包括的グレブナー基底系計算アルゴリズムを利用した包括的グレブナー基底の構成と比較

On algorithms for computing comprehensive Gröbner bases using several stability conditions

東京理科大学大学院理学研究科応用数学専攻　横尾卓磨 *1
Takuma Yokoo
Graduate School of Science, Tokyo University of Science

東京理科大学理学部第一部応用数学科　鍋島克輔 *2
Katsusuke Nabeshima
Department of Applied Mathematics, Tokyo University of Science

Abstract

Algorithms for computing comprehensive Gröbner bases are presented based on several stability conditions of Gr"obner bases in symbolic computation. The algorithms have been implemented in the computer algebra system Risa/Asir, and benchmark results are reported.

1　はじめに

パラメータを含む多項式イデアルのグレブナー基底として，包括的グレブナー基底系（Comprehensive Gröbner system）と包括的グレブナー基底（Comprehensive Gröbner basis）の 2 種類が存在する．包括的グレブナー基底系については，V. Weispfenning [10] がその概念を導入した後，Suzuki–Sato，Montes，Kapur–Sun–Wang，Nabeshima [9, 2, 6] などにより効率的な計算法が提案されるとともに，理論･計算･応用を含めた多くの研究がなされている．しかしながら，包括的グレブナー基底に関する研究は，Kapur–Sun–Wang [3] や Kapur–Yiming [4] などに見ることができるものの，包括的グレブナー基底系に比べてその数は少ない．

グレブナー基底の安定条件を用いて包括的グレブナー基底を構成する方法として，Suzuki–Sato および Kapur–Sun–Wang による計算法が存在する [9, 3]．現在，論文 [9, 3] で扱われているグレブナー基底の安定条件以外にも他の安定条件が知られており，本稿ではまず，これらの安定条件を包括的グレブナー基底を計算できる形に一般化する．次に，得られたいくつかのアルゴリズムを計算機代数システム Risa/Asir に実装し，計算比較を行う．

本稿の構成は次のとおりである．第 2 節では，本稿で使用する記号および定義を紹介し，第 3 節では先行研究を復習する．第 4 節において主結果を述べ，第 5 節では先行研究で知られているアルゴリズムと新たに得られたアルゴリズムとの計算比較を行う．

*1 〒 162-8601 新宿区神楽坂 1-3　E-mail: 1424531@ed.tus.ac.jp
*2 〒 162-8601 新宿区神楽坂 1-3　E-mail: nabeshima@rs.tus.ac.jp

2　準備

ここでは，本稿で使用する基礎的な記号および定義を紹介する．K を体とし，L を K を含む代数的閉体とする．$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ を変数集合，$U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ をパラメータ集合とし，$X \cap U \neq \emptyset$ とする．X に項順序を設定する．このとき，多項式 $f \in K[U][X]$ に対して，$\mathrm{lt}(f), \mathrm{lm}(f), \mathrm{lc}(f)$ を f の先頭項，先頭単項，先頭係数とする．つまり，$\mathrm{lm}(f) = \mathrm{lc}(f)\mathrm{lt}(f)$ である．また，$F \subset K[U][X]$ に対し，$\mathrm{lt}(F) = \{\mathrm{lt}(f) | f \in F\}, \mathrm{lm}(F) = \{\mathrm{lm}(f) | f \in F\}, \mathrm{lc}(F) = \{\mathrm{lc}(f) | f \in F\}$ である．多項式 $f_1, \ldots, f_l \in K[U]$ に対して，$f_1, \ldots, f_l$ で定義されるアフィン多様体を $\mathbb{V}(f_1, \ldots, f_l)$ と定義する．つまり，$\mathbb{V}(f_1, \ldots, f_l) = \{\bar{a} \in L^m \mid f_1(\bar{a}) = \cdots = f_l(\bar{a}) = 0\}$ である．また $\mathbb{V}(1) = \emptyset$ とする．任意の元 $\bar{a} \in L^m$ に対して，特化準同型写像 (specialization homomorphism) $\sigma_{\bar{a}} : K \to L$ $(f \to f(\bar{a}))$ を定義する．この写像は自然な拡張として $\sigma_{\bar{a}} : K[X] \to L[X]$ と考えることもできる．また，$K[X]$ のイデアル I と J に対し，I と J のイデアル商は $I : J = \{f \in K[X] \mid fJ \subset I\}$ である．本稿での包括的グレブナー基底系の定義は次とする．

定義 1 (包括的グレブナー基底系)
$E_1, \ldots, E_l, N_1, \ldots, N_l$ を $K[U]$ の有限部分集合，$G_1, \ldots, G_l$ を $K[U][X]$ の有限部分集合とし，$\succ$ を X 上の項順序とする．このとき，F の有限部分集合 $\mathcal{G} = \{(E_1, N_1, G_1), \ldots, (E_l, N_l, G_l)\}$ が $\langle F \rangle$ の $\succ$ に関する $\bigcup_{i=1}^{l}(\mathbb{V}(E_i) \setminus \mathbb{V}(N_i))$ 上の包括的グレブナー基底系であるとは，以下を満たすときである．

(1) 各 $i \in \{1, \ldots, l\}$ に対し，$\mathbb{V}(E_i) \setminus \mathbb{V}(N_i) \neq \emptyset$,

(2) $i \neq j$ に対し，$(\mathbb{V}(E_i) \setminus \mathbb{V}(N_i)) \cap (\mathbb{V}(E_j) \setminus \mathbb{V}(N_j)) = \emptyset$,

(3) 任意の $\bar{a} \in \mathbb{V}(E_i) \setminus \mathbb{V}(N_i)$ に対し，$\mathrm{lt}(G_i) = \mathrm{lt}(\sigma_{\bar{a}}(G_i))$,

(4) 任意の $\bar{a} \in \mathbb{V}(E_i) \setminus \mathbb{V}(N_i)$ に対し，$\langle \sigma_{\bar{a}}(F) \rangle$ がゼロイデアルでないなら $\sigma_{\bar{a}}(G_i)$ は $L[X]$ 上で $\succ$ に関する $\langle \sigma_{\bar{a}}(F) \rangle$ の極小グレブナー基底であり，そうでないなら $\{\sigma_{\bar{a}}(G_i)\} = \{\sigma_{\bar{a}}(F)\} = \{0\}$

このとき，(E_i, N_i, G_i) をセグメントといい，$\bigcup_{i=1}^{l}(\mathbb{V}(E_i) \setminus \mathbb{V}(N_i)) = L^m$ なら単に $\mathcal{G}$ を $\langle F \rangle$ の $\succ$ に関する包括的グレブナー基底系という．

