C^2 級長距離型ポテンシャルに対する散乱理論

Kenichi Ito* & Erik Skibsted†

目次

---

*Graduate School of Mathematical Scieces, The University of Tokyo. Partially supported by JSPS KAKENHI, grant nr. 17K05325 and JP23K03163, and by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

†Matematiske Fag, Aarhus Universitet. Partially supported by the Danish Council for Independent Research | Natural Sciences, grant nr. DFF-4181-00042.

1 概要

本稿は著者らによる最近の結果 [IS4] の概説である．主結果として，まず C^2 級長距離型ポテンシャルに対する定常散乱理論を紹介する．これは，先行研究 [Is1, Is2, II, GY] の結果を C^2 級ポテンシャルに拡張したもので，ポテンシャルの滑らかさに関する仮定を最良に弱めたものと考えられる．次に時間依存波動作用素に定常理論的表示を与え，定常散乱理論と時間依存散乱理論が同等であることを見る．一般に，長距離型散乱理論ではアイコナール方程式の解についての評価が必要となるが，それらは [CS] の変分原理的手法を援用して示される．さらに，定常的散乱理論を論じるための技術的な鍵として，強型放射評価についても紹介する．これは，[Is1, Sa] で得られた放射評価を改良したもので，[HS] に端を発する．ここでは，対応する古典力学系の描像に基づく新しい交換子法を用いることで，ポテンシャルに対する仮定をこれまでより弱められたことを説明する．

2 問題設定

本稿では $\mathbb{R}^d$ 上の Schrödinger 作用素

$$H = -\tfrac{1}{2}\Delta + V + q$$

に対する散乱理論を論じる．ただし，$d \geq 2$ とし，Δ は通常の Laplace 作用素である．また，V, q はそれぞれ長距離型，短距離型ポテンシャルである．論文 [IS4] の主目的は，V に対する滑らかさの仮定を，最良とされる C^2 級にまで弱めることである．より正確には，以下の仮定をおく．

記号． 本稿では $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする．また $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$ とおく．ノルム空間 X からノルム空間 Y への有界作用素全体の集合を $\mathcal{L}(X, Y)$ で表し，$Y = X$ のときには $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$ と略記する．同様に，コンパクト作用素に対しては記号 $\mathcal{C}(X, Y)$，$\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, X)$ を用いる．

仮定 2.1. ある $l \in \{2, 3, \ldots\}$ に対し $V \in C^l(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ とする．さらに，ある $\sigma \in (0, 1)$，$\rho \in (0, 1]$ および $C > 0$ が存在して，任意の $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ で $|\alpha| \leq l$ を満たすものに対し

$$|\partial^\alpha V(x)| \leq C\langle x \rangle^{-m(|\alpha|)}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

が成り立つとする．ただし，

$$m(k) = \begin{cases} \sigma + k, & k = 0, 1, 2 \text{ のとき}, \\ \sigma + 2 + \frac{\rho+1}{2}(k-2), & k = 2, \ldots, l \text{ のとき}, \end{cases}$$

である．また $q\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は可測であるとし，ある $\tau \in (0,1)$ に対し

$$\langle x\rangle^{1+\tau} q(x)(-\Delta+1)^{-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{H}), \quad \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d),$$

が成り立つとする．最後に，H は $\mathcal{H}$ 上の作用素として正の固有値を持たない，すなわち $\sigma_{\mathrm{pp}}(H) \cap (0,\infty) = \emptyset$ と仮定する．

注意 2.2. 1. 以下，本稿では常に仮定 2.1 を仮定する．特に言及がなければ $l \in \{2,3,\ldots\}$ は任意であり，主結果の大半では $l=2$ で十分である．一部の議論で $l=3$ または 4 が必要となる．

2. 長距離型ポテンシャルに対する C^2 級の仮定は，古典散乱理論で自然に現れる（例えば [DG, Theorem 2.7.1]）．このことから，$l=2$ が量子散乱理論においても最良と考えられる．なお [Hö2, Definition 30.1.3] では，$l=2$ のときの $V+q$ を **2-admissible ポテンシャル**と呼んでいる．

3. 簡単のため，本稿では $\rho = 1$ のときの V を**古典的 C^l 級長距離型ポテンシャル**と呼ぶことにする．さらに V が任意の $l \in \{2,3,\ldots\}$ に対し古典的 C^l 級長距離型ポテンシャルであるとき，V を**古典的 C^∞ 級長距離型ポテンシャル**と呼ぶことにする．

4. 仮定 2.1 の下，H は $\mathcal{H}$ 上の作用素として自己共役である．また正の固有値の非存在についての仮定はとても弱く，例えば $\langle x\rangle^{1+\tau} q \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ であれば自動的に成り立つ．

3 主結果

3.1 定常アイコナール方程式

長距離型散乱理論では，無限遠方における V の影響を無視することができず，**アイコナール方程式**

$$\tfrac{1}{2}|\nabla_x S(\lambda,x)|^2 + V(x) = \lambda, \quad \lambda > 0, \tag{3.1}$$

の解を用いて自由系を適切に修正する必要がある．後の時間依存理論との対比のために，本稿では (3.1) を特に**定常アイコナール方程式**と呼ぶことにする．方程式 (3.1) は実際には空間遠方で解ければ十分である．そこで関数 $\chi \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ を

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & t \le 4/3 \text{ のとき}, \\ 1, & t \ge 5/3 \text{ のとき}, \end{cases} \quad \chi' \ge 0$$

