

加群のグレブナー基底と超幾何関数の隣接関係式

Groebner bases in D -modules and contiguity relations of hypergeometric functions

日本大学 生物資源科学部 中山洋将^{*1}
 NAKAYAMA HIROMASA
 COLLEGE OF BIORESOURCE SCIENCES, NIHON UNIVERSITY

Abstract

Contiguous relations of hypergeometric functions are important for evaluations of its functions and inducing other formulas. We gave a new algorithm computing contiguous operators by using Gröbner bases in D -modules, and applied this algorithm to Horn's hypergeometric functions.

1 Introduction

Gauss 超幾何関数 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ のパラメータ α についての隣接作用素とは,

$$\begin{aligned} (x\partial + \alpha) \cdot F(\alpha, \beta, \gamma; x) &= \alpha F(\alpha + 1, \beta, \gamma; x), \\ ((x^2 - x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1) \cdot F(\alpha + 1, \beta, \gamma; x) &= (\alpha - \gamma + 1)F(\alpha, \beta, \gamma; x), \end{aligned}$$

のように、それを関数に作用させると、関数中のパラメータを 1 増やしたり、パラメータを 1 減らしたりできる微分作用素のことである。ここで $\partial = \frac{d}{dx}$ (x についての微分作用素) としている。パラメータを 1 増やすものを上昇作用素、パラメータを 1 減らすものを下降作用素と呼ぶ。この場合、上昇作用素は $x\partial + \alpha$ 、下降作用素は $(x^2 - x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1$ であり、上昇作用素は Gauss の超幾何級数から容易に求めることができるが、下降作用素はいくらかの計算が必要になる。多変数超幾何関数でも、一方の隣接作用素は超幾何級数から容易に求めることができるが、それとは逆にパラメータを動かす隣接作用素を求めることは難しい場合が多い。

既知の隣接作用素から、逆にパラメータを動かす隣接作用素を求める問題について、有理関数係数微分作用素環のグレブナー基底を用いて解くアルゴリズムが、[8] により与えられている。さらに [6] では、隣接関係式を微分作用素環上の加群の元とみなし、微分作用素環上の加群のグレブナー基底を用いることで、この問題を解くアルゴリズムが与えられている。例えば、上記の Gauss 超幾何関数の 2 つの隣接関係式を

$$\begin{pmatrix} x\partial + \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (x^2 - x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1 \\ \alpha - \gamma + 1 \end{pmatrix}$$

とおき、左 D 加群 D^2 の元とみなす。すなわち、 D^2 の元の第 1 成分を $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ に作用させる微分作用素、第 2 成分を $F(\alpha + 1, \beta, \gamma; x)$ に作用させる微分作用素とみなして、上のような等式と D^2 の元を同一視する。計算により得られるグレブナー基底を見れば、隣接するパラメータを持つ関数の間の関係式 (例えば $P \cdot F(\alpha) = Q \cdot F(\alpha + 1)$ の形の関係式) がすぐにわかる。

^{*1} 〒 252-0880 神奈川県藤沢市亀井野 1866 E-mail: nakayama.hiromasa@nihon-u.ac.jp

2 隣接作用素を計算するアルゴリズム

多項式係数微分作用素環を $D = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$ とする. ここで $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ (x_i についての微分作用素) を表す. 左 D 加群

$$D^2 = \left\{ \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \mid P, Q \in D \right\}$$

を考え, ここにおけるグレブナー基底計算を行うことで, 超幾何関数の隣接作用素を計算するアルゴリズムを与える.

$F(\lambda)$ を超幾何関数 (多変数でもよい) とし, λ をその関数に含まれるパラメータで隣接作用素により動かしたいものとする. 例えば, Gauss の超幾何関数 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ のパラメータ α についての隣接作用素を対象にする場合は $F(\alpha)$ のように表す. またパラメータの λ は generic にとり, D では定数のように扱う.