包括的グレブナー基底系は X を変数，U をパラメータとすると，パラメータの条件 $\mathbb{V}(E_i) \setminus \mathbb{V}(N_i)$ を満たす値に対して $\langle F \rangle$ のグレブナー基底 G_i を与えると解釈することができる．これより，包括的グレブナー基底系はパラメータ付きグレブナー基底と考えることができる．

定義 2 (包括的グレブナー基底)
$S \subset L^m, \succ$ を X 上の項順序とする．また，F, G を $G \subset \langle F \rangle$ を満たす $K[U][X]$ の有限部分集合とする．このとき，任意の $\bar{a} \in S$ に対し，$\sigma_{\bar{a}}(G)$ が $\langle \sigma_{\bar{a}}(F) \rangle$ の $\succ$ に関する $L[X]$ 上でグレブナー基底となるならば，G を $\langle F \rangle$ の $\succ$ に関する S 上の包括的グレブナー基底という．特に $S = L^m$ のときは，単に G を $\langle F \rangle$ の $\succ$ に関する包括的グレブナー基底という．

X を変数，U をパラメータとみなしたとき，包括的グレブナー基底系と同様に，この包括的グレブナー基底はパラメータ付きグレブナー基底と考えることができる．包括的グレブナー基底系は，パラメータの条件を『明示する』と共に，そのグレブナー基底はいつでも極小グレブナー基底という特徴をもつ．対して，包括的グレブナー基底は，パラメータの条件は明示せず，単に多項式の集合であり，どのような値をパラメータに代入したとしてもいつでもグレブナー基底となるものである．このとき，代入された多項式の集合は定義 2.1 の (3),(4) は満たさない．次に，包括的グレブナー基底を計算するうえで重要な概念である fathful 性について紹介する．

定義 3 (faithful)
X 上に項順序を設定する．F を $K[U][X]$ の有限部分集合とし，$E_1,\dots,E_l$, $N_1,\dots,N_l$ を $K[U]$ の有限部分集合，$G_1,\dots,G_l$ を $K[U][X]$ の有限部分集合とする．$\mathcal{G}=\{(E_1,N_1,G_1),\dots,(E_l,N_l,G_l)\}$ を $\langle F\rangle$ の $\succ$ に関する包括的グレブナー基底系としたとき，各 i（$1\le i\le l$）に対して $G_i\subset\langle F\rangle\subset K[U][X]$ が成り立つならば，$\mathcal{G}$ を $\langle F\rangle$ の faithful な包括的グレブナー基底系と呼ぶ.

定義 3 より，faithful な包括的グレブナー基底系 $\{(E_1,N_1,G_1),\dots,(E_l,N_l,G_l)\}$ を得ることができれば，$\bigcup_{i=1}^{l}(G_i)$ が $\bigcup_{i=1}^{l}(\mathbb{V}(E_i)\setminus\mathbb{V}(N_i))$ 上の包括的グレブナー基底となることはグレブナー基底の定義と faithful 性から明らかである．包括的グレブナー基底を得るには，faithful な包括的グレブナー基底系を計算すればよいことになる．次に第 3 節で用いる極大独立集合について定義する．

3 先行研究

ここでは，包括的グレブナー基底系の計算結果から包括的グレブナー基底を構成する代表的な先行研究を紹介する．まず，Kapur-Sun-Wang(2010) による結果は，パラメータ空間の各領域においてグレブナー基底となる元の選択方法を示したものである．

ここでは，$f\in K[U]$ において，$\sqrt{f}$ は f の無平方な多項式を意味する．

定理 4 (Kapur-Sun-Wang (2010)[2])
F を $K[U][X]$ の有限部分集合とし，E を $K[U]$ の有限部分集合とする。また，$\succ$ を X 上の項順序とし，G を $K[U][X]$ における $\langle F\cup E\rangle$ のグレブナー基底とする．さらに，$G_b=G\setminus(G\cap\langle E\rangle)$ とおき、$G_b\neq\emptyset$ と仮定する．G_b の先頭項が生成するイデアル $\langle \mathrm{lt}(G_b)\rangle$ の極小基底を $\{w_1,\dots,w_l\}$ とする。各 $i=1,\dots,l$ に対して、$G_{w_i}=\{g\in G_b\mid \mathrm{lt}(g)=w_i\}$ と定め，G_{w_i} から 1 つずつ元を取り $G'=\{g_1,\dots,g_l\}$ $(g_i\in G_{w_i}(1\le i\le l))$ とおく.

このとき，任意の $\bar{a}\in\mathbb{V}(E)\setminus\mathbb{V}\left(\sqrt{\prod_{i=1}^{l}\mathrm{lc}(g_i)}\right)$ に対し，$\sigma_{\bar{a}}(G')$ は $L[X]$ 上で $\succ$ に関する $\langle\sigma_{\bar{a}}(F)\rangle$ の極小グレブナー基底となる.

定理 6 で得られるグレブナー基底 G_i は必ずしも $\langle F\rangle$ に属するとは限らないので，faithful な包括的グレブナー基底系を直接得ることはできない．定理 6 を適用することにより包括的グレブナー基底系を計算するアルゴリズム 1 を構成することができる.

アルゴリズム 1 **(Kapur-Sun-Wang (2010))**

Specification: CGSMain$(E,N,F,\succ)$
入力: $F:K[U][X]$ の有限部分集合，$E:K[U]$ の有限部分集合，$N:K[U]$ の多項式，$\succ:X$ の項順序，ただし $\mathbb{V}(E)\setminus\mathbb{V}(N)\neq\emptyset$ とする。
出力: CGS:$\langle F\rangle$ の $\succ$ に関する $\mathbb{V}(E)\setminus\mathbb{V}(N)$ 上の包括的グレブナー基底系
BEGIN
$G\leftarrow\langle F\cup E\rangle\subset K[U][X]$ の $\succ$ に関する簡約グレブナー基底;
$G\leftarrow G\setminus(G\cap\langle E\rangle)$;
if $g=1$ となる $g\in G$ が存在する **then**
  return $\{(E,N,G)\}$;
else-if $G=\emptyset$ **then**
  return $\{(E,N,\{0\})\}$;
end-if