を満たすようにとり，任意の $R>0$ に対しカットオフ関数 $\chi_R\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ を

$$\chi_R(x)=\chi(|x|/R),\quad x\in\mathbb{R}^d, \tag{3.2}$$

で定める．

定理 3.1. 任意の閉区間 $I\subseteq(0,\infty)$ に対し，十分大きな $R>0$ をとる．このとき，ある $S\in C^l(I\times(\mathbb{R}^d\setminus\{0\});\mathbb{R})$ と $s\in C^l(I\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ が存在して，以下が成り立つ．

1. 関数 S は $I\times(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})$ 上で

$$\tfrac{1}{2}|\nabla_xS|^2+\chi_RV=\lambda \tag{3.3}$$

を満たす．

2. 任意の $\lambda\in I$ に対し $S(\lambda,\cdot)$ は，Riemann 計量 $g=2(\lambda-\chi_RV)\,\mathrm{d}x^2$ に関する原点からの測地距離を与える．

3. 関数 S と s は $I\times(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})$ 上で

$$S=\sqrt{2\lambda}|x|(1+s)$$

を満たす．また，$I\times\{|x|\le R\}$ 上で $s=0$ である．

4. ある $C>0$ が存在して，任意の $k+|\alpha|\le l$ に対し

$$\left|\partial_\lambda^k\partial_x^\alpha s(\lambda,x)\right|\le C\lambda^{-1-k}\langle x\rangle^{-m(k+|\alpha|)+k},\quad(\lambda,x)\in I\times\mathbb{R}^d, \tag{3.4}$$

が成り立つ．

注意 3.2.

1. R が λ に依存することを許せば，S および s を，上の条件を満たしながら，任意の $\lambda\in(0,\infty)$ に滑らかに拡張することもできる．このとき特に $\lambda\to+0$ の極限において $R=R(\lambda)\to\infty$ となり得ることに注意せよ．一方でこの場合でも，(3.4) の評価は $\lambda\in(0,\infty)$ に関して一様にできる．

2. 評価 (3.4) は [Is1, Theorem 4.1] および [GY, Lemma 3.1] の一般化となっている．

3. 定理 3.1 の証明は [CS] の変分原理的手法により行われる．なお [Is1, Is2] の証明には偏微分方程式論的手法が用いられ，[II, GY] はそれを引用している．

3.2 定常散乱理論

次に極限レゾルベントの WKB 近似を通じて定常散乱理論を構成する．その前に極限吸収原理を簡単に振り返っておこう．作用素 H のレゾルベントを

$$R(z) = (H - z)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H),$$

で表すことにする．また **Agmon-Hörmander 空間**（**Besov 空間**とも呼ばれる）を

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \bigl\{\psi \in L^2_{\mathrm{loc}} \bigm| \|\psi\|_{\mathcal{B}} < \infty\bigr\}, \quad \|\psi\|_{\mathcal{B}} = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m/2} \|1_m \psi\|_{\mathcal{H}}, \\
\mathcal{B}^* &= \bigl\{\psi \in L^2_{\mathrm{loc}} \bigm| \|\psi\|_{\mathcal{B}^*} < \infty\bigr\}, \quad \|\psi\|_{\mathcal{B}^*} = \sup_{m \geq 0} 2^{-m/2} \|1_m \psi\|_{\mathcal{H}}, \\
\mathcal{B}^*_0 &= \Bigl\{\psi \in \mathcal{B}^* \Bigm| \lim_{m \to \infty} 2^{-m/2} \|1_m \psi\|_{\mathcal{H}} = 0\Bigr\},
\end{aligned}$$

で定める．ただし，一般に $A \subseteq \mathbb{R}^d$ の特性関数を $1(A)$ で表すとした上で，

$$1_0 = 1\bigl(\{|x| < 1\}\bigr), \quad 1_m = 1\bigl(\{2^{m-1} \leq |x| < 2^m\}\bigr), \quad m \in \mathbb{N},$$

とおいた．任意の $s \in \mathbb{R}$ に対し **s 次重み付き L^2 空間**を $L^2_s = \langle x \rangle^{-s} \mathcal{H}$ で定めれば，任意の $s > 1/2$ に対し

$$L^2_s \subsetneq \mathcal{B} \subsetneq L^2_{1/2} \subsetneq \mathcal{H} \subsetneq L^2_{-1/2} \subsetneq \mathcal{B}^*_0 \subsetneq \mathcal{B}^* \subsetneq L^2_{-s}$$

が成り立つことに注意しておく．以上の設定の下，$\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$ において極限

$$R(\lambda \pm \mathrm{i}0) = \operatorname*{s\text{-}w^{\star}\text{-}lim}_{z \to \lambda \pm \mathrm{i}0} R(z)$$

が $\lambda \in (0, \infty)$ に関し局所一様に存在すること（**極限吸収原理**）が知られている．すなわち，任意の $\psi, \phi \in \mathcal{B}$ に対し

$$\langle \phi, R(\lambda \pm \mathrm{i}0)\psi \rangle = \lim_{z \to \lambda \pm \mathrm{i}0} \langle \phi, R(z)\psi \rangle$$

が $\lambda \in (0, \infty)$ に関し局所一様に存在する．極限吸収原理の証明については，例えば，[AIIS2] やその参考文献を参照せよ．

定理 3.3. $I \subseteq (0, \infty)$ を閉区間とし，$R > 0$ とする．また $S = \sqrt{2\lambda}|x|(1 + s) \in C\bigl(I; C^2(\{|x| > R\}; \mathbb{R})\bigr)$ は以下の条件を満たすとする．

(i) 各 $\lambda \in I$ に対し $S(\lambda, \cdot)$ は $\{|x| > R\}$ 上で (3.1) を満たす．

(ii) 任意のコンパクト集合 $I' \subseteq I$ に対しある $\epsilon, C > 0$ が存在して，任意の $|\alpha| \le 2$ に対し

$$|\partial_x^\alpha s(\lambda, x)| \le C\langle x\rangle^{-\epsilon-|\alpha|}, \quad \lambda \in I', \ \ |x| > R,$$

が成り立つ.

