解析的偏微分作用素環上のPoincaré-Birkhoff-Witt代数と局所b-関数に対する柏原作用素

PBW algebra over the ring of holomorphic linear partial diferential operators and the Kashiwara operator for a local b-function

新潟大学大学院自然科学研究科　田島慎一 *1
Shinichi TAJIMA
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

東京理科大理学部第一部応用数学科　鍋島克輔 *2
Katsusuke NABESHIMA
Department of Applied Mathematics, Tokyo University of Science

Abstract

We consider holomorphic Kashiwara operators for local b-functions associated to isolated hypersurface singularities. Based on the concept of Poincaré-Birkhoff-Witt algebra over the rings of holomorphic linear partial differential operators, we introduce a new method for computing them. The main ideal of our approach is the use of generalized integral dependence relations over the Jacobi ideal in a local ring.

1 序

与えられた超曲面の b-関数を具体的に求める際は, s-parametric annihilator と呼ばれる (パラメータ s を含む偏微分作用素環における) イデアルが重要な役割を果たす。計算代数では, Weyl 代数上の PBW 代数に於けるグレブナ基底計算を行うことで s-parametric annihilator のグレブナ基底を求めるのが標準的計算法である ([1]).

一般に b-関数は特異点の複素解析的不変量である，従って μ-constant deformation のように位相同型ではあるが複素解析的には同型とは限らない変形族の b-関数を扱う際は, s-parametric annihilator の変形パラメータへの依存の仕方を計算する必要がある。この課題に応えるため, 論文 [5, 7] では PBW 代数に対し comprehensive グレブナ系の概念を導入し, comprehensive s-parametric annihilator 系を求めるアルゴリズムを構成した．この方法は, 基本的に PBW 代数という非可換な世界におけるグレブナ基底計算に基づいているため, 膨大な計算が必要となる．実装したアルゴリズムを用いて孤立特異点の変形族の s-parametric annihilator の計算を行ったところ, modarity が 2 までの変形族の場合は, 対応する s-parametric annihilator

*1 〒 950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地　E-mail: tajima@emeritus.niigata-u.ac.jp
*2 〒 162-0825 東京都新宿区神楽坂 1-3　E-mail: nabeshima@rs.tus.ac.jp

系を求めることができたが, modarity が 3 以上の特異点変形族の s-parametric annihilator 系を求めようと試しても, 2ヵ月, 3ヵ月経っても計算が終了しなかった ([10]). これが今から 7–8 年くらい前の状況であった.

さて, 孤立特異点に対する局所 b-関数は, 特異点に台を持ち Tjurina イデアルにより annihilate されるような local cohomology 類のなす空間の元であり, s-parametric annihilator が定める偏微分方程式系を満たすような local cohomology 解を求めることで決定できる (この計算法は, 偏微分作用素環におけるグレブナ基底を用いて消去イデアルの計算をすることで b-関数を求めるという標準的な方法 ([6]) より計算効率がよい ([10])). 偏微分方程式系の local cohomology 解を求めるためには, s-parametric annihilator のイデアルとしての生成元を求めてあれば十分であり, グレブナ基底を必要としない. 当時, これらの事実に注目し, 次のふたつの改良を考えた.

I PBW 代数におけるグレブナ基底計算を行う過程で, 柏原作用素と呼ばれる偏微分作用素を構成できた段階で, 柏原作用素を出力し (それ以降のグレブナ基底計算を行わないように) アルゴリズムを停止させる. これにより, s-parametric annihilator のイデアルとしての生成元を構成する.

II 収束冪級数係数の線形偏微分作用素環を係数とする非可換環 $\mathcal{D}[s]$ のおける s-parametric annihilator $Ann_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ の生成元を求める計算法を導出する

計算法 **I** に関しては既にアルゴリズムを実装し, 論文 [15] に結果を発表してある. 本稿では, 計算法 **II** に関する基本的なアイデアを説明したい.

2 複素解析的 PBW 代数と s-parametric annihilator

柏原正樹は, 論文 [3] において, s-parametric annihilator は, 超曲面の定義函数がそのヤコビイデアル上で満たす integral dependence relation と深く関係することを示している. さらに矢野環は論文 [19] において, integral dependence relation に基づくことで複素解析的な 2 階の s-parametric annihilator を構成する方法を与えている. この節では 矢野環が考案した 2 階までの s-parametric annihilator の構成法を, 複素解析的な PBW 代数を用いることで導出できることを示す.