$CGS \leftarrow \emptyset$;
$\{w_1, \ldots, w_l\} \leftarrow \langle \mathrm{lt}(G) \rangle$ の極小基底;
for $i = 1, \ldots, l$ **do**
  $G_{w_i} \leftarrow \{g \in G \mid \mathrm{lt}(g) = w_i\}$;
  $g_i \leftarrow G_{w_i}$ から元を一つ選択;
end-for
$G' \leftarrow \{g_1, \ldots, g_l\}$;
$h \leftarrow \sqrt{\prod_{i=1}^{l} \mathrm{lc}(g_i)}$; $\{h_1, \ldots, h_k\} \leftarrow h$ の既約因子;
if $\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N \times h) \neq \emptyset$ **then**
  $CGS \leftarrow CGS \cup \{(E, N \times h, G')\}$;
end-if
for $i = 1, \ldots, k$ **do**
  if $\mathbb{V}(E \cup \{h_i\}) \setminus \mathbb{V}(N) \neq \emptyset$ **then**
    $CGS \leftarrow CGS \cup \mathrm{CGSMain}(E \cup \{h_i\}, N, F, \succ)$;
  end-if
  $N \leftarrow N \times h_i$;
end-for
return CGS;
END

ここで紹介したアルゴリズム 1 は，アルゴリズムの簡潔性を重視し，最適なテクニックは排除していることを注意しておく．計算機上に実装する場合には様々な最適化のテクニックを利用するべきである．最適化のテクニックに関しては論文 [5] に書かれている．

次の定理は，定理 6 による結果を基にし faithful 性を考慮したものである．

定理 5
X 上の項順序を $\succ$ とする。F を $K[U][X]$ の有限部分集合，E を $K[U]$ の有限部分集合とし
$M = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, f \in F \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} e \\ -e \end{pmatrix} \,\middle|\, e \in E \right\} \subset (K[U][X])^2$ とする．G を $\langle M \rangle$ の $\succ$ を含む POT に関するグレブナー基底とする．$G^{1st} = \left\{ g \,\middle|\, \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G \right\}, G_r = G^{1st} \cap \langle E \rangle, \langle \mathrm{lt}(G^{1st} \setminus G_r) \rangle \subset K[U][X]$ の極小基底を $\{w_1, \ldots, w_l\}$ とし
$G_{w_i} = \left\{ \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \,\middle|\, \mathrm{lt}(g) = w_i,\ \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G \right\}$ とする．各 i（$1 \leq i \leq l$）に対し、G_{w_i} から 1 つずつ元を選び，その集合を $H = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l\}$ $(\mathbf{v}_i \in G_{w_i}\ (1 \leq i \leq l))$ とする．

このとき，任意の $\bar{a} \in \mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}\left(\sqrt{\prod_{i=1}^{l} \mathrm{lc}(\mathbf{v}_i)}\right)$ に対して，次が成り立つ：

(1) 各 $\begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in H$ に対し，$g + \bar{g} \in \langle F \rangle$ かつ $\sigma_{\bar{a}}(\bar{g}) = 0$,

(2) $\left\{ \sigma_{\bar{a}}(g + \bar{g}) \,\middle|\, \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in H \right\}$ は $\langle \sigma_{\bar{a}}(F) \rangle$ の $\succ$ に関するグレブナー基底となる．

$\begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G$ は，$\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ $(f \in F)$ および $\begin{pmatrix} e \\ -e \end{pmatrix}$ $(e \in E)$ から生成される加群 $\langle M \rangle$ の元である．したがって，

$$\begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} = \sum_{f \in F} p_f \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{e \in E} q_e \begin{pmatrix} e \\ -e \end{pmatrix} \quad (p_f, q_e \in K[U][X])$$

と表せる．このとき，

$$g + \bar{g} = \sum_{f \in F} p_f f \in \langle F \rangle$$

が成り立つ．

以上より，定理 7 によって構成される集合 $\left\{ g + \bar{g} \middle| \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in H \right\}$ は，$\langle F \rangle$ に属する．したがって，この方法によって得られるグレブナー基底は faithful である．

さらに，任意の $\bar{a} \in \mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}\left(\sqrt{\prod_{i=1}^{l} \mathrm{lc}(v_i)}\right)$ に対して，

$$\left\{ \sigma_{\bar{a}}(g + \bar{g}) \middle| \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in H \right\}$$

は $\langle \sigma_{\bar{a}}(F) \rangle$ の $\succ$ に関するグレブナー基底を与える．このことから，定理 7 は包括的グレブナー基底を構成するための理論的基盤を与える結果であるといえる．

次では，定理 7 の具体的な適用例を示す．

例 1

x, y を変数，a, b をパラメータとする。$E = \{a\}, N = 1, F = \{ax^3 + bx^2 + y, x^2 + xy^2\}$ とする。$\succ$ を $x \succ y$ となる全次数辞書式順序とする．$M = \left\{ \begin{pmatrix} ax^3 + bx^2 + y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 + xy^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} \right\}$ とし $\langle M \rangle$ の POT に関するグレブナー基底 G は以下である：

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -axy - ay^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ ax^2 + axy^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -a^2x^3 - abx^2 - ay \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} bx^2 + y \\ ax^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -xy - y^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 + xy^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

G の第一成分からなる集合は $G^{1st} = \{a, bx^2 + y, -xy - y^3, x^2 + xy^2\}$ である．G^{1st} のうち $\langle E \rangle$ に属するものの集合は $G_r = \{a\}$ である．$\langle \mathrm{lt}(G^{1st} \setminus G_r) \rangle$ の極小基底は $\{w_1, w_2, w_3\} = \{x^2, y^3, xy^2\}$ である．G の第一成分の先頭項が x^2, y^3, xy^2 であるような G の元の集合は

$$G_{x^2} = \left\{ \begin{pmatrix} bx^2 + y \\ ax^3 \end{pmatrix} \right\}, G_{y^3} = \left\{ \begin{pmatrix} -xy - y^3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, G_{xy^2} = \left\{ \begin{pmatrix} x^2 + xy^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

である。各 $i (1 \leq i \leq 3)$ に対して G_{w_i} から 1 つずつ元を選んだ集合は

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x^2 + xy^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -xy - y^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} bx^2 + y \\ ax^3 \end{pmatrix} \right\}$$

である．このとき $\left\{ g + \bar{g} \middle| \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in H \right\} = \{ax^3 + bx^2 + y, -xy - y^3, x^2 + xy^2\} \subset \langle F \rangle$ であり、任意の $\bar{a} \in \mathbb{V}(a) \setminus \mathbb{V}(b)$ に対し、$\sigma_{\bar{a}}(\{ax^3 + bx^2 + y, -xy - y^3, x^2 + xy^2\}) = \{bx^2 + y, -xy - y^3, x^2 + xy^2\}$ は $\langle \sigma_{\bar{a}}(F) \rangle$ の $\succ$ に関するグレブナー基底となる．

この定理を用いることにより faithful な包括的グレブナー基底系を次のアルゴリズム 2 のように得ることができる.

