あるパラメータ付き多重級数の線形関係式について

北九州市立大学 経済学部　村原英樹
Hideki Murahara
Faculty of Economics, The University of Kitakyushu

概要

本稿では，多重ゼータ値の Hurwitz 的な意味での一般化として，五十嵐によって導入された「パラメータ付き多重級数」について，最近得られた結果を紹介する。具体的には「(1) 多重ゼータ値の川島関係式の線形部分はパラメータ化された多重級数へ一般化できること，(2) パラメータ付き多重級数間のいかなる線形関係式も川島関係式の線形部分（から成る関係式族）に含まれること」の二つを述べる。

本研究の成果は，鹿児島大学の広瀬稔氏と大分大学の小野塚友一氏との共同研究に基づく。

1　Parametrized Multiple Series について

正の整数の組 $(k_1,\ldots,k_r)$ をインデックスとよび，最後の成分 k_r が 2 以上のインデックスを収束インデックスとよぶ。五十嵐は，以下のようなパラメータ付き多重級数を導入した。

定義 1.1 (五十嵐 [4]). 収束インデックス $(k_1,\ldots,k_r)$ と $\mathrm{Re}\,\alpha>0$ を満たす $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して，ζ^{PMS} を

$$\begin{aligned}&\zeta^{\mathrm{PMS}}(k_1,\ldots,k_r;\alpha)\\&=\sum_{0\le m_1<\cdots<m_r}\frac{(\alpha)_{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{m_r!}{(\alpha)_{m_r}}\cdot\frac{1}{(m_1+\alpha)^{k_1}\cdots(m_r+\alpha)^{k_r}}\in\mathbb{C}\end{aligned}\tag{1.1}$$

で定義し，以後これを Parametrized Multiple Series (PMSs) とよぶ。ここで，$(\alpha)_m\coloneqq\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1)$ は Pochhammer 記号である。

注意 1.2. $\alpha=1$ のとき，$\frac{(\alpha)_{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{m_r!}{(\alpha)_{m_r}}=1$ となり，(1.1) は多重ゼータ値 $\zeta(k_1,\ldots,k_r)$ に一致する。

$$\zeta^{\mathrm{PMS}}(k_1,\ldots,k_r;1)=\zeta(k_1,\ldots,k_r)\coloneqq\sum_{1\le m_1<\cdots<m_r}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\in\mathbb{R}$$

したがって，PMS は多重ゼータ値の α による（Hurwitz 的な）一般化と見なせる。$\frac{(\alpha)_{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{m_r!}{(\alpha)_{m_r}}$ のような要素を式の中に含めておくことを不自然に思う読者もおられるかもしれないが，このような要素を含めておくと，後の定理 1.4や 1.7や 3.1で見るように，多重ゼータ値の関係式がそのまま全く同じ形で PMS でも成立する。

注意 1.3. 上の注意で述べたように，多重ゼータ値の関係式をそのまま全く同じ形で，PMS に一般化できることがある。しかしながら，常にそのようなことが言えるわけではない。

例えば多重ゼータ値は，有限複シャッフル関係式とよばれる関係式を満たすことが知られている。しかしながら，PMS はこの関係式を満たさない。すなわち，収束インデックス $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{l}$ に対して，$\zeta(\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l} - \boldsymbol{k} ⧢ \boldsymbol{l}) = 0$ は正しいが，$\zeta^{\mathrm{PMS}}(\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l} - \boldsymbol{k} ⧢ \boldsymbol{l}) = 0$ は正しくない。ここで $*$ は調和積を ⧢ はシャッフル積を表している。例えば，$\boldsymbol{k} = (2)$ と $\boldsymbol{l} = (2)$ のとき，$\zeta(4) - 4\zeta(1,3) = 0$, $\zeta^{\mathrm{PMS}}(4) - 4\zeta^{\mathrm{PMS}}(1,3) \neq 0$ である。

ここからは，五十嵐によって得られた結果をしたい。多重ゼータ値では，巡回和公式とよばれる公式が知られているが，五十嵐はそれを PMS に一般化した。

定理 1.4 (PMS の巡回和公式 [4]). インデックス $(k_1, \ldots, k_r) \neq (\underbrace{1, \ldots, 1}_{r})$ に対して，

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{k_i - 2} \zeta^{PMS}(j+1, k_{i+1}, \ldots, k_r, k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i - j; \alpha) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \zeta^{PMS}(k_{i+1}, \ldots, k_r, k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i + 1; \alpha)\end{aligned} \tag{1.2}$$