$F(\lambda)$ の λ についての上昇作用素 $H(\lambda)$ が与えられていると仮定する. すなわち,

$$H(\lambda) \cdot F(\lambda) = C(\lambda)F(\lambda+1)$$

が成り立つような $H(\lambda) \in D$ と 0 でない定数 $C(\lambda) \in \mathbb{C}$ が与えられていると仮定する. このとき, λ についての下降作用素 $B(\lambda+1)$ すなわち,

$$B(\lambda+1) \cdot F(\lambda+1) = C'(\lambda+1)F(\lambda)$$

が成り立つような $B(\lambda+1) \in D$ と 0 でない定数 $C'(\lambda+1) \in \mathbb{C}$ を求める問題を考える.

D^2 における集合

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \mid P \cdot F(\lambda) = Q \cdot F(\lambda+1) \right\} \subset D^2$$

は D^2 の加法と, 左からの D の元の掛け算により左 D 加群の構造を持つ. $F(\lambda)$ の零化イデアル (左 D イデアル) を

$$I(\lambda) = \{P \in D \mid P \cdot F(\lambda) = 0\}$$

とし, $I(\lambda)$ の生成元を $P_1(\lambda), \dots, P_r(\lambda)$ とする. D^2 における左 D 加群

$$M' = \left\langle \begin{pmatrix} H(\lambda) \\ C(\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_1(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} P_r(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P_1(\lambda+1) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ P_r(\lambda+1) \end{pmatrix} \right\rangle$$

を考える. ここで $\langle Q_1, \dots, Q_r \rangle$ という式は, $Q_1, \dots, Q_r \in D^2$ が生成する左 D 加群を表すとする.

命題 1 ([6])

$M = M'$ が成り立つ.

下降作用素 $B(\lambda+1)$ が存在するとすれば, $\begin{pmatrix} C'(\lambda+1) \\ B(\lambda+1) \end{pmatrix} \in M'$ ($C'(\lambda+1)$ は 0 でない定数) が成り立つから, M' の元で第 1 成分が 0 でない定数のものをとれば, 下降作用素が得られる.

定理 2 ([6])

左 D 加群 M' の POT 順序 (Position Over Term 順序) $<$ についてのグレブナー基底を G とする. M' の元で第 1 成分が 0 でない定数のものが存在するならば, G の元で第 1 成分が 0 でない定数のものが存在する. ここで用いている D^2 における POT 順序 $<$ は, D^2 の任意の 2 つの単項式 $x^\alpha \partial^\beta \mathbf{e}_i$ と $x^{\alpha'} \partial^{\beta'} \mathbf{e}_j$ の間に順序を

$$x^\alpha \partial^\beta \mathbf{e}_i > x^{\alpha'} \partial^{\beta'} \mathbf{e}_j \iff i < j \text{ または } (i = j \text{ かつ } x^\alpha \partial^\beta > x^{\alpha'} \partial^{\beta'})$$

と定めたものである。ただし、 $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とし、 $i, j \in \{1, 2\}$, $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ であり、 $x^\alpha \partial^\beta$ は $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ の時、 $x^\alpha \partial^\beta = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \partial_1^{\beta_1} \dots \partial_n^{\beta_n}$ を表す。 $\langle \cdot \rangle$ は D における適当な単項式順序、例えば辞書式順序などとする。 $v \in D^2$ について、POT 順序 \prec についての先頭単項式を $LM_{\prec}(v)$ と表す。加群のグレブナー基底についての記号、用語は [1] に従う。

上記の定理から、上昇作用素から下降作用素を計算するアルゴリズムは以下の通りになる。

アルゴリズム 1 (下降作用素を計算するアルゴリズム, [6])

入力 : $H(\lambda)$: 上昇作用素, $C(\lambda)$: 0 でない定数で $H(\lambda) \cdot F(\lambda) = C(\lambda)F(\lambda + 1)$ を満たすもの, $P_1(\lambda), \dots, P_r(\lambda)$: $F(\lambda)$ の零化イデアルの生成元。

出力 : $B(\lambda + 1)$: 下降作用素, $C'(\lambda + 1)$: 0 でない定数で $B(\lambda + 1) \cdot F(\lambda + 1) = C'(\lambda + 1)F(\lambda)$ を満たすもの。