アルゴリズム 2 **(Kapur-Sun-Wang (2013))**

Specification: CGSMainMod$(E, N, F, \succ)$

入力: $F : K[U][X]$ の有限部分集合，$E : K[U]$ の有限部分集合，$N : K[U]$ の多項式，$\succ : X$ の項順序、ただし $\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N) \neq \emptyset$ とする。

出力: CGS:$\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N)$ 上の $\langle F \rangle$ の $\succ$ に関する faithful な包括的グレブナー基底

BEGIN

$G \leftarrow \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \middle| f \in F \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} e \\ -e \end{pmatrix} \middle| e \in E \right\} \right\rangle$ の POT に関する簡約グレブナー基底;

$G \leftarrow G \setminus \left(\left\{ \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G \middle| g = 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G \middle| g \in \langle E \rangle \right\} \right)$; $G^{1st} \leftarrow \left\{ g \middle| \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G \right\}$;

if $g = 1$ となる $\begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G$ が存在する **then**

  return $\{(E, N, G^{1st})\}$;

else-if $G = \emptyset$ **then**

  return $\emptyset$; (*1)

end-if

$CGS \leftarrow \emptyset$;

$\{w_1, \ldots, w_l\} \leftarrow \langle \mathrm{lt}(G^{1st}) \rangle$ の極小基底;

for $i = 1, \ldots, l$ **do**

  $G_{w_i} \leftarrow \left\{ \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G, \mathrm{lt}(g) = w_i \right\}$;

  $v_i \leftarrow G_{w_i}$ から元を一つ選択;

end-for

$G' \leftarrow \{v_1, \ldots, v_l\}$;

$h \leftarrow \sqrt{\prod_{i=1}^{l} \mathrm{lc}(v_i)}$; $\{h_1, \ldots, h_k\} \leftarrow h$ の既約因子;

if $\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N \times h) \neq \emptyset$ **then**

  $CGS \leftarrow CGS \cup \left\{ \left(E, N \times h, \left\{ g + \bar{g} \middle| \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G' \right\} \right) \right\}$;

end-if

for $i = 1, \ldots, k$ **do**

  if $\mathbb{V}(E \cup \{h_i\}) \setminus \mathbb{V}(N) \neq \emptyset$ **then**

    $CGS \leftarrow CGS \cup$ CGSMainMod$(E \cup \{h_i\}, N, F, \succ)$;

  end-if

  $N \leftarrow N \times h_i$;

end-for

return CGS;

END

(*1) においては，任意の $\bar{a} \in \mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N)$ において $G_{\bar{a}}(F) = \{0\}$ となる．$\{(E, N, F)\}$ を return してもよいが，包括的グレブナー基底計算においては無意味なので $\emptyset$ とした.

例 2
例 1 を再び考える．$b=0$ の場合を扱うため $E=\{a,b\}$ とする．同様に計算すると，
$\left\{g+\bar{g} \mid \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in H\right\} = \{-ax^3-bx^2-y, ax^4y+bx^3y-x^2\} \subset \langle F\rangle$ を得る．従って任意の $\bar{a} \in \mathbb{V}(a,b) \backslash \mathbb{V}(1)$ に対し，$\sigma_{\bar{a}}(\{-ax^3-bx^2-y, ax^4y+bx^3y-x^2\})$ は $\langle\sigma_{\bar{a}}(F)\rangle$ の $\succ$ に関するグレブナー基底となる．
　以上より，$\mathbb{V}(a)$ 上の分割は $\mathbb{V}(a) \setminus \mathbb{V}(b)$ と $\mathbb{V}(a) \cap \mathbb{V}(b)$ の 2 つである．$E=\{a\}$ と $E=\{a,b\}$ のときのグレブナー基底の和集合は $\{ax^3+bx^2+y, -xy-y^3, x^2+xy^2, ax^4y+bx^3y-x^2\}$ であり，これが包括的グレブナー基底である．

　包括的グレブナー基底の計算は，定理 7 の繰り返しとして理解できる．

(1) あるパラメータ条件のもとで $\langle F\rangle$ のグレブナー基底を計算し，その先頭項イデアルの極小基底に対応する多項式の集合を取り出す．

(2) それらの多項式の先頭係数が 0 になるか否かによってパラメータ空間を有限個の領域に分割し，各領域において改めてグレブナー基底を計算する．

(3) (1)〜(2) を繰り返すと，各領域で $\langle\sigma_{\bar{a}}(F)\rangle$ のグレブナー基底を与える多項式集合が得られる．

最終的に得られたこれらの多項式集合の和が，$\langle F\rangle$ の包括的グレブナー基底を与える．
　定理 7 以外にも包括的グレブナー基底系を計算する戦略は存在する．

定理 6 (鍋島 (2012)[6])
F を $K[U][X]$ の有限部分集合、E を $K[U]$ の有限部分集合とし，$\succ$ を X の項順序とする．また，G を $\langle F \cup E\rangle$ の $K[U][X]$ における $\succ$ に関するグレブナー基底とする．さらに，$G_b = G \setminus (G \cap \langle E\rangle)$ とし，$G_b \neq \emptyset$ と仮定する．$\langle \mathrm{lt}(G_b)\rangle$ の極小基底を $\{w_1,\dots,w_l\}$ とし各 $i (1 \le i \le l)$ に対し，$G_{w_i} = \{g \in G \mid \mathrm{lt}(g) = w_i\}$ とする．このとき，任意の $\bar{a} \in \mathbb{V}(E) \setminus \bigcup_{i=1}^{l} \mathbb{V}(\mathrm{lc}(G_{w_i}))$ に対し，$\sigma_{\bar{a}}(G_{w_1} \cup \cdots \cup G_{w_l})$ は $L[X]$ 上で項順序 $\succ$ に関する $\langle\sigma_{\bar{a}}(F)\rangle$ のグレブナー基底となる．

