいえ, この項は $\zeta(s)$ の極 $s=1$ に由来するものなので, 極を持たない $L(s,\chi)$ の場合と同じに扱えないのは当然である. しかし考えてはみるもので, 定理 1 や 3 と似たような見た目の次のような結果が得られた:

**定理 5.** 十分大きなすべての $x>2$ に対し

$$\sum_{n\leqslant xe^2}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}\log\frac{x}{n}\leqslant 0 \tag{4.1}$$

が成り立つならば, RH が成り立つ. さらに,

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{n\leqslant xe^2}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{\log n}{\log x}\right)=-\frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{1}{2}\right) \tag{4.2}$$

が成り立つことと, RH が成り立ち, しかも

$$\sum_{\rho}\frac{x^{\rho}}{\rho}=o\big(\sqrt{x}\log x\big)\quad(x\to\infty) \tag{4.3}$$

が成立することとは同値である. . ここで $\rho$ は $\zeta(s)$ の非自明零点を重複度を込めてわたるものとする.

RH から既存の手法で得られる最善の評価は

$$\sum_{\rho}\frac{x^{\rho}}{\rho}=O\big(\sqrt{x}(\log x)^2\big)\quad(x\to\infty) \tag{4.4}$$

なので, (4.3) はそれより強い主張である. 赤塚 [1, Theorem 1] にあるように, これは臨界線上の点での（修正された）Euler 積の収束と同値である. それと同程度の強さの主張が (4.2) のような単純な等式として得られたことは, 定理 5 のような横道を考えたことの収穫だった. 定理 5 の証明は, 定理 2 の証明の過程で古典的な明示公式

$$2\sqrt{x}=\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}+\sum_{\rho}\frac{x^{\rho-1/2}}{\rho-1/2}+\frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{1}{2}\right)+o(1)$$

を (2.2) の左辺に代入するという程度の計算で得られる.

## 5. 王道に立ち戻って

これまでの結果に表れたいくつかの重み付き和の定符号性は, RH や GRH などの強い結果と同値であったから, 実際に証明することは知られている手段では不可能である. いっぽう, 解析数論で経験的に知られているように, そういった強い結果も平均的に成り立つことを示すのは難しくない.

定理 1 を [11, Theorem 8] のように一般の Dirichlet 指標 $\chi \bmod q$ について一般化しておき, 各法ごとに $\chi$ について平均をとり, さらに法 $q$ について平均をとることにより, 次の結果が得られる:

**定理 6.** $x \to \infty$ かつ $Q \geqslant x$ であるとき, 次が成り立つ:

$$\sum_{3 \leqslant q \leqslant Q} \varphi(q) \left( \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv 1 \bmod q}} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \log \frac{x}{n} - \frac{4\sqrt{x}}{\varphi(q)} \right) = 4\sqrt{x} \left[ \frac{1}{9} x \, (1 + o(1)) - Q \right], \tag{5.1}$$

$$\sum_{3 \leqslant q \leqslant Q} \varphi(q) \sum_{\substack{n \leqslant xe^2 \\ n \equiv 1 \bmod q}} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \log \frac{x}{n} = -\frac{8}{9} \, e^3 \, x\sqrt{x} \, (1 + o(1)). \tag{5.2}$$

特に右辺は十分大きな $x > 2$ について負値である.

この結果から, (2.1) のような和は, 平均的には負値である. つまり, 定理 1, 2, 5 によって RH や GRH と同値な特定の重み付き和の定符号性は, 少なくとも平均的には成り立つことが確認できた. このような結果から先に進もうとすることは嵐の道であることも解析数論ではよく知られているし, 実際, 論文 [11] でもこれまでに述べた以上の結果は得られてはいない. ではあるが, 次節で述べるように, 論文 [11] はこれとは違う方向に発展を見せることとなる.

## 6. 後日談: レフェリーの指摘がもたらした着想

さて, 論文 [11] を書き上げ投稿した時点において, 論文の Theorem 8 は, $L(s,\chi)$ に対する GRH と漸近等式

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{\sqrt{n}} \left( 1 - \frac{\log n}{\log x} \right) = -\frac{L'}{L} \left( \frac{1}{2}, \chi \right) + o(1) \tag{6.1}$$

の同値性を主張していた. しかし, この漸近等式が意味を持つためには $L(1/2,\chi) \neq 0$ という仮定が必要である. 筆者はこれにまったく気付いておらず, レフェリー氏の指摘ではじめて認識した. 汗顔の至りである. レフェリー氏のコメントは「$L(1/2,\chi) \neq 0$ という仮定を定理に追加すれば十分だ」というものであったが, 筆者は $L(1/2,\chi) = 0$ の場合も定理に含めるために, 必要な追加の計算を行った. その結果, $L(s,\chi)$ が $s = 1/2$ で位数 $m \geqslant 1$ の零点を持つときは, $L(s,\chi)$ に対する GRH と漸近等式

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{\sqrt{n}} \left( 1 - \frac{\log n}{\log x} \right) = -\frac{m}{2} \log x - \lim_{s \to 1/2} \left[ \frac{L'}{L}(s,\chi) - \frac{m}{s - 1/2} \right] + o(1) \tag{6.2}$$

が同値であるという結論を得た ([11, Theorem 8 の証明]).