さらに任意の $\xi \in \mathcal{G} := L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ に対し，それぞれ

$$\phi_\pm^S[\xi](\lambda, x) = \tfrac{(2\pi)^{1/2}}{(2\lambda)^{1/4}}\chi_R(x)|x|^{-(d-1)/2}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}S(\lambda,x)}\xi(|x|^{-1}x), \quad (\lambda, x) \in I \times \mathbb{R}^d, \tag{3.5}$$

とおく．このとき，以下が成立する.

1. 任意の $\lambda \in I$ に対しある $F^\pm(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{G})$ が一意的に存在して，任意の $\psi \in \mathcal{B}$ に対しそれぞれ

$$R(\lambda \pm \mathrm{i}0)\psi - \phi_\pm^S[F^\pm(\lambda)\psi](\lambda, \cdot) \in \mathcal{B}_0^* \tag{3.6}$$

   が成り立つ.

2. 上で定まる写像 $F^\pm \colon I \times \mathcal{B} \to \mathcal{G}$ は連続である.

3. 任意の $\lambda \in I$ に対しそれぞれ

$$(H - \lambda)F^\pm(\lambda)^* = 0, \quad F^\pm(\lambda)^* F^\pm(\lambda) = \delta(H - \lambda),$$

   が成り立つ．ここで $\delta(H - \lambda) = \pi^{-1}\operatorname{Im} R(\lambda + \mathrm{i}0) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$ とおいた.

4. 任意の $\lambda \in I$ に対し $F^\pm(\lambda)\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$ は稠密である.

注意 3.4. 1. 仮定を満たすような S の存在は定理 3.1 で保証されている.

2. 任意の $\xi \in \mathcal{G}$ および $\lambda \in I$ に対し $\phi_\pm^S[\xi](\lambda, \cdot) \in \mathcal{B}^*$ である．これらはそれぞれ純外向的/内向的アイコナール球面波からなる準モードと見なせる.

3. 後述の定理 3.7 により，実際には任意の $\lambda \in I$ に対し $F^\pm(\lambda)\mathcal{B} = \mathcal{G}$ である.

4. 作用素 $F(\lambda)$ の構成には，後述の強型放射評価（定理 4.1）とアイコナール球面座標系を用いる．アイコナール球面座標系については [ACH] も参照せよ.

さて定常散乱理論の基礎概念をいくつか導入しよう.

定義. 定理 3.3 の設定の下，任意の $\lambda \in I$ を一つとる.

1. エネルギー λ における**定常波動作用素**とは，$F^{\pm}(\lambda)\colon \mathcal{B} \to \mathcal{G}$ のことである．

2. 定常波動作用素 $F^{\pm}(\lambda)$ が**完全**であるとは，それらが全射となることである．

3. エネルギー λ における**定常波動行列**とは，$F^{\pm}(\lambda)^*\colon \mathcal{G} \to \mathcal{B}^*$ のことである．

4. エネルギー λ における**定常散乱行列**とは，ユニタリ作用素 $\mathsf{S}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$ で

$$F^{+}(\lambda) = \mathsf{S}(\lambda) F^{-}(\lambda)$$

を満たすもののことである．

定理 3.3 からの直接の帰結として，定常散乱行列が定式化される．

系 3.5. 定理 3.3 の設定の下，任意のエネルギー $\lambda \in I$ に対し，定常散乱行列 $\mathsf{S}(\lambda)$ が一意的に存在する．さらに写像 $I \ni \lambda \mapsto \mathsf{S}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$ は強連続である．

注意 3.6.

1. 時間依存散乱行列はほとんどすべての $\lambda \in I$ に対してしか定まらないが，定常散乱行列はすべての $\lambda \in I$ に対し定まる．

2. 準モード (3.5) にはさらに因子 $\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\pi(d-3)/4}$ を付けておくのがより標準的である．このような修正の下，$V + q \equiv 0$ のとき $\mathsf{S}(\lambda) \equiv I$ となる．

3.3 一般化固有関数の漸近挙動

ここでは定常散乱理論を**一般化固有関数**の漸近挙動の特徴付けに応用する．任意の $\lambda \in (0, \infty)$ に対し

$$\mathcal{E}_\lambda = \{\phi \in \mathcal{B}^* \,|\, \text{超関数の意味で } (H - \lambda)\phi = 0\}$$

とおく．定理 3.3 により $\mathcal{E}_\lambda \neq \{0\}$ であるが，一方で Rellich の定理により $\mathcal{E}_\lambda \cap \mathcal{B}_0^* = \{0\}$ でもある．したがって $\mathcal{E}_\lambda$ は無限遠方で最小の増大度を持つ一般化固有空間に他ならない．なおここでの「一般化」とは $\mathcal{H}$ に入らないことを指す．

定理 3.7. 定理 3.3 の設定の下，任意の $\lambda \in I$ を一つとる．

1. $\phi \in \mathcal{E}_\lambda$ または $\xi_\pm \in \mathcal{G}$ のうち，任意の 1 つを固定すると他の 2 つが一意に定まって

$$\phi - \phi_+^S[\xi_+](\lambda, \cdot) + \phi_-^S[\xi_-](\lambda, \cdot) \in \mathcal{B}_0^* \tag{3.7}$$