　$g \in K(u)[X]$ とする．このとき g のすべての項の分母の最小公倍元を $\mathrm{dlcm}(g)$ と表すことにする．

定理 7 (鍋島 (2024)[7])
F を $K[U][X]$ の有限部分集合，E を $K[U]$ の有限部分集合とし，$\succ$ を X の項順序とする．また，u を U に属する $\langle E\rangle$ を法とした極大独立集合とする．B を $(K(u)[U \setminus u])[X]$ 上の $\langle F \cup E\rangle$ の $\succ$ に関するグレブナー基底とし，$G = \{\mathrm{dlcm}(g)\, g \mid g \in B\}, G_b = G \setminus (G \cap \langle E\rangle)$, $G_b \neq \emptyset$ と仮定する．$\langle \mathrm{lt}(G_b)\rangle$ の極小基底を $\{w_1,\dots,w_l\}$ とし，各 $i(1 \le i \le l)$ に対し，$G_{w_i} = \{g \in G \mid \mathrm{lt}(g) = w_i\}$ とする．G_{w_i} から元 g_i を取り，$G' = \{g_1,\dots,g_l\}$ $(g_i \in G_{w_i} (1 \le i \le l))$ とし $G_D = \{\mathrm{dlcm}(g)\, g \mid g \in G'\}$ とする．さらに，$\langle F \cup E\rangle : \langle G\rangle$ のブロック項順序 $(X \gg U \setminus u \gg u)$ に関する簡約グレブナー基底を S とする．このとき次が成り立つ．

(1) $S \cap K[u] \neq \emptyset$,

(2) 任意の $\bar{a} \in \mathbb{V}(E) \setminus \big(\mathbb{V}(S \cap K[u]) \cup \mathbb{V}(h)\big)$ に対して，$\sigma_{\bar{a}}(G')$ は $\langle\sigma_{\bar{a}}(F)\rangle$ の極小グレブナー基底である．ここで $h = \sqrt{\prod_{g \in G_D} \mathrm{lc}(g)}$ である．

4　主結果

　ここでは，包括的グレブナー基底の新たな計算法を紹介する．包括的グレブナー基底系計算において，論文 [6],[7] で紹介された安定条件を一般化することで，包括的グレブナー基底計算アルゴリズムをいくつか

構成する．次の定理 10 では，specialization を考えるパラメータ領域における「非零条件」の与え方が，これまでと異なっている．

定理 8
F を $K[U][X]$ の有限部分集合，E を $K[U]$ の有限部分集合とし，$\succ$ を X の項順序とする．
$M = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \middle| f \in F \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} e \\ -e \end{pmatrix} \middle| e \in E \right\} \subset (K[U][X])^2$, 加群 $\langle M \rangle$ の $\succ$ を含む POT に関するグレブナー基底を G とする．また $G^{1st} = \left\{ g \middle| \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G \right\}$, $G_r = G^{1st} \cap \langle E \rangle$, $\langle \mathrm{lt}(G^{1st} \setminus G_r) \rangle$ の極小基底を $\{w_1, \ldots, w_l\}$, $G_{w_i} = \left\{ \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \middle| \mathrm{lt}(g) = w_i, \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G \right\}$, $H = \bigcup_{i=1}^{l} G_{w_i}$ とする．このとき，任意の $\bar{a} \in \mathbb{V}(E) \setminus \bigcup_{i=1}^{l} \mathbb{V}(\mathrm{lc}(G_{w_i}))$ において，次が成り立つ：

(1) 各 $\begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in H$ に対し，$g + \bar{g} \in \langle F \rangle$ かつ $\sigma_{\bar{a}}(\bar{g}) = 0$,

(2) $\left\{ \sigma_{\bar{a}}(g + \bar{g}) \middle| \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in H \right\}$ は $\langle \sigma_{\bar{a}}(F) \rangle$ の $\succ$ に関するグレブナー基底となる．

証明
(1) 任意の $\begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in H \subset \langle M \rangle$ に対し，ある $p_f, q_e \in K[U][X]$ が存在して

$$\begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} = \sum_{f \in F} p_f \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{e \in E} q_e \begin{pmatrix} e \\ -e \end{pmatrix}$$

と表せる．成分ごとに見ると

$$g = \sum_{f \in F} p_f f + \sum_{e \in E} q_e e, \qquad \bar{g} = -\sum_{e \in E} q_e e \tag{i}$$

であるから

$$g + \bar{g} = \sum_{f \in F} p_f f \in \langle F \rangle$$

が従う．
次に $\sigma_{\bar{a}}(\bar{g}) = 0$ を示す．式 (i) より，$\bar{g} \in \langle E \rangle$ である．また仮定より $\bar{a} \in \mathbb{V}(E)$ であるから，任意の $e \in E$ に対し $\sigma_{\bar{a}}(e) = 0$ が成り立つ．したがって

$$\sigma_{\bar{a}}(\bar{g}) = -\sum_{e \in E} \sigma_{\bar{a}}(q_e)\, \sigma_{\bar{a}}(e) = 0$$

となる．
(2) G は POT 加群項順序でのグレブナー基底なので G^{1st} は $\langle F \cup E \rangle \subset K[U][X]$ の $\succ$ に関するグレブナー基底となる．(1) より任意の $\bar{a} \in \mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(\bigcup_{i=1}^{l} \mathrm{lc}(G))$, 任意の $\begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in H$ において $\sigma_{\bar{a}}(g + \bar{g}) = \sigma_{\bar{a}}(g)$ なので，定理 3.5 より $\left\{ \sigma_{\bar{a}}(g + \bar{g}) \mid \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in H \right\}$ は $\langle F \rangle$ の $\succ$ に関するグレブナー基底となる．