が成り立つ。

注意 1.5. 多重ゼータ値でよく知られている巡回和公式は，(1.2) において，$\alpha = 1$ としたもの（すなわち，ζ^{PMS} を ζ としたもの）として与えられる。多重ゼータ値の巡回和公式は，Hoffman と大野によって得られた [3]。

例 1.6. $(k_1, k_2, k_3) = (1, 2, 3)$ に対して，

$$\begin{aligned}&\zeta^{\mathrm{PMS}}(1,2,4;\alpha) + \zeta^{\mathrm{PMS}}(2,3,2;\alpha) + \zeta^{\mathrm{PMS}}(3,1,3;\alpha) \\ &= \zeta^{\mathrm{PMS}}(1,1,2,3;\alpha) + \zeta^{\mathrm{PMS}}(1,3,1,2;\alpha) + \zeta^{\mathrm{PMS}}(2,1,2,2;\alpha)\end{aligned}$$

が成り立つ。

上記の巡回和公式に加えて，次の大野関係式も，多重ゼータ値の分野ではよく知られている。五十嵐はこれも PMS に一般化した。

定理 1.7 (PMS の大野関係式 [5]). 収束インデックス $(k_1, \ldots, k_r)$ と $m \geq 0$ に対して，

$$\sum_{\substack{e_1 + \cdots + e_r = m \\ e_1, \ldots, e_r \geq 0}} \zeta^{PMS}(k_1 + e_1, \ldots, k_r + e_r) = \sum_{\substack{e_1 + \cdots + e_s = m \\ e_1, \ldots, e_s \geq 0}} \zeta^{PMS}(k'_1 + e_1, \ldots, k'_s + e_s)$$

が成り立つ。ここで，$(k'_1, \ldots, k'_s)$ は，$(k_1, \ldots, k_r)$ の双対インデックスである。

注意 1.8. 双対インデックスの定義はここでは述べないが，$\zeta^{\mathrm{PMS}}(k_1, \ldots, k_r) = \zeta^{\mathrm{PMS}}(k'_1, \ldots, k'_s)$ のような式が成り立ち，これを双対公式とよぶ。大野関係式は双対公式の一般化であり，$m = 0$ の場合が双対公式である。

注意 1.9. 多重ゼータ値の大野関係式は大野によって得られた [8]。

例 1.10. $(k_1, k_2, k_3) = (1, 1, 2)$ と $m = 1$ に対して,

$$\zeta^{\mathrm{PMS}}(1, 1, 3; \alpha) + \zeta^{\mathrm{PMS}}(1, 2, 2; \alpha) + \zeta^{\mathrm{PMS}}(2, 1, 2; \alpha) = \zeta^{\mathrm{PMS}}(5; \alpha)$$

が成り立つ。また,$(k_1, k_2, k_3) = (1, 2, 2)$ と $m = 1$ に対して,

$$\begin{aligned} &\zeta^{\mathrm{PMS}}(1, 2, 3; \alpha) + \zeta^{\mathrm{PMS}}(1, 3, 2; \alpha) + \zeta^{\mathrm{PMS}}(2, 2, 2; \alpha) \\ &= \zeta^{\mathrm{PMS}}(2, 4; \alpha) + \zeta^{\mathrm{PMS}}(3, 3; \alpha) \end{aligned}$$

が成り立つ。

2 Hoffman の代数的定式化と川島関係式

多重ゼータ値には,調和積 $*$ やシャッフル積 ш とよばれる積によって,代数的な構造が入ることが知られており,それを一般に Hoffman 代数とよぶ [2]。ここでは網羅的な詳細は述べず,本稿で必要となるものについてのみ述べる。

$\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y\rangle \supset \mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + y\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + y\mathfrak{H}x$ とし,整数 $k \geq 1$ に対して,$z_k = yx^{k-1}$ とする。$\mathbb{Q}$-線形写像 $Z\colon \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ を

$$Z(z_{k_1} \cdots z_{k_r}) = \zeta(k_1, \ldots, k_r)$$

で定義し,$\mathfrak{H}$ 上の環自己同型[*1] $\phi\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ を

$$\phi(x) = x, \qquad \phi(y) = x + y$$

によって定める。またこれに加えて,$\mathfrak{H}^1$ 上の $\mathbb{Q}$-双線形積 $*$ を次の規則によって定める。

- 任意の $u \in \mathfrak{H}^1$ に対して,$1 * u = u * 1 = u$
- 任意の $u, v \in \mathfrak{H}^1$ と整数 $k, l \geq 1$ に対して,$z_k u * z_l v = z_k(u * z_l v) + z_l(z_k u * v) + z_{k+l}(u * v)$

