レベル2の多重ゼータ値と多重Mahler測度について*

東北学院大学　佐々木義卓

Yoshitaka Sasaki
Faculty of Engineering,
Tohoku Gakuin University

1　序

Laurent多項式 $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}] \setminus \{0\}$ に対して, 多重Mahler測度 $\mathrm{m}(f_1, \ldots, f_k)$ は, 次で定義される (黒川・Lalín・落合 [6]):

$$\mathrm{m}(f_1, \ldots, f_k) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{j=1}^{k} \log |f_j(e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_r})|\, dt_1 \ldots dt_r. \tag{1.1}$$

特に, $f_1 = \cdots = f_k = f$ のとき, $\mathrm{m}_k(f) := \mathrm{m}(\underbrace{f, \ldots, f}_{k})$ と表し, k-高次 Mahler 測度 (以後, k-Mahler 測度と表現する) と呼ばれる. 本稿では, (1.1) を有理関数 $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}(X_1, \ldots, X_r) \setminus \{0\}$ まで拡張して考える. 従来の Mahler 測度 $\mathrm{m}(f) := \mathrm{m}_1(f)$ ([12]) は, ゼータ関数・L 関数の特殊値との関係をはじめ, さまざまな分野に現れる対象である ([1, 2, 3, 4, 13] などを参照). その拡張である多重 Mahler 測度も, ゼータ関数・L 関数の特殊値との関係を示す具体例が得られている. 例えば, k-Mahler 測度 $\mathrm{m}_k(X-1)$ は, 以下のように多重ゼータ値と結び付く. 多重ゼータ値は, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in (\mathbb{Z}_{\geq 1})^r$ $(k_r \geq 2)$ に対して,

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{0 < m_1 < \cdots < m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}$$

で定義され, 整数論だけでなく様々な分野と関連する対象である.

定理 1.1 (黒川・Lalín・落合 [6]). 正整数 k に対して,

$$\mathrm{m}_k(X-1) = (-1)^k k! \sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r) \in (\mathbb{Z}_{\geq 2})^r \\ \mathrm{wt}(\mathbf{k})=k,\ r \geq 1}} 4^{-r} \zeta(\mathbf{k}).$$

ここで, $\mathrm{wt}(\mathbf{k}) := k_1 + \cdots + k_r$.

*この研究は基盤研究 (C) (研究代表者：佐々木義卓, 研究課題番号 24K06649) の助成を受けています.

本稿では, その類似物である $\mathrm{m}_k(\frac{X-1}{X+1})$ に着目する. この k-Mahler 測度は次が知られている.

定理 1.2 ([6], [11], [15])**.** 正整数 k に対して,

$$\mathrm{m}_{2k}\left(\frac{X-1}{X+1}\right)=\frac{|E_k|}{2^k}\pi^k, \qquad \mathrm{m}_{2k-1}\left(\frac{X-1}{X+1}\right)=0.$$

ここで E_k は Euler 数であり, $1/\cosh(x)=\sum_{n=0}^{\infty}E_nx^n/n!$ で定義される.

すでに計算されている $\mathrm{m}_k(\frac{X-1}{X+1})$ にあえて着目する理由は, これが $\mathrm{m}_k(X-1)$ の "レベル 2 類似" に相当すると考えられるためである. それを説明するために, 多重ポリログと多重 A 関数についてまとめよう. 多重ポリログは

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(x)=\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(x):=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{x^{m_r}}{m_1^{k_1}\dots m_r^{k_r}}$$

で定義され, $k_r\geq 2$ に対して $\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(1)=\zeta(k_1,\dots,k_r)$ を満たす多重ゼータ値の関数化の 1 つである. 他方, 近年, 金子・津村 [7, 8] が導入した多重 A 関数は,

$$A(\mathbf{k};x)=A(k_1,\dots,k_r;x):=2^r\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r\\ m_i\equiv i \pmod 2}}\frac{x^{m_r}}{m_1^{k_1}\dots m_r^{k_r}} \tag{1.2}$$

で定義され, 外見だけでなくその性質においても多重ポリログのレベル 2 類似に相当する. また, 金子・津村 [7, 8] はレベル 2 の多重ゼータ値の 1 つとして, 多重 T 値

$$T(\mathbf{k})=T(k_1,\dots,k_r):=2^r\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r\\ m_i\equiv i \pmod 2}}\frac{1}{m_1^{k_1}\dots m_r^{k_r}}$$

$(k_i\in\mathbb{Z}_{\geq 1},\ k_r\geq 2)$ を導入し, その諸性質を多数解明している. また, $T(\mathbf{k})=A(\mathbf{k};1)$ が成り立つことに注意する.