1. D^2 における左 D 加群

$$M' = \left\langle \begin{pmatrix} H(\lambda) \\ C(\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_1(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} P_r(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P_1(\lambda + 1) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ P_r(\lambda + 1) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

の POT 順序 \prec (定理 2 で定めたもの) についてのグレブナー基底 G を求める。

2. G の元で第 1 成分が 0 でない定数のものが存在しない場合、下降作用素は存在しない。 G の元で第 1 成分が 0 でない定数のものが $\begin{pmatrix} C'(\lambda + 1) \\ B(\lambda + 1) \end{pmatrix}$ である。

3 計算機での計算例

アルゴリズム 1 の数式処理ソフト Risa/Asir での計算例を挙げる。ただし、実際にアルゴリズムを実行する場合、関数 $F(\lambda)$ の零化イデアルを求めることは難しいので、代わりに $F(\lambda)$ を零化する微分作用素を十分多くとり、それらを入力としてアルゴリズムを実行する。このとき、下降作用素が見つからない場合に、下降作用素が存在しないとは限らないことに注意する。

例 1 (Gauss 超幾何関数 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$)

$F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ を Gauss 超幾何関数とし、 α についての上昇作用素から下降作用素を求める。 D は 1 変数多項式係数微分作用素環 $D = \mathbb{C}\langle x, \partial \rangle$ とする。 $F(\alpha) = F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ とおく。パラメータ α, β, γ は generic であるとする。 $F(\alpha)$ を零化する微分作用素として $P(\alpha) = x(1-x)\partial^2 + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\partial - \alpha\beta$ がとれる。上昇作用素は

$$(x\partial + \alpha) \cdot F(\alpha) = \alpha F(\alpha + 1)$$

となることが知られている。左 D 加群

$$M' = \left\langle \begin{pmatrix} x\partial + \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P(\alpha + 1) \end{pmatrix} \right\rangle$$

をとり、 M' の POT 順序 \prec についてのグレブナー基底 G を計算すると、

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ (-x^2 + x)\partial^2 + ((-\alpha - \beta - 2)x + \gamma)\partial - \alpha\beta - \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha - \gamma + 1 \\ (x^2 - x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1 \end{pmatrix} \right)$$

となる. G の元で第 1 成分が 0 でない定数のものは $\left(\begin{array}{c} \alpha - \gamma + 1 \\ (x^2 - x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1 \end{array} \right)$ であるから,

$$(\alpha - \gamma + 1)F(\alpha) = ((x^2 - x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1) \cdot F(\alpha + 1)$$

が成り立ち, 下降作用素 $B(\alpha + 1) = (x^2 - x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1$ が得られる.

ここまでの計算を Risa/Asir 上で実行すると以下のようなになる.

```
// プログラム
// 超幾何微分方程式に対応する微分作用素
def l(A,B,C)      {
    return x*(1-x)*dx^2+(C-(A+B+1)*x)*dx-A*B;
}

M = [[l(a,b,c), 0], [0, l(a+1,b,c)], [x*dx+a, a]];
// 左 D 加群 M の POT 順序についてのグレブナー基底計算
G = nd_weyl_gr(M, [x,dx], 0, [1,0]);
print(G);
end$
```

(計算結果)

```
[[0, (-x^2+x)*dx^2+((-a-b-2)*x+c)*dx-b*a-b], [a-c+1, (x^2-x)*dx+b*x+a-c+1]]
```

2 変数超幾何関数として知られているものとして Horn 超幾何関数 [3] があり, リスト

$$F_1, F_2, F_3, F_4, G_1, G_2, G_3, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7$$

(収束領域が有界なもの) が知られている. アルゴリズム 1 を用いることで隣接作用素を求めることができる. ただし, H_3, H_6, G_3 については, 級数から得られる微分方程式系だけでは計算ができない. これは関数を定める微分方程式系が足りないことによる. そこで関数が満たす A -超幾何系から, 微分方程式をいくつか追加することで隣接作用素を得ることができる.