∎

定理 10 を用いることにより faithful な包括的グレブナー基底系を次のアルゴリズム 3 のように得ることができる．

アルゴリズム 3

Specification: CGSMainMod2$(E, N, F, \succ)$
入力: $F : K[U][X]$ の有限部分集合，$E : K[U]$ の有限部分集合，$N : K[U]$ の集合の集合，$\succ : X$ の項順序，ただし $\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N) \neq \emptyset$ とする．
出力: CGS:$\langle F \rangle$ の $\succ$ に関する $\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N)$ 上の faithful な包括的グレブナー基底系
BEGIN
$G \leftarrow \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \middle| f \in F \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} e \\ -e \end{pmatrix} \middle| e \in E \right\} \right\rangle$ の POT に関する簡約グレブナー基底;
$G \leftarrow G \setminus \left(\left\{ \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G \middle| g = 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G \middle| g \in \langle E \rangle \right\} \right)$; $G^{1st} \leftarrow \left\{ g \middle| \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G \right\}$;
if $g = 1$ となる $\begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G$ が存在する **then**
  return $\{(E, N, G^{1st})\}$;
else-if $G = \emptyset$ **then**
  return $\emptyset$;
end-if
$CGS \leftarrow \emptyset$;
$\{w_1, \ldots, w_l\} \leftarrow \langle \mathrm{lt}(G^{1st}) \rangle$ の極小基底;
for $i = 1, \ldots, l$ **do**
  $G_{w_i} \leftarrow \left\{ \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G, \mathrm{lt}(g) = w_i \right\}$;
end-for
if $\mathbb{V}(E) \setminus (\mathbb{V}(N) \cup \bigcup_{i=1}^{l} \mathbb{V}(\mathrm{lc}(G_{w_i}))) \neq \emptyset$ **then**
  $CGS \leftarrow CGS \cup \left\{ \left(E, N \cup \bigcup_{i=1}^{l} \mathrm{lc}(G_{w_i}), \left\{ g + \bar{g} \middle| \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in \bigcup_{i=1}^{l} G_{w_i} \right\} \right) \right\}$;
end-if
for $i = 1, \ldots, l$ **do**
  if $\mathbb{V}(E \cup \mathrm{lc}(G_{w_i})) \setminus \bigcup_{N' \in N} \mathbb{V}(N') \neq \emptyset$ **then**
    $CGS \leftarrow CGS \cup$ CGSMainMod2$(E \cup \mathrm{lc}(G_{w_i}), N, F, \succ)$
  end-if
  $N \leftarrow N \cup \{\{\mathrm{lc}(G_{w_i})\}\}$
end-for
return CGS;
END

次の定理は，定理 7 と定理 9 による包括的グレブナー基底系の計算戦略を拡張し，包括的グレブナー基底を構成できるようにしたものである．

定理 9
F を $K[U][X]$ の有限部分集合，E を $K[U]$ の有限部分集合とし，$\succ$ を X の項順序とする．また，u を U に

属する $\langle E\rangle$ を法とした極大独立集合とする．$M=\left\{\begin{pmatrix} f\\ 0\end{pmatrix}\middle|\ f\in F\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix} e\\ -e\end{pmatrix}\middle|\ e\in E\right\}\subset (K[U][X])^2$, 加群 $\langle M\rangle$ の $\succ$ を含む $((K(u)[U\setminus u])[X])^2$ 上の POT に関するグレブナー基底を G とする．また $G^{1st}=\left\{g\ \middle|\ \begin{pmatrix} g\\ \bar{g}\end{pmatrix}\in G\right\}, G_r=G^{1st}\cap\langle E\rangle, \langle \mathrm{lt}(G^{1st}\setminus G_r)\rangle$ の極小基底を $\{w_1,\dots,w_l\}$ とする．
$G_{w_i}=\left\{\begin{pmatrix} g\\ \bar{g}\end{pmatrix}\middle|\ \mathrm{lt}(g)=w_i,\ \begin{pmatrix} g\\ \bar{g}\end{pmatrix}\in G\right\}, H=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_l\}$ ($\mathbf{v}_i\in G_{w_i}$, $(1\le i\le l)$) とする．次に，$\langle M\rangle:\langle H\rangle\subset K[U][X]$ のブロック項順序 $(X\gg U\setminus u\gg u)$ に関する簡約グレブナー基底を S とする．このとき，次が成立する．

(1) $S\cap K[u]\neq\emptyset$,

(2) 各 $\bar{a}\in\mathbb{V}(E)\setminus\mathbb{V}(ph)$ に対して，$\left\{\sigma_{\bar{a}}(g+\bar{g})\ \middle|\ \begin{pmatrix} g\\ \bar{g}\end{pmatrix}\in H\right\}$ は $\langle\sigma_{\bar{a}}(F)\rangle$ の極小グレブナー基底である．ここで，$p\in S\cap K[u], h=\sqrt{\prod_{g\in H}\mathrm{lc}(g)}$ である．

この定理を用いることにより faithful な包括的グレブナー基底系を次のアルゴリズム 4 のように得ることができる．

アルゴリズム 4

Specification: NewCGSMainMod$(E,N,F,u,\succ)$
入力: $F:K[U][X]$ の有限部分集合，$E:K[U]$ の有限部分集合，$N:K[U]$ の多項式，$\succ:X$ の項順序，u:$K[U]$ における $\langle E\rangle$ を法とした極大独立集合，ただし $\mathbb{V}(E)\setminus\mathbb{V}(N)\neq\emptyset$ とする．
出力: CGS:$\langle F\rangle$ の $\succ$ に関する $\mathbb{V}(E)\setminus\mathbb{V}(N)$ 上の faithful な包括的グレブナー基底系
BEGIN
$G\leftarrow\left\langle\left\{\begin{pmatrix} f\\ 0\end{pmatrix}\middle| f\in F\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix} e\\ -e\end{pmatrix}\middle| e\in E\right\}\right\rangle$ のブロック項順序 $(\succ,\succ_{U\setminus u})$ を含む POT に関する簡約グレブナー基底;
$G\leftarrow G\setminus\left(\left\{\begin{pmatrix} g\\ \bar{g}\end{pmatrix}\in G\middle| g=0\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix} g\\ \bar{g}\end{pmatrix}\in G\middle| g\in\langle E\rangle\right\}\right)$; $G^{1st}\leftarrow\left\{g\middle|\begin{pmatrix} g\\ \bar{g}\end{pmatrix}\in G\right\}$;
if $g=1$ となる $\begin{pmatrix} g\\ \bar{g}\end{pmatrix}\in G$ が存在する **then**
　return $\{(E,N,G^{1st})\}$;
else-if $G=\emptyset$ **then**
　return $\emptyset$;
end-if
$CGS\leftarrow\emptyset$;
$S\leftarrow\langle F\cup E\rangle:\langle G\rangle$ のブロック項順序 $(\succ_X,\succ_U)$ に関する簡約グレブナー基底;
$r\leftarrow S\cap K[u]$ から元を一つ選択する;
$\{w_1,\dots,w_l\}\leftarrow\langle\mathrm{lt}(G^{1st})\rangle$ の極小基底;
for $i=1,\dots,l$ **do**
　$G_{w_i}\leftarrow\left\{\begin{pmatrix} g\\ \bar{g}\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} g\\ \bar{g}\end{pmatrix}\in G,\mathrm{lt}(g)=w_i\right\}$;
　$v_i\leftarrow G_{w_i}$ から元を一つ選択;
end-for
$G'\leftarrow\{v_1,\dots,v_l\}$;