以上を踏まえながら, $\mathrm{m}_k(X-1)$ と $\mathrm{m}_k(\frac{X-1}{X+1})$ の対応をまとめていこう. まず, $\mathrm{m}_k(X-1)$ の被積分関数には, "多重ポリログの元となる $\mathrm{Li}_1(x)=-\log(1-x)$" の積があって, これが定理 1.1 における $\mathrm{m}_k(X-1)$ と多重ゼータ値の関係の出所と見ることができよう. であれば, この構図を多重ポリログのレベル 2 類似に持ち上げれば, 多重 Mahler 測度と多重 T 値 (もしくはレベル 2 の多重ゼータ値) との関係が得られるのではないか, と期待してしまう. この条件に合う多重 Mahler 測度サイドの候補が, 被積分関数に "多重 A 関数の元となる $A(1;x)=-\log(\frac{1-x}{1+x})$" の積をもつ "$\mathrm{m}_k(\frac{X-1}{X+1})$" なのである. ところで先行研究の定理 1.2 は, $\mathrm{m}_k(\frac{X-1}{X+1})$ とレベル 2 の多重ゼータ値との関係を表していないのだが, これは先行研究において多重 A 関数が扱われていないことが理由として考えられる. そのため, 本研究では多重 A 関数の観点から $\mathrm{m}_k(\frac{X-1}{X+1})$ を再評価して, 定理 1.1 のように $\mathrm{m}_k(\frac{X-1}{X+1})$ をレベル 2 の多重ゼータ値の枠組みで理解することを目的とするのである. また, 目的の通り $\mathrm{m}_k(\frac{X-1}{X+1})$ とレベル 2 の多重ゼータ値の関係を得ることができれば, それは副次的に $|E_k|\pi^k/2^k$ と表せるレベル 2 の多重ゼータ値の情報も得られることになる.

3 節において, 本研究の主結果を簡潔に述べる. 主結果は, $\mathrm{m}_k(\frac{X-1}{X+1})$ を級数・積分の 2 つの側面から解析して得られるものであり, そこではレベル 2 の多重ゼータ値の調和性を活かした計算がふんだんに使われている. 本稿の目的は, その具体的な計算を報告することである. 4 節では級数サイドの計算を, 5 節では積分サイドの計算をまとめる. 6 節では, 4 節, 5 節で用いた計算を Xu–Zhao の畳み込み多重 T 値や金子・津村の $\psi(s)$ 関数の観点からまとめる.

2 レベル 2 の多重ゼータ値

正整数の組 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in (\mathbb{Z}_{\geq 1})^r$, ただし $k_r \geq 2$, と $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ に対して, レベル 2 の多重ゼータ値を次で定義する:

$$\zeta_2\binom{\mathbf{k}}{\mathbf{i}} = \zeta_2\binom{k_1, \dots, k_r}{i_1, \dots, i_r} := \sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r \\ m_j \equiv i_j \bmod 2}} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}$$

(cf. [18]). 従来の多重ゼータ値と比べると, $\mathbf{i}$ の取り方だけ種類が増えており, とりわけ次の

$$t(k_1, k_2, \dots, k_r) := \sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r \\ m_i\colon \text{ odd}}} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} = \zeta_2\binom{k_1, k_2, \dots, k_r}{1, \ 1, \ \dots, \ 1}, \tag{2.1a}$$

$$T(k_1, k_2, \dots, k_r) := 2^r \sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r \\ m_i \equiv i \pmod 2}} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} = 2^r \zeta_2\binom{k_1, k_2, \dots, k_r}{1, \ 2, \ \dots, \ r} \tag{2.1b}$$

は, それぞれ多重 t 値 (Hoffman [5]), 多重 T 値 (金子・津村 [7, 8]) と呼ばれ, 前者は級数の積 $(*)$ について閉じるクラス, 後者は反復積分の積 (ш) について閉じるクラスとして重要な対象である. また, $t(k_1, \dots, k_r)$ の和の取り方で等号を許したものを

$$t^\star(k_1, \dots, k_r) := \sum_{\substack{0<m_1\leq\cdots\leq m_r \\ m_i\colon \text{ odd}}} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}$$

と表す.

3 主結果

本研究の目的は, $\mathrm{m}_k(\frac{X-1}{X+1})$ を多重 A 関数の観点から再評価することであった. 主結果を述べよう.

定理 3.1 (S. [16]). 正整数 k に対して,

1. (レベル 2 の多重ゼータ値との関係)

$$\mathrm{m}_{2k}\left(\frac{X-1}{X+1}\right) = (2k)! \sum_{\substack{\mathbf{k}\in(\mathbb{Z}_{\geq 1})^r \\ \mathrm{wt}(\mathbf{k})=k \\ r\geq 1}} t(2\mathbf{k}) = (2k)! \ t^\star(\underbrace{2, \dots, 2}_{k}). \tag{3.1}$$

2. (帰納的関係式)

$$\mathrm{m}_{2k}\left(\frac{X-1}{X+1}\right)=(2k)!\Biggl\{\frac{2^{2k-1}-1}{2^{2k-1}}T(2k)+\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{(2l)!}\,\mathrm{m}_{2l}\left(\frac{X-1}{X+1}\right)\frac{\mathrm{Li}_{2k-2l}(-1)}{2^{2k-2l-1}}\Biggr\}. \tag{3.2}$$

多重 A 関数を使って $\mathrm{m}_k(\frac{X-1}{X+1})$ を計算するのだから, 安直には定理 1.1 を多重 T 値 (多重 A 関数の特殊値) で置き換えたようなものを期待してしまう. 主結果の 1 つ (3.1) は, 定理 1.1 のレベル 2 類似のゼータ値サイドは多重 T 値ではなく, “多重 t 値” であることを述べており, 期待とは真逆の結果である. 一方で (3.2) は, $\mathrm{m}_k(\frac{X-1}{X+1})$ を多重 T 値を用いて表すと, (線形ではなく) 積を伴う帰納的な形になることを示している. また, 定理 1.2 を振り返ると, 定理 3.1 の右辺は $|E_{2k}|\pi^{2k}/2^{2k}$ と表せることがわかっていた. とりわけ (3.1) との組み合わせを考えると, 次が得られる.