川島関係式は,多重対数関数の Newton 級数展開を用いて導かれる,多重ゼータ値の代数関係式である。以下は,その川島関係式の特別な場合である。

定理 2.1 (川島関係式の線形部分 [7]). $w_1, w_2 \in y\mathfrak{H}$ に対して,

$$Z(\phi(w_1 * w_2)x) = 0 \tag{2.1}$$

が成り立つ。

注意 2.2. 巡回和公式と大野関係式は,川島関係式の線形部分に含まれている。(これらの事実は,それぞれ,田中と若林 [9],および川島 [7] によって証明された。)

---

*1 ここでは,word の concatenation を積だと思っている。

上で見たように，巡回和公式や大野関係式は多重ゼータ値の関係式として知られているが，これらは PMS でも成立する。では，以下はどのようになっているだろうか？

- 川島関係式の線形部分は PMS でも成り立つか？
- PMS で成り立つ $\mathbb{Q}$-線形関係式を完全に決定することはできるか？

注意 2.3. 川島関係式の線形部分とは限らない関係式は，PMS では成り立たない。また，多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$-線形関係式は，例えば，正規化複シャッフル関係式で尽くされることが予想されている。正規化複シャッフル関係式については，[6] を参照されたい。

3　主結果

さて本節では，前節の最後に述べた疑問に対する解答を述べる。証明などの詳細は，[1] を参照されたい。

$\mathbb{Q}$-線形写像 $L_\alpha\colon y\mathfrak{H}x \to \mathbb{C}$ を

$$L_\alpha(z_{k_1}\cdots z_{k_r}) \coloneqq \zeta^{\mathrm{PMS}}(k_1,\ldots,k_r;\alpha+1)$$

で定義する。$u \in y\mathfrak{H}x$ に対して，$Z(u) = L_0(u)$ である。まず一つ目の主結果は，川島関係式の線形部分は PMS でも成立するということである。

定理 3.1. $w_1, w_2 \in y\mathfrak{H}$ と $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$ となる $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，

$$L_\alpha(\phi(w_1 * w_2)x) = 0$$

が成り立つ。

注意 3.2. 定理 3.1は，(2.1) と五十嵐の結果（定理 1.4と 1.7）を含んでいる。

前節の最後に与えた二つ目の疑問の解答は，以下の通りである。

定理 3.3. $u \in y\mathfrak{H}x$ とする。$\mathrm{Re}\,\alpha > -1$ となるすべての $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，$L_\alpha(u) = 0$ ならば

$$u \in \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{\phi(w_1 * w_2)x \mid w_1, w_2 \in y\mathfrak{H}\}$$

が成り立つ。

注意 3.4. 定理 3.3によって，定理 3.1が PMS 間の全ての $\mathbb{Q}$-線形関係式を網羅していることがわかる。

上記の二つの定理をまとめると，次の結果が得られる。

定理 3.5.

$$\bigcap_{\mathrm{Re}(\alpha)>-1} \ker(L_\alpha) = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{\phi(w_1 * w_2)x \mid w_1, w_2 \in y\mathfrak{H}\}$$

謝辞

この度は，RIMS 研究集会「解析的整数論とその周辺」にて，講演の機会をいただきありがとうございました。本研究は，JSPS 科研費 JP18K13392, JP19K14511 の助成を受けたものである。

参考文献

[1] Minoru Hirose, Hideki Murahara, and Tomokazu Onozuka, *On the linear relations among parametrized multiple series*, Ramanujan J. **60** (2023), no. 4, 1095–1105 (English).

[2] Michael E. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra **194** (1997), no. 2, 477–495 (English).

[3] Michael E. Hoffman and Yasuo Ohno, *Relations of multiple zeta values and their algebraic expression.*, J. Algebra **262** (2003), no. 2, 332–347 (English).

[4] Masahiro Igarashi, *Cyclic sum of certain parametrized multiple series*, J. Number Theory **131** (2011), no. 3, 508–518 (English).

[5] ———, *A generalization of Ohno's relation for multiple zeta values*, J. Number Theory **132** (2012), no. 4, 565–578 (English).

[6] Kentaro Ihara, Masanobu Kaneko, and Don Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. **142** (2006), no. 2, 307–338 (English).

[7] Gaku Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), no. 4, 755–788 (English).

[8] Yasuo Ohno, *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. Number Theory **74** (1999), no. 1, 39–43 (English).

[9] Tatsushi Tanaka and Noriko Wakabayashi, *An algebraic proof of the cyclic sum formula for multiple zeta values*, J. Algebra **323** (2010), no. 3, 766–778 (English).

Faculty of Economics
The University of Kitakyushu
4-2-1 Kitagata, Kokuraminami-ku, Kitakyushu,
Fukuoka, 802-8577, Japan
E-mail address: hmurahara@mathformula.page