これで結果が満足すべきものになったと安心した筆者は, とりあえず入浴してリラックスすることにした. 湯船で筆者は修正された Theorem 8 のことを思い浮かべていた. そして『(6.1) と (6.2) の右辺は $\log x$ のぶんだけ大きさにズレがある. このズレは $L(1/2,\chi) \neq 0$ と $L(1/2,\chi) = 0$ の違いから生じている. weight $n^{-1/2}$ は $n^{-1/2-it}$ におきかえても同じ計算ができる. そうすると

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{1/2+it}} \left( 1 - \frac{\log n}{\log x} \right) \quad (x \to \infty) \tag{6.3}$$

の挙動で $L(1/2+it,\chi) = 0$ か否か判定できる. それはちょっと面白いかもしれない』などとぼんやり考えていた. そのとき突如, Riemann ゼータ関数の非自明零点と Dirichlet

$L$ 関数の GRH を関連付けた Fujii の論文 [4, Theorem 2 の証明] の等式

$$\sum_{n<Y} \Lambda(n) \exp\left(-2\pi i \frac{a}{q} n\right) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \chi(a)\overline{\tau(\chi)} \sum_{n<Y} \Lambda(n)\chi(n) \tag{6.4}$$

が思い出された. そして 湯船に浸かっている状態にもかかわらず, 背中から頭頂に抜けるような, ぞくっとした興奮を覚えた. 川田体験である! ([5, pp. 164–165], [6, p. 267]). このとき得た着想は,

『(6.3) が右辺に来るような (6.4) の類似を考えれば,

$\zeta(s)$ の零点から $L(s,\chi)$ の零点が検出できる!』

というものであった. 読者の方もよくご存知の通り, 素晴らしいアイディアだと思ったことの多くは, 後日単なる勘違いであったことが判明する. しかし幸運にも, この着想は形になり, [12] で述べたような結果を得ることができた. こちらの解説はまた別の機会に行うこととする.


## 謝辞

本稿の結果に関する講演と執筆の機会を与えてくださいました研究代表者の谷口隆氏および副代表者の立谷洋平氏にこの場を借りて感謝申し上げます.


## References


[1] H. Akatsuka, The Euler product for the Riemann zeta-function in the critical strip, *Kodai Math. J.* **40** (2017), no. 1, 79–101.
[2] G. Bhowmik, K. Halupczok, K. Matsumoto, Y. Suzuki, Goldbach representations in arithmetic progressions and zeros of Dirichlet $L$-functions, *Mathematika* **65** (2019), no. 1, 57–97.
[3] B. Conrey, Character sums and the Riemann Hypothesis, *Acta Arith.* **214** (2024), 327–342.
[4] A. Fujii, Zeta zeros and Dirichlet $L$-functions. II, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **64** (1988), no. 8, 296–299.
[5] 川田 浩一, Topics in Waring's problem for fourth powers, 数理解析研究所講究録 **1091** (1999), 157–171.
[6] 松本 耕二, 多重ゼータ関数の解析接続と漸近展開, 数理解析研究所講究録 **1160** (2000), 259–270.
[7] K. Matsumoto, M. Suzuki, $M$-functions and screw functions originating from Goldbach's problem and zeros of the Riemann zeta function, *J. Number Theory* **280** (2026), 918–946.
[8] M. Suzuki, Aspects of the screw function corresponding to the Riemann zeta function, *J. Lond. Math. Soc.* **108** (2023), no.4, 1448–1487.
[9] M. Suzuki, On the screw function of the Riemann zeta function, 数理解析研究所講究録 **2259** (2023), 115–122.
[10] M. Suzuki, Screw functions of Dirichlet series in the extended Selberg class, *Int. J. Number Theory* **21** (2025), no. 8, 1815–1823.
[11] M. Suzuki, On variants of Chebyshev's conjecture, *Ramanujan J.* **68** (2025), no. 4, Paper No. 95.
[12] M. Suzuki, Detecting zeros of Dirichlet $L$-functions via the Riemann zeta-function, `https://arxiv.org/abs/2508.17701`.