系 3.2 (Hoffman [5], S. [16])**.** 正整数 k に対して,

$$\sum_{\substack{\mathbf{k}\in(\mathbb{Z}_{\geq 1})^r\\ \mathrm{wt}(\mathbf{k})=k\\ r\geq 1}} t(2\mathbf{k})=t^{\star}(\underbrace{2,\ldots,2}_{k})=\frac{|E_{2k}|}{2^{2k}(2k)!}\pi^{2k}. \tag{3.3}$$

一方で, 系 3.2 を変形したものと 2 重 T 値の和公式 (金子・津村 [8]) を組み合わせることで,

$$T(1,3)=\frac{1}{4}\zeta_2\begin{pmatrix}1,1,2\\1,1,0\end{pmatrix}$$

が得られる. パリティー $i_1=1$ のレベル 2 の多重ゼータ値で張られる $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 (MMVo) を考えると, 多重 T 値, 多重 t 値が張る $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 ($\mathcal{T}^*$, $\mathcal{T}^{ш}$) は, いずれもその部分空間になっており, これらのベクトル空間の次元の数値データや相対的な関係などに関する興味深い考察が [17] に見られる. 上式は $\zeta_2\binom{1,1,2}{1,1,0}$ が $\mathcal{T}^{ш}$ に含まれることを述べており, このような具体例が本研究の副産物として得られるのかもしれない.

定理 3.1 は非常にシンプルな形にまとめられているが, その導出にはレベル 2 の多重ゼータ値の込み入った計算を要する. 以下ではその計算をまとめていく.

多重 Mahler 測度 $\mathrm{m}_k(\frac{X-1}{X+1})$ を直接計算すると, 次が得られる.

$$\mathrm{m}_k\left(\frac{X-1}{X+1}\right)=\begin{cases}k!\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}U(j,k-j) & k\text{ が偶数},\\ 0 & k\text{ が奇数}.\end{cases} \tag{3.4}$$

ここで,

$$U(p,q):=\sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r=m_s>\cdots>m_1>0\\ n_i\equiv i \bmod 2\\ m_{s-j}\equiv r-j \bmod 2}}\frac{1}{n_1\cdots n_r m_s\cdots m_1}. \tag{3.5}$$

したがって, 定理 3.1 は, $U(p,q)$ の計算に帰着される．この $U(p,q)$ は 2 つの多重級数が $n_r = m_s$ の部分で繋がっていて, n_i は, n_1 から奇・偶・奇・偶 $\cdots$ と偶奇を順に変えて $n_i < n_{i+1}$ を満たすように和をとるのに対して, m_j は逆に, n_r と同じ偶奇の m_s を起点にして $m_{j+1} > m_j$ を満たすように偶奇を変えながら和をとっている．また, $U(p,q)$ は金子・山本 [10] による多重ゼータ値の "積分級数等式" に現れる級数

$$\zeta((k_1,\ldots,k_r) \circledast (l_1,\ldots,l_s)^\star) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r=m_s\geq\cdots\geq m_1>0} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r} m_s^{l_s}\cdots m_1^{l_1}}$$

に酷似している．積分級数等式を簡潔に述べると, 上記のような 2 つの和が絡まった「級数」とそれに対応する「積分」の等式であって, さらには級数サイドと積分サイドでそれぞれ異なる計算を行うことで (多重ゼータ値の和) = (多重ゼータ値の和) という構図になり, 多重ゼータ値の線形関係式が得られる代物である．本研究では, 金子・山本 [10] に倣った計算を $U(p,q)$ に適用する．

級数 $U(p,q)$ の計算でまず考えられるのは, (3.5) の n_i と m_j に関する 2 つの不等式の列を, 1 列に整理することである．従来の多重ゼータ値の場合は, この 2 つの不等式を織り込むような計算は結局のところ調和積の計算に帰着され, 最終的に多重ゼータ値の線形和として計算される．我々の (3.5) の場合は "$n_i,\ m_j$ の合同条件" があるので, 不等式を 1 つに織り込めば, レベル 2 の多重ゼータ値の形に収まることはわかるのだが, $U(p,q)$ のように和の偶奇の規則性は失われてしまい, 調和のない対象へと変貌しそうで不安を覚える．ところがこれを "綺麗に整えて" 計算することができて, そうして得られるのが定理 3.1 の 1 つ目 (3.1) である．