が成り立つ．

2. 上の対応は

$$\phi = 2\pi \mathrm{i} F^{\pm}(\lambda)^* \xi_{\pm}, \quad \xi_+ = \mathsf{S}(\lambda)\xi_-$$

で与えられる．

3. 定常波動行列 $F^{\pm}(\lambda)^*$ は位相線形同型 $\mathcal{G} \to \mathcal{E}_\lambda \subseteq \mathcal{B}^*$ を与える．さらに，(3.7) を満たす任意の $\phi \in \mathcal{E}_\lambda$ および $\xi_\pm \in \mathcal{G}$ に対し

$$\|\xi_\pm\|_{\mathcal{G}} = \tfrac{(2\lambda)^{1/4}}{(2\pi)^{1/2}} \lim_{m\to\infty} 2^{-m/2} \|1_m \phi\|_{\mathcal{H}}$$

が成り立つ．

4. 作用素 $F^{\pm}(\lambda)\colon \mathcal{B} \to \mathcal{G}$ および $\delta(H-\lambda)\colon \mathcal{B} \to \mathcal{E}_\lambda$ はともに全射である．

注意 3.8. 1. 定理 3.7 の対応において，$\xi_\pm \in \mathcal{G}$ は $\phi \in \mathcal{E}_\lambda$ の無限遠方のおける弱極限（振動を適当に相殺しておく）で表示できる．

2. 定理 3.7 は，[GY, IS1] の結果を（後者についてはEuclid 空間に限定してから）C^2 級長距離型ポテンシャルに拡張したものである．文献 [II] も参照せよ．

3.4 一般化 Fourier 変換

次に定常散乱理論を**一般化 Fourier 変換**の構成に応用する．ここでの一般化 Fourier 変換とは，Schrödinger 作用素 H の連続部分をある掛け算作用素へと変換（対角化）するユニタリ変換のことである．仮定 2.1 により

$$\sigma_{\mathrm{ac}}(H) = [0,\infty), \quad \sigma_{\mathrm{sc}}(H) = \emptyset, \quad \sigma_{\mathrm{pp}}(H) \cap (0,\infty) = \emptyset$$

が成り立つことに注意する．

閉区間 $I \subseteq (0,\infty)$ 上への H のスペクトル射影作用素を $P_H(I)$ として，

$$H_I = H_{|\mathcal{H}_I}, \quad \mathcal{H}_I = P_H(I)\mathcal{H}, \quad \widetilde{\mathcal{H}}_I = L^2(I, \mathrm{d}\lambda; \mathcal{G})$$

とおく．定理 3.3 により作用素

$$\mathcal{F}_0^{\pm} = \int_I^{\oplus} F^{\pm}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\colon \mathcal{B} \to C(I;\mathcal{G}) \cap \widetilde{\mathcal{H}}_I$$

が定まるが，これは以下のように $\mathcal{H}_I$ 上へ拡張できる．

定理 3.9. 定理 3.3 の設定の下，以下が成り立つ．

1. 作用素 $\mathcal{F}_0^{\pm}$ はそれぞれユニタリ作用素 $\mathcal{F}^{\pm}\colon \mathcal{H}_I \to \widetilde{\mathcal{H}}_I$ を誘導する．

2. ユニタリ作用素 $\mathcal{F}^{\pm}$ はそれぞれ
$$\mathcal{F}^{\pm} H_I (\mathcal{F}^{\pm})^* = M_\lambda$$
を満たす．ここで M_λ は $\widetilde{\mathcal{H}}_I$ 上の λ による掛け算作用素である．

3. 関数 S_1 もまた定理 3.3 の仮定を満たすとし，$\mathcal{F}_1^{\pm}$ をそれから定まる上のユニタリ作用素とする．このとき，ある $\Theta \in C(I \times \mathbb{S}^{d-1}; \mathbb{R})$ が存在して，それぞれ
$$\mathcal{F}_1^{\pm} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\Theta} \mathcal{F}^{\pm}$$
が成り立つ．

注意 3.10.
1. 絶対連続部分全体 $H_{\mathrm{ac}} = H_{|\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}} = P_H((0,\infty))\mathcal{H}$, を対角化するには，次のように $\mathcal{F}^{\pm}$ を拡張すればよい．区間 $(0,\infty)$ を互いに素な区間の和に分割し，それぞれの区間に対する一般化 Fourier 変換の直和をとる，あるいは，注意 3.2.1 に従って，すべての $\lambda \in (0,\infty)$ で定義された S を定理 3.3 で採用しておく．

2. 文献 [II, GY] ではそれぞれ古典的 C^4，C^3 級長距離型ポテンシャルに対し一般化 Fourier 変換が構成された．定理 3.9 はそれらを C^2 級に拡張している．関連する結果として [Hö1, Sa, IS1] などもあるが，いずれの手法も C^2 級ポテンシャルには適用できない．

3.5 時間依存アイコナール方程式

ここからは時間依存散乱理論を論じる．時間依存理論における自由系の修正には，**Hamilton-Jacobi 方程式**
$$\partial_t K(t,x) + \tfrac{1}{2}|\nabla_x K(t,x)|^2 + V(x) = 0 \tag{3.8}$$
の解が用いられる．本稿ではこれを**時間依存アイコナール方程式**と呼ぶことにしよう．この方程式 (3.8) の解は，定常アイコナール方程式 (3.1) の解に Legendre 変換を適用して構成することができる．文献 [IS2] も参照せよ．時空間領域
$$\Omega_\mu = \bigl\{(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \bigm| |x| \ge \mu t\bigr\}, \quad \mu > 0,$$
を考える．