$h \leftarrow \sqrt{r \times \prod_{i=1}^{l} \mathrm{lc}(v_i)}$; $\{h_1, \ldots, h_k\} \leftarrow h$ の既約因子;
if $\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N \times h) \neq \emptyset$ **then**
  $CGS \leftarrow CGS \cup \left\{ \left(E, N \times h, \left\{ g + \bar{g} \,\middle|\, \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G' \right\} \right) \right\}$;
end-if
for $i = 1, \ldots, k$ **do**
  $u' \leftarrow \langle E \cup \{h_i\} \rangle$ を法とした極大独立集合;
  if $u' \neq \emptyset$ **then**
    $CGB \leftarrow CGS \cup \mathrm{NewCGSMainMod}(E \cup \{h_i\}, N, F, u', \succ)$;
  else
    $CGS \leftarrow CGS \cup \mathrm{CGSMainMod}(E \cup \{h_i\}, N, F, \succ)$; /*アルゴリズム 2*/
  end-if
  $N \leftarrow N \times h_i$;
end-for
return CGS;
END

次の定理は，定理 9 と定理 10 による包括的グレブナー基底系の計算戦略を拡張し，包括的グレブナー基底を構成できるようにしたものである．

定理 10
F を $K[U][X]$ の有限部分集合，E を $K[U]$ の有限部分集合とし，$\succ$ を X の項順序とする．また，u を U に属する $\langle E \rangle$ を法とした極大独立集合とする．$M = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, f \in F \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} e \\ -e \end{pmatrix} \,\middle|\, e \in E \right\} \subset (K[U][X])^2$ とし加群 $\langle M \rangle$ の $((K(u)[U \setminus u])[X])^2$ 上の $\succ$ を含む POT に関するグレブナー基底を G とする．また $G^{1st} = \left\{ g \,\middle|\, \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G \right\}$, $G_r = G^{1st} \cap \langle E \rangle$, $\langle \mathrm{lt}(G^{1st} \setminus G_r) \rangle$ の極小基底を $\{w_1, \ldots, w_l\}$,
$G_{w_i} = \left\{ \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \,\middle|\, \mathrm{lt}(g) = w_i,\ \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G \right\}$, $H = \bigcup_{i=1}^{l} G_{w_i}$ とする．次に，$\langle M \rangle : \langle H \rangle \subset K[U][X]$ のブロック項順序 $(X \gg U \setminus u \gg u)$ に関する簡約グレブナー基底を S とする．
このとき，次が成立する．

(1) $S \cap K[u] \neq \emptyset$,

(2) 各 $\bar{a} \in \mathbb{V}(E) \setminus (\mathbb{V}(S \cap K[u]) \cup \bigcup_{i=1}^{l} \mathbb{V}(\mathrm{lc}(G_{w_i})))$ に対して，$\left\{ \sigma_{\bar{a}}(g + \bar{g}) \,\middle|\, \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in H \right\}$ は $\langle \sigma_{\bar{a}}(F) \rangle$ の極小グレブナー基底である．

この定理を用いることにより faithful な包括的グレブナー基底系を次のアルゴリズム 5 のように得ることができる．

アルゴリズム 5

Specification: NewCGSMainMod2$(E, N, F, u, \succ)$
入力: $F : K[U][X]$ の有限部分集合，$E : K[U]$ の有限部分集合，$N : K[U]$ の集合の集合，$\succ : X$ の項順序，u:$K[U]$ における $\langle E \rangle$ を法とした極大独立集合，ただし $\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N) \neq \emptyset$ とする．
出力: CGS:$\langle F \rangle$ の $\succ$ に関する $\mathbb{V}(E) \setminus \mathbb{V}(N)$ 上の faithful な包括的グレブナー基底系

BEGIN
$G \leftarrow \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \middle| f \in F \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} e \\ -e \end{pmatrix} \middle| e \in E \right\} \right\rangle$ のブロック項順序 $(\succ, \succ_{U \setminus u})$ を含む POT に関する簡約グレブナー基底;
$G \leftarrow G \setminus \left(\left\{ \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G \middle| g = 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G \middle| g \in \langle E \rangle \right\} \right)$; $G^{1st} \leftarrow \left\{ g \middle| \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G \right\}$;
if $g = 1$ となる $\begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G$ が存在する **then**
　return $\{(E, N, G^{1st})\}$;
else-if $G = \emptyset$ **then**
　return $\emptyset$;
end-if
$CGS \leftarrow \emptyset$;
$S \leftarrow \langle F \cup E \rangle : \langle G \rangle$ のブロック項順序 $(\succ_X, \succ_U)$ に関する簡約グレブナー基底;
$r \leftarrow S \cap K[u]$ から元を一つ選択する;
$\{w_1, \ldots, w_l\} \leftarrow \langle \mathrm{lt}(G^{1st}) \rangle$ の極小基底;
for $i = 1, \ldots, l$ **do**
　$G_{w_i} \leftarrow \left\{ \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in G, \mathrm{lt}(g) = w_i \right\}$;
end-for
if $\mathbb{V}(E) \setminus (\mathbb{V}(N) \cup \mathbb{V}(r) \cup \bigcup_{i=1}^{l} \mathbb{V}(\mathrm{lc}(G_{w_i}))) \neq \emptyset$ **then**
　$CGS \leftarrow CGS \cup \left\{ \left(E, N \cup r \cup \bigcup_{i=1}^{l} \mathrm{lc}(G_{w_i}), \left\{ g + \bar{g} \middle| \begin{pmatrix} g \\ \bar{g} \end{pmatrix} \in \bigcup_{i=1}^{l} G_{w_i} \right\} \right) \right\}$;
end-if
for $i = 1, \ldots, k$ **do**
　if $\mathbb{V}(E \cup \mathrm{lc}(G_{w_i})) \setminus \bigcup_{N' \in N} \mathbb{V}(N') \neq \emptyset$ **then**
　　$u' \leftarrow \langle E \cup \mathrm{lc}(G_{w_i}) \rangle$ を法とした極大独立集合;
　　if $u' \neq \emptyset$ **then**
　　　$CGB \leftarrow CGS \cup \mathrm{NewCGSMainMod2}(E \cup \mathrm{lc}(G_{w_i}), N, F, u', \succ)$;
　　else
　　　$CGS \leftarrow CGS \cup \mathrm{CGSMainMod2}(E \cup \mathrm{lc}(G_{w_i}), N, F, \succ)$;　/*アルゴリズム 4*/
　　end-if
　end-if
　$N \leftarrow N \cup \{\mathrm{lc}(G_{w_i})\}$;
end-for
return CGS;
END