一方で, $U(p,q)$ を積分サイドから計算したいのだが, バッチリ $U(p,q)$ に一致する積分は今のところ得られていない．その代わりに, $U(p,q)$ に繋がる反復積分

$$I(p,q) := \int\cdots\int_{\substack{0<u_i,\ v_j<1 \\ 0<u_1<\cdots<u_p<v_q>v_{q-1}>\cdots>v_1>0}} \frac{du_1}{1-u_1^2}\cdots\frac{du_p}{1-u_p^2}\frac{dv_q}{v_q}\frac{dv_{q-1}}{1-v_{q-1}^2}\cdots\frac{dv_1}{1-v_1^2} \tag{3.6}$$

を導入し, これを異なる 2 通りの方法で計算することで, $U(p,q)$ の帰納的関係式が得られ, それを (3.4) に代入したのが, 定理 3.1 の 2 つ目 (3.2) である．

4 $U(p,q)$ の級数サイドの計算

級数 $U(p,q)$ における n_i と m_j の不等式の整理方法について, $k=6$ の時の具体例を使ってまとめておく．従来の多重ゼータ値の調和積と同種の計算を行うわけだが, n_i と m_j の合同条件込みで扱うところに注意を要する．一般のレベル 2 の多重ゼータ値の調和積の計算については, [17] を参照されたい．以下では, 無印の $n_i,\ m_j$ は合同条件 "$\equiv 1 \pmod 2$" が, アンダーライン付きの $\underline{n_i},\ \underline{m_j}$ は合同条件 "$\equiv 0 \pmod 2$" が付されたインデックスを表すことにする．このとき, $U(1,\overline{5})$, $U(2,4)$, $U(3,3)$ を書き下して, それがどのように (3.1)

の多重 t 値に変化していくのかをまとめていく. まず $U(1,5)$ は定義から

$$U(1,5) = \sum_{\substack{0<n_1 \\ \| \\ 0<m_1<\underline{m_2}<m_3<\underline{m_4}<m_5}} \frac{1}{n_1 m_5 \underline{m_4} m_3 \underline{m_2} m_1} = \zeta_2 \begin{pmatrix} 1,1,1,1,2 \\ 1,0,1,0,1 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

次に $U(2,4)$ は,

$$U(2,4) = \sum_{\substack{0<n_1<\underline{n_2} \\ \| \\ 0<m_1<\underline{m_2}<m_3<\underline{m_4}}} \frac{1}{n_1 \underline{n_2}\ \underline{m_4} m_3 \underline{m_2} m_1}$$

であって, n_1 を m_j の不等式に挿入して計算するわけだが, n_1 は奇数のみを渡るので, n_1 と重なりが起こるとすれば, 偶奇が等しい m_1 か m_3 に限られる. したがって, この場合は以下のようになる.

$$\begin{aligned} U(2,4) = 2\zeta_2 \begin{pmatrix} 1,1,1,1,2 \\ 1,1,0,1,0 \end{pmatrix} + 2\zeta_2 \begin{pmatrix} 1,1,1,1,2 \\ 1,0,1,1,0 \end{pmatrix} \\ + \zeta_2 \begin{pmatrix} 2,1,1,2 \\ 1,0,1,0 \end{pmatrix} + \zeta_2 \begin{pmatrix} 1,1,2,2 \\ 1,0,1,0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

最後に $U(3,3)$ は,

$$U(3,3) = \sum_{\substack{0<n_1<\underline{n_2}<n_3 \\ \| \\ 0<m_1<\underline{m_2}<m_3}} \frac{1}{n_1 \underline{n_2} n_3 m_3 \underline{m_2} m_1}.$$

偶奇 (パリティー) が交互に変化する不等式 $0 < n_1 < \underline{n_2} < \cdots$ と $0 < m_1 < \underline{m_2} < \cdots$ を織り込んで 1 列の不等式にまとめる場合, "奇 $\leq$ 奇" のように, 同じパリティーのインデックスの不等式が続くのは 2 つまでで, その次は必ずパリティーが入れ替わらないといけないし, 重なり $(n_i = m_j)$ もこの場合にしか起きないことに注意しなければならない. そうすると, $U(3,3)$ の織り込みは, ① : $0 < n_1 \leq m_1 < \underline{n_2} \leq \underline{m_2}$ $(0 <$ 奇 $\leq$ 奇 $<$ 偶 $\leq$ 偶$)$, もしくは② : $0 < n_1 < \underline{n_2} < m_1 < \underline{m_2}$ $(0 <$ 奇 $<$ 偶 $<$ 奇 $<$ 偶$)$ のどちらかのパターンになるので, それらを整理して計算すると以下のようになる.

$$\begin{aligned} U(3,3) = 2\zeta_2 \begin{pmatrix} 1,1,1,1,2 \\ 1,0,1,0,1 \end{pmatrix} + 4\zeta_2 \begin{pmatrix} 1,1,1,1,2 \\ 1,1,0,0,1 \end{pmatrix} \\ + 2\zeta_2 \begin{pmatrix} 1,1,2,2 \\ 1,1,0,1 \end{pmatrix} + 2\zeta_2 \begin{pmatrix} 2,1,1,2 \\ 1,0,0,1 \end{pmatrix} + \zeta_2 \begin{pmatrix} 2,2,2 \\ 1,0,1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