定理 3.11. 任意の $\mu > \mu' > 0$ をとる．定理 3.1 において $I = I_{\mu'} = [\mu'^2/2, \infty)$ とおき，十分大きな $R > 0$ に対し S を構成しておく．このとき，各 $(t, x) \in \Omega_\mu$ に対し，関数

$$\widetilde{K}(\lambda, t, x) = S(\lambda, x) - \lambda t, \quad \lambda \in I,$$

は一意的な臨界点 $\lambda_c = \lambda_c(t, x) \in I$ を持つ．さらに $K = \widetilde{K}(\lambda_c, \cdot, \cdot)$ とおくと，以下が成り立つ．

1. 関数 K は Ω_μ 上で C^l 級であり，さらにそこで

$$\partial_t K + \tfrac{1}{2}|\nabla_x K|^2 + \chi_R V = 0$$

を満たす．

2. ある $C > 0$ が存在して，任意の $k + |\alpha| \le 2$ に対し

$$\left|\partial_t^k \partial_x^\alpha \big(K(t, x) - x^2/(2t)\big)\right| \le C t^{1-k} \langle x \rangle^{-\sigma - |\alpha|}, \quad (t, x) \in \Omega_\mu,$$

が成り立つ．

定義. 定理 3.11 の設定の下，$K \in C^l(\Omega_\mu; \mathbb{R})$ を $S \in C^l(I_{\mu'} \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}); \mathbb{R})$ の **Legendre 変換**と呼ぶ．

3.6 時間依存散乱理論

最後の主結果として，時間依存波動作用素の存在することと，さらにそれが一般化 Fourier 変換の共役作用素で書けることとを紹介しよう．これにより定常散乱理論と時間依存散乱理論の同等性が分かる．

定理 3.12. $\mu, T > 0$ とする．また $K \in C^2(\Omega_{\mu,T}; \mathbb{R})$，$\Omega_{\mu,T} = \{(t, x) \in \Omega_\mu \,|\, t > T\}$，は以下の条件を満たすとする．

(i) 関数 K は $\Omega_{\mu,T}$ 上で (3.8) を満たす．

(ii) ある $C > 0$ が存在して，任意の $k + |\alpha| \le 2$ に対し

$$\left|\partial_t^k \partial_x^\alpha \big(K(t, x) - x^2/(2t)\big)\right| \le C t^{1-k} \langle x \rangle^{-\sigma - |\alpha|}, \quad (t, x) \in \Omega_{\mu,T},$$

が成り立つ．

さらに $J=J_\mu=[\mu^2/2,\infty)$ とおき，任意の $t>T$ に対し $U^\pm(t)\in\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}}_J,\mathcal{H})$ を

$$(U^\pm(t)h)(x)=\mathrm{e}^{\mp 3\pi\mathrm{i}/4}t^{-1}|x|^{1-d/2}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}K(t,x)}h(x^2/(2t^2),x/|x|),\quad h\in\widetilde{\mathcal{H}}_J,\ \ x\in\mathbb{R}^d,$$

で定める．このとき，以下が成立する．

1. $\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{H}}_J,\mathcal{H})$ における強極限

$$W^\pm:=\operatorname*{s\text{-}lim}_{t\to\infty}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}tH}U^\pm(t)$$

がそれぞれ存在し，これらはともに等長作用素である．

2. 関数 K_1 もまた上の条件を満たすとし，$W_1^\pm$ をそれから定まる上の等長作用素とする．このとき，ある $\Phi\in(J\times\mathbb{S}^{d-1};\mathbb{R})$ が存在して，それぞれ

$$W_1^\pm=W^\pm\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\Phi}$$

が成り立つ．

注意 3.13. 1. 仮定を満たすような K の存在は定理 3.11 で保証されている．

2. 注意 3.10.1 と同様に，$(0,\infty)$ を互いに素な区間の和に分割することで，$W^\pm$ を $\widetilde{\mathcal{H}}_{(0,\infty)}$ 上に拡張することもできる．

定義. 作用素 $W^\pm$ を**時間依存波動作用素**と呼ぶ．また $W^\pm$ が J 上で**漸近完全**であるとは， 作用素 $\widetilde{\mathcal{H}}_J\to\mathcal{H}_J$ としてユニタリとなることである．

定理 3.14. 定理 3.9 のように I，S および $\mathcal{F}^\pm$ をとり，また定理 3.12 のように $\mu>0$，K，$J=J_\mu=[\mu^2/2,\infty)$ および $W^\pm$ をとる．このとき以下が成り立つ．

1. ある $\Psi\in C\bigl((I\cap J)\times\mathbb{S}^{d-1};\mathbb{R}\bigr)$ が存在して，それぞれ

$$(W^\pm)^*=\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\Psi}\mathcal{F}^\pm\colon\mathcal{H}_{I\cap J}\to\widetilde{\mathcal{H}}_{I\cap J}$$

が成り立つ．特に $W^\pm$ は $I\cap J$ 上で漸近完全である．

2. さらに，ある $\mu'\in(0,\mu)$ に対し $I=I_{\mu'}=[\mu'^2/2,\infty)$ とし，$S\in C^2\bigl(I_{\mu'}\times(\mathbb{R}^d\setminus\{0\});\mathbb{R}\bigr)$ は定理 3.1 の関数，また $K\in C^2(\Omega_\mu;\mathbb{R})$ は定理 3.11 で与えられる S の Legendre 変換であるとする．このとき上の Ψ は恒等的に 0 である．