X は, n 次元複素多様体 $(\mathbb{C}^n)$, $\mathcal{O}_X$ は X 上の正則函数のなす層, $\mathcal{D}_X$ は X 上の正則函数を係数にもつ線形偏微分作用素のなす層とする. 不定元 s を用いて,$\mathcal{D}_X[s]$ により $\mathcal{D}_X$ の元を係数とする s についての多項式のなす層を表す.

X 上の正則函数 f に対しその s-parametric annihilator$Ann_{\mathcal{D}_X[s]}(f^s)$ を次で定義する:

$$Ann_{\mathcal{D}_X[s]}(f^s) = \{P(s) \in \mathcal{D}_X[s] \mid P(s)f^s = 0\}$$

複素解析的 PBW 代数 $\mathcal{D}_X[s, \frac{\partial}{\partial t}]$ を, 交換関係

$$sP(x, \tfrac{\partial}{\partial x}) = P(x, \tfrac{\partial}{\partial x})s, \;\; \tfrac{\partial}{\partial t}P(x, \tfrac{\partial}{\partial x})P(x, \tfrac{\partial}{\partial x})\tfrac{\partial}{\partial t}, \;\; \forall P(x, \tfrac{\partial}{\partial x}) \in \mathcal{D}_X, \quad \text{and} \quad s\tfrac{\partial}{\partial t} - \tfrac{\partial}{\partial t}s = \tfrac{\partial}{\partial t}$$

を満たす代数として定義する. いま, $n+1$ 個の偏微分作用素

$$T_0 = s + f\frac{\partial}{\partial t},\ T_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial t}, i = 1, 2, \ldots, n$$

が $\mathcal{D}_X[s, \frac{\partial}{\partial t}]$ において生成する左イデアルを I_{PBW} で表すことにする: $I_{PBW} = (T_0, T_1, T_2, \cdots, T_n)$.

J. Briançon と Ph. Maisonobe は次を示した

定理

$Ann_{\mathcal{D}_X[s]}(f^s) = I_{PBW} \cap \mathcal{D}_X[s]$.

例 1
$f(x)=x^3$ とする, このとき, $I_{PBW}=(T_0,T_1)\subset \mathcal{D}_X[s,\frac{\partial}{\partial t}]$, ただし $T_0=s+x^3\frac{\partial}{\partial t}, T_1=\frac{\partial}{\partial x}+3x^2\frac{\partial}{\partial t}$.
故, $T_0-\frac{1}{3}xT_1=s-\frac{1}{3}x\frac{\partial}{\partial x}$ より, $Ann\mathcal{D}_X[s](f^s)=\mathcal{D}_X[s](s-\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x})$ を得る.

まず最初に, *1* 階の *s-parametric annihilator* の構成法について考える. f の偏導関数が $\mathcal{O}_X$ において生成するヤコビイデアルを $\mathcal{J}_f$ で表す. いま 正則函数 $a_0\in\mathcal{O}_X$ がイデアル商 $(\mathcal{J}_f:f)\subset\mathcal{O}_X$ に属すとする. このとき, $a_0f\in\mathcal{J}_f$ より $a_0f+a_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+a_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0$ を満たす正則函数の組 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ が存在する. このとき明らかに $a_0T_0+a_1T_1+a_2T_2+\cdots+a_nT_n\in I_{PBW}\cap\mathcal{D}_X$ が成り立つ. 従って, *1* 階の *annihilator* $a_0s+a_1\frac{\partial}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+a_n\frac{\partial}{\partial x_n}\in Ann\mathcal{D}_X[s](f^s)$ を得る.

補足 孤立特異点を持つ f の局所 b-関数を求めるためには, $a_0=0$ に対するシジジーから得る作用素 $a_1\frac{\partial}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+a_n\frac{\partial}{\partial x_n}$ は不必要なので, これらを計算しないようにアルゴリズムを設計しておく.