以上, (4.1), (4.2), (4.3) および $U(1,5)=U(5,1)$, $U(2,4)=U(4,2)$ より,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{5} U(j,6-j) \qquad (4.4)\\
&=4\zeta_2\binom{1,1,1,1,2}{1,0,1,0,1}+\left\{4\zeta_2\binom{1,1,1,1,2}{1,1,0,1,0}+2\zeta_2\binom{2,1,1,2}{1,0,1,0}\right\}\\
&\quad+\left\{4\zeta_2\binom{1,1,1,1,2}{1,0,1,1,0}+2\zeta_2\binom{1,1,2,2}{1,0,1,0}\right\}+\left\{4\zeta_2\binom{1,1,1,1,2}{1,1,0,0,1}\right.\\
&\quad\left.+2\zeta_2\binom{2,1,1,2}{1,0,0,1}+2\zeta_2\binom{1,1,2,2}{1,1,0,1}+\zeta_2\binom{2,2,2}{1,0,1}\right\}.
\end{aligned}$$

それぞれ $\{...\}$ は, $U(3,3)$ の計算で述べたように, "奇 $\leq$ 奇"のように, 同じパリティーの n_i, m_j が連なっている箇所に着目してまとめたものであって, これが以下の計算では重要になる. 上式 (4.4) を反復積分表示に変換すると,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{5} U(j,6-j) \qquad (4.5)\\
&=2^{-3}\underset{0<s_1<s_2<s_3<s_4<s_5<s_6<1}{\int\cdots\int}\frac{2ds_1}{1-s_1^2}\frac{2ds_2}{1-s_2^2}\frac{2ds_3}{1-s_3^2}\frac{2ds_4}{1-s_4^2}\frac{2ds_5}{1-s_5^2}\frac{ds_6}{s_6}\\
&\quad+2^{-3}\underset{0<s_1<s_2<s_3<s_4<s_5<s_6<1}{\int\cdots\int}\frac{2ds_1}{1-s_1^2}\left(\frac{ds_2}{s_2}+\frac{2s_2ds_2}{1-s_2^2}\right)\frac{2ds_3}{1-s_3^2}\frac{2ds_4}{1-s_4^2}\frac{2ds_5}{1-s_5^2}\frac{ds_6}{s_6}\\
&\quad+2^{-3}\underset{0<s_1<s_2<s_3<s_4<s_5<s_6<1}{\int\cdots\int}\frac{2ds_1}{1-s_1^2}\frac{2ds_2}{1-s_2^2}\frac{2ds_3}{1-s_3^2}\left(\frac{ds_4}{s_4}+\frac{2s_4ds_4}{1-s_4^2}\right)\frac{2ds_5}{1-s_5^2}\frac{ds_6}{s_6}\\
&\quad+2^{-3}\underset{0<s_1<s_2<s_3<s_4<s_5<s_6<1}{\int\cdots\int}\frac{2ds_1}{1-s_1^2}\left(\frac{ds_2}{s_2}+\frac{2s_2ds_2}{1-s_2^2}\right)\frac{2ds_3}{1-s_3^2}\left(\frac{ds_4}{s_4}+\frac{2s_4ds_4}{1-s_4^2}\right)\frac{2ds_5}{1-s_5^2}\frac{ds_6}{s_6}
\end{aligned}$$

と簡潔に表せる. さらに変数変換 ([8])

$$s_i=\frac{1-t_{7-i}}{1+t_{7-i}} \qquad (i=1,\dots,6)$$

により,

$$\frac{dt_{7-i}}{t_{7-i}}=-\frac{2\,ds_i}{1-s_i^2}, \qquad \frac{2\,dt_{7-i}}{1-t_{7-i}^2}=-\frac{ds_i}{s_i}, \tag{4.6a}$$

$$\frac{dt_{7-i}}{t_{7-i}}+\frac{2t_{7-i}\,dt_{7-i}}{1-t_{7-i}^2}=-\left(\frac{ds_i}{s_i}+\frac{2s_i\,ds_i}{1-s_i^2}\right) \tag{4.6b}$$

に注意すると (特に, (4.6b) は形が変わっていないことに注意), (4.5) は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{5} U(j, 6-j) \qquad (4.7)\\
&= 2^{-3} \int\cdots\int_{0<t_1<t_2<t_3<t_4<t_5<t_6<1} \frac{2dt_1}{1-t_1^2} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_3}{t_3} \frac{dt_4}{t_4} \frac{dt_5}{t_5} \frac{dt_6}{t_6}\\
&\quad + 2^{-3} \int\cdots\int_{0<t_1<t_2<t_3<t_4<t_5<t_6<1} \frac{2dt_1}{1-t_1^2} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_3}{t_3} \frac{dt_4}{t_4} \left(\frac{dt_5}{t_5} + \frac{2t_5dt_5}{1-t_5^2}\right) \frac{dt_6}{t_6}\\
&\quad + 2^{-3} \int\cdots\int_{0<t_1<t_2<t_3<t_4<t_5<t_6<1} \frac{2dt_1}{1-t_1^2} \frac{dt_2}{t_2} \left(\frac{dt_3}{t_3} + \frac{2t_3dt_3}{1-t_3^2}\right) \frac{dt_4}{t_4} \frac{dt_5}{t_5} \frac{dt_6}{t_6}\\
&\quad + 2^{-3} \int\cdots\int_{0<t_1<t_2<t_3<t_4<t_5<t_6<1} \frac{2dt_1}{1-t_1^2} \frac{dt_2}{t_2} \left(\frac{dt_3}{t_3} + \frac{2t_3dt_3}{1-t_3^2}\right) \frac{dt_4}{t_4} \left(\frac{dt_5}{t_5} + \frac{2t_5dt_5}{1-t_5^2}\right) \frac{dt_6}{t_6}\\
&= 2^{-3}\Big\{4\cdot 2t(6) + 2\cdot 2^2 t(4,2) + 2\cdot 2^2 t(2,4) + 2^3 t(2,2,2)\Big\}\\
&= t(6) + t(4,2) + t(2,4) + t(2,2,2)
\end{aligned}
$$