$$H_3(a, b, c; x, y) = \sum_{m,n} \frac{(a, 2m+n)(b, n)}{(c, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n$$

$$H_6(a, b, c; x, y) = \sum_{m,n} \frac{(a, 2m-n)(b, n-m)(c, n)}{(1, m)(1, n)} x^m y^n$$

$$G_3(a, a'; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a, 2n-m)(a', 2m-n)}{(1, m)(1, n)} x^m y^n$$

例 2 (Horn 2 変数超幾何関数 H_6)

Horn 2 変数超幾何関数 H_6

$$H_6(a, b, c; x, y) = \sum_{m,n} \frac{(a, 2m-n)(b, n-m)(c, n)}{(1, m)(1, n)} x^m y^n$$

の隣接作用素を求める. H_6 の満たす微分方程式系は, 級数から

$$P_1 = -x^2(4x+1)\partial_x^2 + xy(4x+1)\partial_x\partial_y - xy^2\partial_y^2 - x((4a+6)x-b+1)\partial_x + 2axy\partial_y - a(a+1)x,$$

$$P_2 = xy(y+2)\partial_x\partial_y - y^2(y+1)\partial_y^2 + cxy\partial_x - y((b+c+1)y-a+1)\partial_y - bcy$$

と求められる。しかし、この微分作用素だけでは自明でない隣接作用素は求められない。さらに H_6 の満たす A -超幾何系から、そのトーリックイデアルに対応する作用素を追加することで、次の元たちで生成される左 D イデアル I が得られる。

$$\begin{aligned} & -x(y+2)\partial_x\partial_y + y(y+1)\partial_y^2 - cx\partial_x + ((b+c+1)y - a + 1)\partial_y + bc, \\ & x(4x+1)\partial_x^2 - y(4x+1)\partial_x\partial_y + y^2\partial_y^2 + ((4a+6)x - b + 1)\partial_x - 2ay\partial_y + a(a+1), \\ & (2xy-1)\partial_x\partial_y - y^2\partial_y^2 + 2cx\partial_x + (a-c-1)y\partial_y + ac \end{aligned}$$

この左 D イデアル I を H_6 を零化する作用素たちとして、アルゴリズム 1 を適用する。

H_6 の a についての上昇作用素 (自明な作用素) $H(a)$ は

$$H(a) \cdot H_6(a) = aH_6(a+1)$$

$$H(a) = 2x\partial_x - y\partial_y + a$$

である (級数から容易にわかる)。下降作用素 (非自明な作用素) $B(a+1)$ はアルゴリズム 1 により

$$B(a+1) \cdot H_6(a+1) = C(a, b, c)H_6(a)$$

と求められる。ここで、

$$\begin{aligned} B(a+1) &= -b(4x+1)(cxy + a + b)\partial_x \\ &\quad - by(((a+2b-c+1)y^2 - 2cy)x + (-2a-3b-1)y - 3a-4b-1)\partial_y \\ &\quad - b(((ac+2bc-c^2+c)y^2 + 2acy)x + (-2ac-3bc-c)y + 4a^2 + (8b+2)a + 4b^2 + 2b) \\ C(a, b, c) &= (a+b)(a+c)(a+2b) \end{aligned}$$

である。

参 考 文 献

- [1] Cox, D., Little, J., O'Shea, D., *Using Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1998.
- [2] Erdélyi, A. et al., *Higher Transcendental Functions*, MacGraw-Hill, New York, 1953.
- [3] Horn, J., Über die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen, *Math. Ann.*, **34** (1889), 544–600.
- [4] Horn, J., Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen, *Math. Ann.*, **105** (1931), 381–407.
- [5] Kimura, T., Hypergeometric functions of two variables, Seminar Note Series of Univ. Tokyo, 1972.
- [6] 中山洋将, 加群のグレブナー基底による隣接作用素の計算, *数式処理* 30(2) 3-8, 2024
- [7] Oaku, T., Algorithms for the b -function and D -modules associated with a polynomial, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 117&118 (1997), 495–518.
- [8] Takayama, N., Groebner basis and the problem of contiguous relations, *Japan J. Appl. Math.* 6, 147–160 (1989).