次に, $f\notin\mathcal{J}_f$ とし, *2* 階の *s-parametric annihilator* の構成法について考える. $1\le i\le n, 1\le i,j\le n$ に対し次を導入する.

$$T_0^{(2)}=s(s-1)-f^2(\frac{\partial}{\partial t})^2,\ T_i^{(2)}=(s-1)\frac{\partial}{\partial x_i}-f\frac{\partial f}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial t})^2,\ T_{i,j}^{(2)}=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\frac{\partial}{\partial t})-\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\frac{\partial}{\partial t})^2$$

交換関係 $s\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}s=\frac{\partial}{\partial t}$ に注目することで次を得る.

補題 1
$T_0^{(2)},T_i^{(2)},T_{i,j}^{(2)}\in I_{PBW}$ が成り立つ.

$(\frac{\partial}{\partial t})^2$ の係数 $f^2, f\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$ に注目する. いま, 正則函数 $a_0\in\mathcal{O}_X$ がイデアル商 $((f\mathcal{J}_f+\mathcal{J}_f^2):f^2)$ に属すとする. このとき, $a_0f^2\in(f\mathcal{J}_f+\mathcal{J}_f^2)$ より $a_0f^2+\sum_i a_if\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{i,j}a_{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}=0$ を満たす正則函数の組 $a_i,a_{i,j}$ が存在する. これらを用いて I_{PBW} の要素 $T^{(2)}$ を次で定める.

$T^{(2)}=a_0T_0^{(2)}+\sum_i a_iT_i^{(2)}+\sum_{i,j}a_{i,j}T_{i,j}^{(2)}$.

補題 2
$T^{(2)}=a_0s(s-1)+\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial x_i}(s-1)+\sum_{i,j}a_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i,j}a_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\frac{\partial}{\partial t})$ が成り立つ.

$T^{(2)}$ の $(\frac{\partial}{\partial t})$ の係数 $d=\sum_{i,j}a_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ に対し $b\in\mathcal{O}_X$ は $b\in(f,\mathcal{J}_f):d$ を満たすとする. このとき, $bT^{(2)}\in I_{PBW}\cap\mathcal{D}_D[s]$ を得る. $bd+b_0f+\sum_i b_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=0$ を満たす b_0,b_i を用いると

$$a_0bs(s-1)+\sum_i a_ib\frac{\partial}{\partial x_i}(s-1)+\sum_{i,j}a_{i,j}b\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}-b_0s-\sum_i b_i\frac{\partial}{\partial x_i}\in I_{PBW}\cap\mathcal{D}_X[s]$$

を得る. 特に, $a_0=b=1$, 即ち $f^2\in(f\mathcal{J}_f+\mathcal{J}_f^2)$, $d\in(f,\mathcal{J}_f)$ のときは,

$$a_0s(s-1)+\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial x_i}(s-1)+\sum_{i,j}a_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}-b_0s-\sum_i b_i\frac{\partial}{\partial x_i}\in I_{PBW}\cap\mathcal{D}_X[s]$$

を得る. $a_0=1$ であっても b として *unit* を取れない場合は, *2* 階までの *differential operator* では *s-parametric annihilator* を生成できない. ここまでの内容は, 本質的には矢野 *[19]* に述べられている.

一般に, イデアル $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ に対し, $f \in \mathcal{O}_X$ がイデアル $\mathcal{I}$ 上 *integral* とは,

$$f^\ell \in (f^{\ell-1}\mathcal{I} + f^{\ell-2}\mathcal{I}^2 + \cdots + f\mathcal{I}^{\ell^1} + \mathcal{I}^\ell)$$

をみたす自然数 ℓ が存在することをいう. このような自然数 ℓ のうち最小のものを f の *integral number* と呼ぶことにする (可換環論では, *reduction number* の概念を用いるのが標準的なようであるが, *s-parametric annihilator* の構成のためには, *integral number* のほうが自然と思われる). 広中の定理により, f はそのヤコビイデアル $\mathcal{J}_f$ 上 *integral* であることが知られている. この言葉つかいを用いると, 条件 $a_0 = 1$ は $f^2 \in (f\mathcal{J}_f + \mathcal{J}_f^2)$ を意味するので f の *integral number* は 2 に等しいことになる.