となって, (3.1) を得る．ここで, 最終的に多重 t 値で閉じた形に収まったのは, (4.4) のように, 同じパリティーのインデックスが続く箇所に着目して $\sum_{i=1}^{k-1} U(i, k-i)$ を整理したことも重要なのであるが, (4.5) の反復積分表示が, 先頭と最後尾を除くと $\{ds/s+2sds/(1-s^2)\}$ と $2ds/(1-s^2)$ のみで構成されていることも効いている．変数変換 (4.6) により, (4.5) は $\{dt/t+2tdt/(1-t^2)\}$ と dt/t のみの反復積分 (4.7) となって, 1 次形式 "dt/t" は重さを 1 つ上げる役割, "$2tdt/(1-t^2)$" はパリティーを変えずに深さを 1 つ上げる役割なので, 結局 (4.7) の積分は全て多重 t 値になる.

5　$I(p,q)$ の計算 –$U(p,q)$ の積分サイド–

積分 $I(p,q)$ の 2 通りの計算についてまとめておく．まずは, (3.6) を v_q で折り返して積分すると,

$$
\begin{aligned}
I(p,q) &= \int_0^1 \frac{dv_q}{v_q} \int\cdots\int_{\substack{0<u_1<\cdots<u_p<v_q\\ 0<v_1<\cdots<v_{q-1}<v_q}} \frac{du_1}{1-u_1^2}\cdots\frac{du_p}{1-u_p^2}\frac{dv_{q-1}}{1-v_1^2}\cdots\frac{dv_1}{1-v_{q-1}^2}\\
&= 2^{1-p-q}\int_0^1 A(\{1\}^p; v_q) A(\{1\}^{q-1}; v_q)\frac{dv_q}{v_q}.
\end{aligned}
$$

ここで多重 A 関数の積をシャッフル積で展開すると,

$$
I(p,q) = 2^{1-p-q}\binom{p+q-1}{p} T(\{1\}^{p+q-2}, 2). \qquad (5.1)
$$

さらに, 多重 T 値の双対公式 [7, 8] を用いると, 右辺の多重 T 値は $T(p+q)$ で表せる. 一方で, (3.6) を左から順に v_1 から v_q まで計算していくと,

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \int_0^1 \frac{dv_1}{1-v_1^2}\int_{v_1}^1 \frac{dv_2}{1-v_2^2}\cdots\int_{v_{q-2}}^1 \frac{dv_{q-1}}{1-v_{q-1}^2}\int_{v_{q-1}}^1 \frac{2^{-p}A(\{1\}^p;v_p)}{v_q}dv_q \\ &= \int_0^1 \frac{dv_1}{1-v_1^2}\int_{v_1}^1 \frac{dv_2}{1-v_2^2}\cdots\int_{v_{q-3}}^1 \frac{dv_{q-2}}{1-v_{q-2}^2}\int_{v_{q-2}}^1 \frac{U(p,1;v_{q-1})}{1-v_{q-1}^2}dv_{q-1}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

ここで,

$$U(p,q;x) := \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r=m_s>\cdots>m_1>0 \\ n_i\equiv i \bmod 2 \\ m_{s-j}\equiv r-j \bmod 2}} \frac{1-x^{m_1}}{n_1\cdots n_r m_s\cdots m_1}$$

である. (5.2) の残りは,

$$\int_x^1 \frac{1-v^m}{1-v^2}\,dv = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{0<n<m \\ n\equiv 1 \bmod 2}} \frac{1-x^n}{n} & m\equiv 0 \pmod 2, \\ \displaystyle\sum_{\substack{0<n<m \\ n\equiv 0 \bmod 2}} \frac{1-x^n}{n} - \mathrm{Li}_1\Big(-\frac{1-x}{1+x}\Big) & m\equiv 1 \pmod 2) \end{cases} \tag{5.3}$$

および

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{Li}_k(-\frac{1-v}{1+v})}{1-v^2}\,dv = \frac{1}{2}\mathrm{Li}_{k+1}\Big(-\frac{1-x}{1+x}\Big) \qquad (k\geq \mathbb{Z}_{\geq 1}) \tag{5.4}$$