注意 3.15. 自由系の取り方は異なるが，定理 3.14 は [Hö2, Theorem 30.5.10] で示された「2-admissible ポテンシャルに対する時間依存波動作用素の漸近完全性」を再現している．ただし我々の証明は定常散乱理論の結果に依存しており，この点では [IS2] に近いとも言える．時間依存の方法については [IS3] も参照せよ．

4　証明の鍵となる評価

4.1　強型放射評価

論文 [IS4] において最も技術的に新規性の高い箇所は，定理 3.1 および以下の**強型放射評価**（定理 4.1）である（実際，定理 3.1 と定理 4.1 の証明には論文のかなりの項数が割かれている）．強型放射評価は定常散乱理論の核心部分である WKB 近似 (3.6) の構成を著しく簡略化してくれるため，前節の一連の結果と並んで，これ自身も [IS4] の主結果と見ることができる．ここではその主張を見てみる．

定理 3.1 の $S \in C^l(I \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}); \mathbb{R})$ に対し，**放射作用素**を

$$\begin{aligned} \gamma &= (\gamma_1, \dots, \gamma_d) = p \mp (\nabla_x \chi_1 S), \\ \gamma_\parallel &= \mathrm{Re}\bigl((\nabla_x \chi_1 S) \cdot \gamma\bigr) = (\nabla_x \chi_1 S) \cdot \gamma - \tfrac{\mathrm{i}}{2}(\Delta_x \chi_1 S) \end{aligned} \tag{4.1}$$

で定義する．ここで $p = (p_1, \dots, p_d) = (-\mathrm{i}\partial_1, \dots, -\mathrm{i}\partial_d)$ とした．また χ_1 は (3.2) において $R = 1$ としたもので，原点における S の特異性を除くためだけに導入されている．さらに

$$\beta_c = \min\{2, 1 + \sigma + \rho\}$$

とおく．

定理 4.1. 仮定 2.1 において $l = 4$ かつ $q \equiv 0$ とする．また $I \subseteq (0, \infty)$ をコンパクト区間とし，十分大きな $R > 0$ に対し定理 3.1 の $S \in C^4(I \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}; \mathbb{R})$ をとる．このような S から定まる (4.1) の γ_j と $\gamma_\parallel$ に対し，以下が成り立つ．

1. 任意の $\beta \in (0, \beta_c)$ に対しある $C > 0$ が存在して，任意の $\lambda \in I$ および $\psi \in L^2_{\beta+1/2}$ に対し

$$\begin{aligned} \bigl\|\gamma_\parallel R(\lambda \pm \mathrm{i}0)\psi\bigr\|_{L^2_{\beta-1/2}} &\le C\|\psi\|_{L^2_{\beta+1/2}}, \\ \bigl\|\gamma_i\gamma_j R(\lambda \pm \mathrm{i}0)\psi\bigr\|_{L^2_{\beta-1/2}} &\le C\|\psi\|_{L^2_{\beta+1/2}}, \quad i, j = 1, \dots, d, \end{aligned}$$

   が成り立つ．

2. 任意の $\beta' \in (0, \beta_c/2)$ および $t > 1/2$ に対しある $C' > 0$ が存在して，任意の $\lambda \in I$ および $\psi \in L^2_{\beta'+t}$ に対し

$$\bigl\|\gamma_i R(\lambda \pm \mathrm{i}0)\psi\bigr\|_{L^2_{\beta'-t}} \le C'\|\psi\|_{L^2_{\beta'+t}}, \quad i = 1, \dots, d,$$

   が成り立つ．

注意 4.2. 1. 定理 4.1 は，古典的 C^3 級長距離型ポテンシャルかつ $\beta_c < 1$ の場合に対する [Is1] の結果の一般化であり，$\beta_c > 1$ ととれるという意味で「強型」である．強型放射評価の初出は [HS] であり，そこでは古典的 C^∞ 級長距離型ポテンシャルが扱われた．

2. 定理 4.1 の証明は交換子法による初等的なもので（ただし計算は長い），超局所解析を用いる [HS] とは大きく異なる．また $\gamma_{\|}$ と β_c を適当に取り直し，証明も修正することで，$l = 3$ の下で強型放射評価を導くこともできる．設定等は異なるものの，[AIIS1] では Stark ハミルトニアンに対して同様の議論がなされている．

3. 対応する古典力学的描像については本稿第 4.3 節を見よ．

4. より強い仮定の下でのすべての非負エネルギーに対する一様評価については，[Sk] を参照せよ．

4.2 Hörmander の正則化

定理 4.1 では V に $l = 2$ よりも高い正則性が要求されており，このままでは主定理すべてに余計な仮定 $l \geq 4$（または $l \geq 3$）が加わることになる．論文 [IS4] では，V を [Hö2, Lemma 30.1.1] により予め正則化しておくことで，主定理が $l = 2$ で成立するよう工夫がなされている．参考のため，以下に正則化の主張を引用しておこう．この正則化は短距離型の誤差項を生じるが，散乱理論を論じる際には，それは q と合わせて第 2 レゾルベント方程式を通じて処理されるので問題は無い．

補題 4.3 ([Hö2, Lemma 30.1.1]，微細な改変を含む)．仮定 2.1 において $l = 2$ とする．任意の $\rho \in (0, \sigma)$ に対し，ある分解

$$V = V_{\mathrm{S}} + V_{\mathrm{L}}, \quad V_{\mathrm{S}} \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}), \ \ V_{\mathrm{L}} \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}),$$