矢野環は [19] において,f の満たす（*generalized)integral dependence relation* を用いることで 2 次までの *s-parametric annihilator* の数学的な構造を決定する構成的な方法を与えている. しかしこの方法で必要となる (局所環でのイデアル商やシジジー等の) 計算が多くの場合困難であるため, 実際の計算には適さないと矢野は考えその利用を断念し, [19] では替わりに他の計算法を用いている

筆者らは, 計算機代数の観点から収束冪級数環のイデアルに対する *integral number* や *generalized integral dependence relations* を効率的に求めるアルゴリズム ([8, 9]) を考案･開発し, 解析的 *s-parametric annihilators* を求めるアルゴリズムを開発する準備を整えた.

3 解析的柏原作用素

この節では, 3 階の解析的 *s-parametric annihilator* を構成する方法について考える. 議論を進めるまえに問題の背景を敷衍しておく.

1977 年に発表された論文 [18] において, 矢野環は $f = x^4y+y^6+x^5$ で定義される特異点 (*upper monomial* の選び方は, [20] のリストにある標準形とは異なるが, N_{19} 特異点である) の *integral number* は 2 であるがその *s-parametric annihilator* $Ann_{\mathcal{D}_X[s]}(f^s)$ の生成元として 3 階の偏微分作用素が必要であり, 2 階までの偏微分作用素ではイデアルを生成できないことを明らかにした. ちなみに, J. Scherk も博士論文 [14] においてほぼ同じ時期に, この多項式が定める *Gauss-Manin connection* の研究を行っている. その後, A. N. Varchenko は J. Scherk のこの計算例について論文 [17] において議論している.

さて, 論文 [8] に与えた計算アルゴリズムを用いて, 吉永・鈴木の論文 [20] にある *modarity* が 4 以下の *quasihomogeneous singularity* の μ*-constant deformation* として得られる *semi quasihomogeneous singularities* に対して *integral number* を求めたところ, これらはすべて, 2 であることが判明した. 従って, 2 次の *integral dependence relation* に注目することで, 3 階以上の *s-parametric annihilator* を構成する計算法を考案することは意味があると思われる.

この節では, 孤立特異点を持つ f で, そのヤコビイデアル上の *integral number* は 2 であるが, *s-parametric annihilator* $Ann_{\mathcal{D}[s]}(f^s)$ は階数が 2 までの偏微分作用素では生成できないものに対し, 3 階の *s-parametric annihilator* を構成する方法について述べる.

$\mathcal{D}_X[s, \frac{\partial}{\partial t}]$ の元, $T_0^{(3)}, T_i^{(3)}, T_{i,j}^{(3)}, T_{i,j,k}^{(3)}$ を次で与える.

$T_0^{(3)} = s(s-1)(s-2) + f^3(\frac{\partial}{\partial t})^3,$

$T_i^{(3)} = (s-1)(s-2)\frac{\partial}{\partial x_i} + f^2\frac{\partial f}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial t})^3,$

$T_{i,j}^{(3)} = (s-2)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - (s-2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\frac{\partial}{\partial t}) + f\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\frac{\partial}{\partial t})^3,$

$T_{i,j,k}^{(3)} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\frac{\partial}{\partial t}) - \{\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\}(\frac{\partial}{\partial t})^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\frac{\partial}{\partial t})^3,$

いずれの作用素も $\frac{\partial^3}{\partial x_i \partial t^2}$, $\frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial t}$ 等の項を含んでいないことに注意されたい.

すこし計算する必要があるが次を確かめることができる.

補題 3
$T_0^{(3)}, T_i^{(3)}, T_{i,j}^{(3)}, T_{i,j,k}^{(3)} \in I_{PBW}$ が成り立つ.

さて, $f^2 \in (f\mathcal{J}_f + \mathcal{J}_f^2)$ とする. $f^2 + \rho_1 f + \rho_2 = 0,\ \rho_1 \in \mathcal{J}_f, \rho_2 \in \mathcal{J}_f^2$ に対し, $\rho_2^{(3)} = \rho_2 - \rho_1^2, \rho_3^{(3)} = -\rho_1\rho_2$ とおく. このとき次が成立する.

補題 4
(i) $\rho_2^{(3)} \in \mathcal{J}_f^2, \rho_3^{(3} \in \mathcal{J}_f^3,$
(ii) $f^3 + \rho_2^{(3)} f + \rho_3^{(3)} = 0.$

式 *(ii)* において, f^2 の項がないことに留意されたい.