([16]) を繰り返し適用することで,

$$I(p,q) = -\sum_{\substack{1\leq i\leq q-1 \\ i\equiv p \bmod 2}} U(p,i)\frac{\mathrm{Li}_{q-i}(-1)}{2^{q-i-1}} + U(p,q) \tag{5.5}$$

を得る. したがって, (5.1) と (5.5) より, 次が得られる.

$$U(p,q) = 2^{1-p-q}\binom{p+q-1}{p}T(p+q) + \sum_{\substack{1\leq i\leq q-1 \\ i\equiv p \bmod 2}} U(p,i)\frac{\mathrm{Li}_{q-i}(-1)}{2^{q-i-1}}. \tag{5.6}$$

以上, 金子・山本の積分級数等式における計算を参考にしているものの, (5.3) では積分級数等式の計算にはなかった余分な項 “$\mathrm{Li}_1(-\frac{1-x}{1+x})$” が現れている. このように余分な項を伴う現象は, Hurwitz 型の同種の級数を扱った金子・Xu・山本 [9] の計算にも現れる. 従来の多重ゼータ値との違いを表している部分と言えるのだろう. また, この余分な項は (5.4) のような帰納的な構造を持ち, これが (5.5) の右辺第 1 項 (Σ の項) に繋がっている.

6　レベル 2 の多重ゼータ値の視点から

5 節では積分サイドから $U(p,q)$ を計算して定理 3.1 が導かれる様子をまとめた. ここでは, その計算をレベル 2 の多重ゼータ値の視点からまとめておく.

金子・山本 [10] の積分級数等式に現れる級数のレベル 2 類似として, Xu–Zhao [17] は畳み込み多重 T 値 (convoluted multiple T value)

$$T(\mathbf{k}\circledast\mathbf{l}) := 2^{r+s-1}\sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_r=m_s>\cdots>m_1>0\\ n_i\equiv i \bmod 2\\ m_{s-j}\equiv r-j \bmod 2}}\frac{1}{n_1^{k_1}\dots n_r^{k_r}m_s^{l_s}\dots m_1^{l_1}}$$

(Xu–Zhao のオリジナルの定義とは異なっており, 本研究に合わせた表記となっている) を導入し, 後述の金子・津村の ψ 関数と $T((k_1,\dots,k_r)\circledast\{1\}^q)$ との関係を与えた. 3 節で導入した $U(p,q)$ はちょうど

$$U(p,q)=2^{1-p-q}T(\{1\}^p\circledast\{1\}^q)$$

に対応しており, $U(p,q)$ の自然な受け皿となっていることがわかる. ここで, $\{a\}^i := (\underbrace{a,\dots,a}_{i})$ である. また, $U(p,q)$ には積分 $I(p,q)$ が対応していたので, その類似として,

$$\begin{aligned}&I_{k_1,\dots,k_r;\{1\}^q}\\ &:= \int\!\cdots\!\int_{\substack{0<u_i,v_j<1\\ 0<u_1<\cdots<u_{\kappa_r}<v_q>v_{q-1}>\cdots>v_1>0}} \frac{du_1}{1-u_1^2}\underbrace{\frac{du_2}{u_2}\cdots\frac{du_{k_1}}{u_{k_1}}}_{k_1-1}\frac{du_{k_1+1}}{1-u_{k_1+1}^2}\underbrace{\frac{du_{k_1+2}}{u_{k_1+2}}\cdots\frac{du_{\kappa_2}}{u_{\kappa_2}}}_{k_2-1}\\ &\qquad\cdots\cdots\frac{du_{\kappa_{r-1}+1}}{1-u_{\kappa_{r-1}+1}^2}\underbrace{\frac{du_{\kappa_{r-1}+2}}{u_{\kappa_{r-1}+2}}\cdots\frac{du_{\kappa_r}}{u_{\kappa_r}}}_{k_r-1}\frac{dv_q}{v_q}\frac{dv_{q-1}}{1-v_{q-1}^2}\cdots\frac{dv_1}{1-v_1^2}\end{aligned}$$

($\kappa_j := k_1+\cdots+k_j\ (j=1,\dots,r)$) を導入すると, $I_{k_1,\dots,k_r;\{1\}^q}$ は $T((k_1,\dots,k_r)\circledast\{1\}^q)$ に対応する反復積分であって, (5.6) の導出と同様の議論から, 次のような $T((k_1,\dots,k_r)\circledast\{1\}^q)$ の帰納的関係式を得る:

$$\begin{aligned}T((k_1,\dots,k_r)\circledast\{1\}^q) &= 2^{r+q-1}I_{k_1,\dots,k_r;\{1\}^q}\\ &\quad+2\sum_{\substack{1\leqq i\leqq q-1\\ i\equiv r \bmod 2}}T((k_1,\dots,k_r)\circledast\{1\}^i)\,\mathrm{Li}_{q-i}(-1).\end{aligned}\tag{6.1}$$

また, $I_{k_1,\dots,k_r;\{1\}^q}$ は

$$I_{k_1,\dots,k_r;\{1\}^q}=2^{1-r-q}\int_0^1 A(\{1\}^{q-1};x)A(k_1,\dots,k_r;x)\,\frac{dx}{x}\tag{6.2}$$