が存在して以下が成り立つ．ある $C > 0$ が存在して任意の $|\alpha| \leq 2$ に対し

$$|\partial^\alpha V_{\mathrm{S}}(x)| \leq C\langle x\rangle^{-1-\sigma+\rho-|\alpha|(\rho+1)/2}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

が成り立つ．また任意の $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ に対しある $C_\alpha > 0$ が存在して

$$|\partial^\alpha V_{\mathrm{L}}(x)| \leq C_\alpha \langle x\rangle^{-m(|\alpha|)} \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

が成り立つ．

注意 4.4. このような正則化は [II] でも用いられているが，そこでは古典的 C^4 級長距離型ポテンシャルに適用されおり，V_{L} の減衰が [IS4] よりかなり強い．

4.3　古典力学

定理 4.1 において，γ のある方向成分に過ぎない $\gamma_\parallel$ が何故強い減衰を生むのか，ここでは古典力学の観点からの理解を試みる．

4.3.1　自由系

まずは自由系 $V \equiv 0$ の場合を考える．古典的自由ハミルトニアンは

$$H_0^{\mathrm{cl}}(x,\xi) = \tfrac{1}{2}\xi^2, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d},$$

であり，対応する Hamilton 方程式は

$$\dot{x} = \xi, \quad \dot{\xi} = 0$$

である．任意の初期データ $(y,\eta) \in \mathbb{R}^{2d}$ に対し古典軌道は明示的に

$$x(t) = \eta t + y, \quad \xi(t) = \eta$$

で与えられる．

古典軌道が正のエネルギー

$$\lambda = H_0^{\mathrm{cl}}(x(t),\xi(t)) = \tfrac{1}{2}\eta^2 > 0$$

を持つとして，この古典軌道に沿って相空間の空間変数の間にどのような関係が現れるかを見てみよう．例えば，明らかに

$$\xi = \sqrt{2\lambda}|x|^{-1}x + \mathcal{O}(t^{-1}) \ \ (t \to \infty) \tag{4.2}$$

なので，運動量 ξ は漸近的には $\sqrt{2\lambda}|x|^{-1}x$ であることが分かる．ただしここでは，定常理論を展開するために，たとえ誤差項であっても時間パラメータを陽には扱いたくないと考えることにしよう．そのためには

$$|x| = \sqrt{2\lambda}t + \mathcal{O}(1) \ \ (t \to \infty) \tag{4.3}$$

に注意する．これは，定数因子を除いて，$|x|$ を**実効時間**と見做せることを意味している．すなわち，(4.2) において $\mathcal{O}(t^{-1})$ を $\mathcal{O}(|x|^{-1})$ で置き換えることができ，それにより定常表示が得られたと考えるのである．

さて (4.1) に倣って，古典的観測量

$$\gamma^{\mathrm{cl}} = \xi - (\nabla S_0), \quad \gamma_\parallel^{\mathrm{cl}} = (\nabla S_0)\cdot\gamma^{\mathrm{cl}}, \quad S_0 = \sqrt{2\lambda}|x|, \tag{4.4}$$

を導入しよう．関係 (4.2) と (4.3) によれば

$$\gamma^{\mathrm{cl}} = \mathcal{O}(|x|^{-1}) \tag{4.5}$$

であり，さらに

$$\gamma_{\|}^{\mathrm{cl}} = H_0^{\mathrm{cl}} - \lambda - \tfrac{1}{2}(\gamma^{\mathrm{cl}})^2 = -\tfrac{1}{2}(\gamma^{\mathrm{cl}})^2 = \mathcal{O}(|x|^{-2}) \tag{4.6}$$

である．最後の評価 (4.6) は (4.5) を愚直に (4.4) の中央の等式に代入して得られる評価より真に強いことに注意する．これが強型評価の出発点である．

4.3.2　摂動系

次に摂動された古典的ハミルトニアン

$$H^{\mathrm{cl}}(x,\xi) = \tfrac{1}{2}\xi^2 + \chi_R(x)V(x), \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}, \tag{4.7}$$

を考える．対応する Hamilton 方程式は

$$\dot{x} = \xi, \quad \dot{\xi} = -\nabla(\chi_R V)$$

である．古典軌道 $(x(t),\xi(t))$ が正のエネルギー

$$\lambda = H^{\mathrm{cl}}(x(t),\xi(t)) > 0$$

を持つとする．定理 3.1 の S を用いて (4.1) と同様に古典観測量

$$\gamma^{\mathrm{cl}} = \xi - (\nabla S), \quad \gamma_{\|}^{\mathrm{cl}} = (\nabla S)\cdot\gamma^{\mathrm{cl}}$$

を導入し，その漸近挙動を解析しよう．

命題 4.5. 任意の $\lambda > 0$ を固定し，S，γ^{cl} および $\gamma_{\|}^{\mathrm{cl}}$ を上のように定める．ハミルトニアン (4.7) 対する古典軌道 $(x(t),\xi(t))$，$t \in \mathbb{R}$，はエネルギー λ を持ち，さらに

$$|x(t)| \to +\infty \quad (t \to +\infty)$$

を満たすとする．このとき，任意の $\beta \in (0,2)$ に対しある $C > 0$ が存在して

$$\gamma^{\mathrm{cl}}(x(t),\xi(t))^2 \le C|x(t)|^{-\beta}, \quad \left|\gamma_{\|}^{\mathrm{cl}}(x(t),\xi(t))\right| \le C|x(t)|^{-\beta}, \quad t \gg 1,$$

が成り立つ．

注意 4.6. これは定理 4.1 の古典的対応物である．実際，確かに $\gamma_{\parallel}^{\mathrm{cl}}$ の減衰指数は γ^{cl} の 2 倍になっている．