いま, $\rho_1 = \sum_i a_i f \frac{\partial f}{\partial x_i},\ \rho_2 = \sum_{i,j} a_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$ であるとする. このとき

$$\rho_2^{(3)} = \sum_{i,j} a_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - (\sum_i a_i f \frac{\partial f}{\partial x_i})^2,\ \rho_3^{(3)} = -(\textstyle\sum_i a_i f \frac{\partial f}{\partial x_i})(\sum_{i,j} a_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j})$$

を

$$\rho_2^{(3)} = \sum_{i,,j} a_{i,j}^{(3)} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j},\ \rho_3^{(3)} = \textstyle\sum_{i,j,k} a_{i,j,k}^{(3)} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

とおくと

$$T = T_0^{(3)} + \sum_{i,j} a_{i,j}^{3)} T_{i,j}^{(3)} + \sum_{i,j,k} a_{i,j,k}^{((3)} T_{i,j,k}^{(3)} \in I_{PBW}$$

を得る.

この作用素 T の $(\frac{\partial}{\partial t})^3$ の係数は零である. いままで同じ方法で T から $(\frac{\partial}{\partial t})^2, (\frac{\partial}{\partial t})$ を消去して行けば, $\mathcal{D}_X[s]$ における *3* 階の annihilator を構成することが出来る.

ここまでが, *2020* 年 *4* 月 *23* 日付けのノートからの抜粋

$\mathcal{D}_X[s, \frac{\partial}{\partial t}]$ の元, $T_0^{(4)}, T_i^{(4)}, T_{i,j}^{(4)}, T_{i,j,k}^{(4)}, T_{i,j,k,l}^{(4)}$ を次で与える.

$T_0^{(4)} = s(s-1)(s-2)(s-3) - f^4(\frac{\partial}{\partial t})^4,$

$T_i^{(4)} = (s-1)(s-2)(s-3)\frac{\partial}{\partial x_i} - f^3 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial t})^4,$

$T_{i,j}^{(4)} = (s-2)(s-3)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + (s-2)(s-3)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\frac{\partial}{\partial t}) - f^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\frac{\partial}{\partial t})^4,$

$T_{i,j,k}^{(4)} = (s-3)\frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + (s-3)\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\frac{\partial}{\partial t}),$

$\qquad -(s-3)\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\}(\frac{\partial}{\partial t})^2 - f \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\frac{\partial}{\partial t})^3,$

$T_{i,j,k,l}^{(4)} =$ 複雑な式.

これらは, I_{PBW} に属すことから 階数が *4* の *s-parametric* annihilator も同様に作ることが出来る.

4 実装の準備

解析的な柏原作用素を数式処理を用いて効率的に求める方法を開発したい．

多項式 $f \in K[x]$ に対し 多項式環 $K[x]$ における f のヤコビイデアルを $J = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) \subset K[x]$ で表す．また，O を $\mathbb{C}^n$ の原点とする．多項式 f は, $f(O) = 0$ であるとし 原点を孤立特異点として持つとする． 収束冪級数環におけるヤコビイデアル $\mathcal{J}_f$ 上の *integral number* は *2* であるとする: $f^2 \in f\mathcal{J}_f + \mathcal{J}_f^2$. このとき，次を満たす多項式 $u \in K[x]$ が存在する

$$u(O) \neq 0,\ \ uf^2 \in (fJ + J^2).$$

ここで, $uf^2 + fr_1 + r_2 = 0,\ r_1 \in J, r_2 \in J^2$ に対し, $r_2^{(3)} = ur_2 - r_1^2, r_3^{(3)} = -r_1r_2$ とおく．

補題 5
次が成り立つ．
(i) $u^2f^3 + r_2^{(3)}f + r_3^{(3)} = 0$,
(ii) $r_2^{(3)} \in J^2, r_3^{(3)} \in J^3$.