とも表現でき, A 関数の積をシャッフル積で展開すれば, $I_{k_1,\dots,k_r;\{1\}^q}$ が多重 T 値の線形和でかけることもわかる. したがって, (6.1) は, $T((k_1,\dots,k_r)\circledast\{1\}^q)$ が多重 T 値 (と $\mathrm{Li}_j(-1)$ の積和) で記述できることを帰納的に表現している. さらに, 金子・津村 [7] の ψ 関数

$$\psi(k_1,\dots,k_r;s) := \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty u^{s-1}\frac{A(k_1,\dots,k_r;\tanh(u/2))}{\sinh u}\,du\quad(\Re s>0)\tag{6.3}$$

($r=1$ の場合 [14]) と $I_{k_1,\dots,k_r;\{1\}^q}$ との関係についても言及しよう. 変数変換 $\tanh(u/2)=x$ により,

$$\psi(k_1,\dots,k_r;q)=\int_0^1 A(\{1\}^{q-1};x)A(k_1,\dots,k_r;x)\,\frac{dx}{x}$$

を得る ($q\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, Xu–Zhao [17]). これは (6.2) なのであって, 結局のところ, 我々が $I(p,q)$ の拡張として導入した $I_{\mathbf{k};\{1\}^q}$ は

$$I_{k_1,\dots,k_r;\{1\}^q}=2^{1-r-q}\psi(k_1,\dots,k_r;q).$$

つまり, (6.1) は ψ 関数を用いて次のように表現できる.

命題 6.1 (Xu-Zhao [17], S. [16])**.**

$$\begin{aligned}T((k_1,\dots,k_r)\circledast\{1\}^q)&=\psi(k_1,\dots,k_r;q)\\&\quad+2\sum_{\substack{1\leqq i\leqq q-1\\ i\equiv r \bmod 2}}T((k_1,\dots,k_r)\circledast\{1\}^i)\,\mathrm{Li}_{q-i}(-1).\end{aligned}$$

謝辞

今回, 講演の機会を与えて下さった研究代表者である谷口隆先生に感謝申し上げます.

参考文献

[1] D. W. Boyd, *Mahler's measure and special values of L-functions*, Experiment. Math. **7**, 37–82, (1998).

[2] F. Brunault and W. Zudilin, *Many variations of Mahler measures—a lasting symphony*, Austral. Math. Soc. Lect. Ser., 28, Cambridge University Press, Cambridge, 2020.

[3] C. Deninger, *Deligne periods of mixed motives, K-theory and the entropy of certain $\mathbb{Z}^n$-actions*, J. Amer. Math. Soc. **10**, 259–281, (1997).

[4] G. Everest and T. Ward, *Heights of polynomials and entropy in algebraic dynamics*, Springer London, 1999.

[5] M. Hoffman, *An odd variant of multiple zeta values*, Commun. Number Theory Phys. 13 (2019), 529–567.

[6] N. Kurokawa, M. Lalín, and H. Ochiai, *Higher Mahler measures and zeta functions*, Acta Arith. **135**, 269–297, (2008).

[7] M. Kaneko and H. Tsumura, *Zeta functions connecting multiple zeta values and poly-Bernoulli numbers*, Adv. Stud. Pure Math. **84**, 181–204 (2020).

[8] M. Kaneko and H. Tsumura, *On multiple zeta values of level two*, Tsukuba J. Math. **44**, 213–234, (2020).

[9] M. Kaneko, C. Xu, and S. Yamamoto, *A generalized regularization theorem and Kawashima's relation for multiple zeta values*, J. Algebra **580**, 247–263, (2021).

[10] M. Kaneko and S. Yamamoto, *A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations*, Sel. Math. **24**, 2499–2521, (2018).

[11] M. Lalín and J.-S. Lechasseur, *Higher Mahler measure of an n-variable family*, Acta Arith. **174**, 1–30, (2016).

[12] K. Mahler, *On some inequalities for polynomials in several variables*, J. London Math. Soc. **37**, 341–344, (1962).

[13] J. McKee and C. Smyth, *Around the unit circle. Mahler measure, integer matrices and roots of unity*, Springer Cham, 2021.

[14] Y. Sasaki, *On generalized poly-Bernoulli numbers and related L-functions*, J. Number Theory **132**, 156–170, (2012).

[15] Y. Sasaki, *Zeta Mahler measures, multiple zeta values and L-values*, Int. J. Number Theory **11**, 2239–2246, (2015).

[16] Y. Sasaki, *Multiple zeta values of level* 2 *and multiple Mahler measures*, submitted.

[17] C. Xu and J. Zhao, *Variants of multiple zeta values with even and odd summation indices*, Math. Z. **300**, 3109–3142, (2022).

[18] H. Yuan and J. Zhao, *Double shuffle relations of double zeta values and the double Eisenstein series at level N*, J. London Math. Soc. **92**, 520–546, (2015).

Faculty of Engineering,
Tohoku Gakuin University,
3-1, Shimizukouji, Wakabayashi-ku, Sendai,
Miyagi 984-8588, Japan.

E-mail address: ysasaki@mail.tohoku-gakuin.ac.jp