5　比較

第 3 章および第 4 章で述べた先行研究および主結果について，Risa/Asir(Version 20250329) 上に実装を行い，計算時間および出力される基底の性質の観点から比較を行う．アルゴリズム 2〜5 を取り上げる．各手法について，同一の多項式集合 F、変数集合 $X = \{x, y, z\}$，パラメータ集合 $U = \{a, b, c, d\}$，項順序 $\succ$

を用い，Risa/Asir 上で包括的グレブナー基底系および包括的グレブナー基底の計算を行った．比較実験は，MacBook Pro（Apple M4 Pro，メモリ 24GB）上で実行した．表に示す計算時間は、アルゴリズム全体の実行時間を秒単位で測定したものである．表中の “> 1h” は，計算が 1 時間以内に終了しなかったことを表す．また，括弧内の数値は，計算過程で生成されたセグメント数を示している．

表 1：CGB アルゴリズムの出力時間 (sec,(segment 数))

Problem	アルゴリズム 2	アルゴリズム 3	アルゴリズム 4	アルゴリズム 5
F_1	>1h	0.1065(3)	>1h	>1h
F_2	588.4(12)	>1h	>1h	>1h
F_3	125.4(12)	>1h	>1h	0.0291(2)
F_4	17.53(6)	14.68(6)	>1h	>1h
F_5	14.56(6)	0.3069(6)	56.7(7)	>1h
F_6	18.76(6)	>1h	>1h	>1h
F_7	1.863(10)	1.768(10)	>1h	>1h
F_8	>1h	0.0135(5)	0.5273(12)	0.3788(6)
F_9	>1h	8.155(10)	>1h	10.62(5)
F_{10}	>1h	0.01431(6)	>1h	2.831(3)
F_{11}	11.01(27)	>1h	>1h	>1h

$F_1 = \{x^3 + bx^2y + ay^4, x^3y^2 + x^2y, 4x^5 - y + x^2y^4\}$
$F_2 = \{x^3y + ax^4 + bxz + 5y, x^2y + ax^3z^2 + y^4, 4x^5z + xy^6 + y^2 + bx^5z^2\}$
$F_3 = \{xy + ax + y^2z^4, axyz + 2bx + y^3z, xy^3z^4 + ax + y^3\}$
$F_4 = \{xyz + ax + y^2z^3, axy + bxz + y^3z^2, xy^2z^4 + abx + y^3\}$
$F_5 = \{xy + x + ay^2z^4, axyz + bx + y^3z, xy^3z^4 + ax + y^3\}$
$F_6 = \{(x + ay)(z + b) - 1, xz + y^2 - a, ax^3 - bx + yz\}$
$F_7 = \{x^2y + y^2 + az - b^2z, bx + cy^2z - ay + 3z, cxz^2 + ay^2 - 2yz\}$
$F_8 = \{ax^2y^2 + ay + by, x^2y + xy + 2x, ax^2 + by + 2x\}$
$F_9 = \{ax^3y + cxz^2, x^4y + 3dy + z, cx^2 + bxy, x^2y^2 + x^2, x^5 + y^5\}$
$F_{10} = \{dx^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d, 4dx^3 + 3ax^2 + 2bx + c\}$
$F_{11} = \{ax^3 + bxy - z, bx^2 + cy + z, (x - z)^2 + y^2\}$

表 1 より，多項式集合 $F_1, F_7, F_8, F_9, F_{10}$ において，アルゴリズム 3 はアルゴリズム 2 よりも高速である．これは，アルゴリズム 2 では，先頭係数の積に基づく非零条件を用いるため，分岐の生成および再帰呼び出しに関する計算コストが増大しやすいのに対し，アルゴリズム 3 では，各先頭項をクラスごとに非零条件を与える構造を採用しているため，不要な分岐を抑制できていることによるものと考えられる．一方で，多項式集合 F_2, F_6, F_{11} においては，アルゴリズム 2 の方がアルゴリズム 3 よりも高速である．これは，分岐した際に必要となるグレブナー基底計算の計算量が大きいためだと推察される．一方，アルゴリズム 3 では，パラメータ空間の分割数が多くなり，結果として計算時間が増加したものと考えられる．どのアルゴリズムが優れているかを一概に判断することはできない．

また，アルゴリズム 4,5 は，全体的に他のアルゴリズムと比較して計算時間が長くなる傾向が見られる．これは，極大独立集合の計算や，イデアル商およびブロック項順序に基づくグレブナー基底計算を繰り返し用いていることにより，1 回あたりの計算コストが大きくなっているためであると考えられる．

参 考 文 献

[1] Becker, T., Weispfenning, V.: Gröbner Bases. A Computational Approach to Commutative Algebra, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 141, Springer, New York, (1993)

[2] Kapur, D., Sun, Y., Wang, D.: A new algorithm for computing comprehensive Gröbner systems. Proc. ISSAC'2010, ACM Press, New York, 29-36 (2010)

[3] Kapur, D., Sun, Y., Wang, D.: An efficient method for computing comprehensive Gröbner bases. Journal of Symbolic Computation. Volume 52, 124-142 (2013)

[4] Kapur, D., Yiming Y.: An algorithm to check whether a basis of a parametric polynomial system is a comprehensive Gröbner basis and the associated completion algorithm. Proc. ISSAC2015, 243-250 (2015)

[5] Montes, A.: The Gröbner Cover. Springer Nature, Switzerland (2018)

[6] Nabeshima, K.: Stability conditions of monomial bases and comprehensive Gröbner systems. In: Gerdt, V.P., Koepf, W., Mayr, E.W., Vorozhtsov, E.V. (eds) Computer Algebra in Scientific Computing. CASC 2012. Lecture Notes in Computer Science, vol 7442. Springer, Berlin, Heidelberg (2012)

[7] Nabeshima, K.: Generic Gröbner basis of a parametric ideal and its application to a comprehensive Gröbner system. AAECC 35, 55-70 (2024)

[8] Noro, M., Takeshima, T.: Risa/Asir - A computer algebra system. Proc. ISSAC 1992, 387-396, ACM (1992) available at http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir.html

[9] Suzuki, A., Sato, Y.: A Simple algorithm to compute comprehensive Gröbner bases using Gröbner bases. Proc. ISSAC2006, ACM Press, 326-331 (2006)

[10] Weispfenning, V.: Comprehensive Gröbner bases. Journal of Symbolic Computation, 14, 1-29 (1992)