証明の概略. 本稿では証明のあらましのみを与え，詳細は [IS4, Section 3.2] に委ねることにする．命題 4.5 の証明において最も重要なのは，エネルギー保存則と (3.3) から従う等式

$$0 = H^{\mathrm{cl}} - \lambda = \tfrac{1}{2}(\gamma^{\mathrm{cl}})^2 + \gamma_{\parallel}^{\mathrm{cl}}, \quad t \gg 1, \tag{4.8}$$

である．この等式からまず $\gamma_{\parallel}^{\mathrm{cl}}$ の減衰指数は γ^{cl} の 2 倍であることが分かる．ゆえに，定理 3.1 より $S \sim \sqrt{2\lambda}|x|$ であることに注意すると，主張は

$$P^{\mathrm{cl}} := (S^{\beta}\gamma_{\parallel}^{\mathrm{cl}})^2 \le C_1, \quad t \gg 1,$$

に帰着される．よって観測量 P^{cl} の時間微分を計算することになるが，Poisson 括弧を利用すれば,「時間パラメータを陽に用いない」という制約も同時に満たすことができるだろう．すなわち $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \{H^{\mathrm{cl}}, \cdot\}$ とおいて，

$$DP^{\mathrm{cl}} = \{H^{\mathrm{cl}}, P^{\mathrm{cl}}\} \le 0 \tag{4.9}$$

を示す方針を取る．これより先の計算は省略するが，以降でも (4.8) を利用する箇所がいくつかあり，$\gamma_{\parallel}^{\mathrm{cl}}$ を $\frac{1}{2}(\gamma^{\mathrm{cl}})^2$ に直したり，逆に $\frac{1}{2}(\gamma^{\mathrm{cl}})^2$ を $\gamma_{\parallel}^{\mathrm{cl}}$ に直したりする．そういった意味で，(4.8) はある種の本質的な関係式と考えられる． □

注意 4.7. 「時間パラメータを陽に用いない」という制約を強調している理由は，古典力学（命題 4.5）の証明が量子力学（定理 4.1）の証明にそのまま持ち上がるからである．実際，定理 4.1 の証明の方針は，(4.9) に相当する交換子不等式を示すことである．ここで H^{cl} および P^{cl} の量子化は共に 2 階の微分作用素であるため，交換子は 3 階の微分作用素となり，一般に符号を持たないことに注意しよう．この困難は，やはり古典力学の場合と同様に，(4.8) に相当する作用素関係式を適宜利用することで解消される．

なお量子力学においては，観測量が交換しないことから，交換子計算のために V により高い正則性が要求されることになる．さらにこの高階微分から来る項の制御のために，定理 4.1 の β の範囲は命題 4.5 のそれより強い制限を受けている．

参考文献

[ACH] S. Agmon, J. Cruz, I. Herbst: *Generalized Fourier transform for Schrödinger operators with potentials of order zero*, J. Funct. Anal. **167** (1999), 345–369.

[AIIS1] T. Adachi, K. Itakura, K. Ito, E. Skibsted, *Stationary scattering theory for* 1*-body Stark operators, I*, Pure Appl. Funct. Anal. **7** (2022), no. 3, 825–861.

[AIIS2] T. Adachi, K. Itakura, K. Ito, E. Skibsted, *New methods in spectral theory of N-body Schrödinger operators*, Rev. Math. Phys. **33** (2021), 48 pp.

[CS] J. Cruz, E. Skibsted, *Global solutions to the eikonal equation*, J. Differential Equations **255** (2013), 4337–4377.

[DG] J. Dereziński and C. Gérard, *Scattering theory of classical and quantum N-particle systems*, Texts and Monographs in Physics, Berlin, Springer 1997.

[GY] Y. Gâtel, D. Yafaev, *On the solutions of the Schrödinger equation with radiation conditions at infinity: the long-range case*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **49** no. 5 (1999), 1581–1602.

[HS] I. Herbst, E. Skibsted, *Time-dependent approach to radiation conditions*, Duke Math. J. **64** no. 1 (1991), 119–147.

[Hö1] L. Hörmander, *The existence of wave operators in scattering theory*, Math. Z. **146** (1976), 68–91.

[Hö2] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. I–IV*, Berlin, Springer 1983–85.

[II] T. Ikebe, H. Isozaki, *A stationary approach to the existence and completeness of long-range operators*, Integral equations and operator theory **5** (1982), 18–49.

[Is1] H. Isozaki, *Eikonal equations and spectral representations for long-range Schrödinger Hamiltonians*, J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980), 243–261.

[Is2] H. Isozaki, *On the generalized Fourier transforms associated with Schrödinger operators with long-range perturbations*, J. Reine Angew. Math. **337** (1982), 18–67.

[IS1] K. Ito, E. Skibsted, *Stationary scattering theory on manifolds*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble (2021), 55 pp.

[IS2] K. Ito, E. Skibsted, *Time-dependent scattering theory on manifolds*, J. Funct. Anal. **277** (2019), 1423–1468.

[IS3] K. Ito, E. Skibsted, *Scattering theory for Riemannian Laplacians*, J. Funct. Anal. **264** (2013), 1929–1974.

[IS4] K. Ito, E. Skibsted, *Scattering theory for C^2 long-range potentials*, in preparation.

[Sa] Y. Saitō, *Spectral representations for Schrödinger operators with a long-range potentials*, Lecture Notes in Mathematics **727**, Berlin, Springer 1979.

[Sk] E. Skibsted, *Renormalized two-body low-energy scattering*, Journal d'Analyse Mathématique **122** (2014), 25–68.