これにより, *3* 階の *s-parametric annihilators* を求めるアルゴリズムを構成できる．

2025 年 *3* 月に, 矢野環の例 $x^4y + y^6 + x^5$ の *upper monomial* x^5 の係数を *1* から z に変えた μ*-constant* 変形族 $x^4y + y^6 + x^5z$ に対し本稿の計算法を適用した． *3* 階の *s-parametric annihilator* を構成できることを確認した．

5 N_{19} 特異点変形族

N_{19} の *quasi part* は $f_0(x, y) = x^4y + y^6$ であり, その *weight vector* は, $w = \frac{1}{24}(5, 4)$ である, *Milnor* 数は *19* である．N_{19} 特異点の *modarity* は *3* であり、通常の標準形では, xy^5, x^2y^4, x^2y^5 を *upper monomial* として選んである．矢野環が研究の対象とした例の定義式は, $x^4y + y^6 + x^5$ であるが, *upper monomial* x^5 の *weighted degree* は $-\frac{25}{24}$ であり, xy^5 のそれと等しい．

特異点変形族 $f(x, y) = x^4y + y^6 + x^5z$ を考える． ここで, z は変形パラメータとみなすことにする．*1* 階の *s-parametric annihilator* を構成するための準備として, まず最初に, 原点に台を持つ *local cohomology* 類であり, *(*パラメータ z を含む*)* f のヤコビイデアルにより *annihilate* されるもの全体のなすベクトル空間 H_J を求める． 論文 *[13]* の結果に基づいて *[4]* において導出したアルゴリズムを用いてベクトル空間 H_J の *19* 個の基底 *local cohomology* 類を求める，*19* 個のうち，その *weighted degree* が $-\frac{24+9}{24} = -\frac{33}{24}$ より小さいものが *3* 個あり，それらの値は, $-\frac{34}{24}, -\frac{35}{24}, -\frac{39}{24}$ であることが分かる．これら *3* つの *local cohomology* 類を f 倍すると, *weighted degree* が $-\frac{35}{24}$ のものは零となる．他の *2* つの *local cohomolog* 類の f 倍は一次独立である． 従って, この N_{19} 特異点の *Tjurina* 数は, $19 - 2 = 17$ である． ベクトル空間 H_J の f 倍による像ベクトル空間 $\mathrm{Im}(f) = \{f * \sigma \mid \sigma \in H_J\}$ の基底は $\begin{bmatrix} z \\ xy \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4z \\ x^2y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5z^2 \\ xy^2 \end{bmatrix}$ で与えられる． 従って, 収束冪級数環でのイデアル商 $\mathcal{J}_f : (f)$ のスタンダード基底は, *(*項順序によるが*)* $x^2, 4y + 5xz$ もしくは $5xz + 4y, y^2$ で与えられる．多項式環におけるヤコビイデアル $J = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ の零点を求めると, 原点以外の成分として $(512 - 9375xz^5, 128 + 1875yz^4)$ を得る．

2 節に与えた一般論を適用すると, f の *1* 階の *s-parametric annihilators* の生成元として

$(128 + 1875yz^4)x^2s+$ 他の項, $(128 + 1875yz^4)(4y + 5xz)s+$ 他の項

もしくは

$(512-9375xz^5)y^2s+$ 他の項, $(512-9375xz^5)(4y+5xz)s+$ 他の項

などを得ることができる

一般に, 原点を孤立特異点として持つ多項式であっても, そのヤコビイデアルが原点以外におおくの零点をもつ場合は, 多項式係数の偏微分作用素を s の係数に持つイデアル $D[s]$ における *s-parametric annihilator* のブレブナ基底は, 沢山の作用素を含むことになる. N_{19} 特異点 $x^4y+y^6+x^5$ の場合, そのヤコビイデアルの原点以外の零点は唯一つしかないので, 多項式係数の偏微分作用素の世界で *s-parametric annihilator* のグレブナ基底はせいぜい *6* 個程度の作用素からなるであろうと予想できる.

ここで試しに, 数式処理システム *Risa/Asir* に実装されているプログラム **ann** を用いて $x^4y+y^6+x^5$ の *s-parametric annihilator* を求めてみる. **ann** は, *3* 階の作用素 *1* 個, *2* 階の作用素 *1* 個, *1* 階の作用素 *3* 個を出力する. これら *5* 個の作用素のうち, ひとつの *1* 階の作用素は s を含まないが他の *4* 個の作用素は s を含んでいる. おのおのの作用素の s の多項式としての次数は偏微分作用素としての次数と等しい.

s^3 の係数は $17280000+253125000y=135000(128+1875y)$

s^2 の係数は, $-1152000y-1687500y^2=-900(128+1875y)y$

s の係数は, $768y^2+11250y^3=6(128+1875y)y^2$ と $24y+30x=6(4y+5x)$

である. このリストの最後の作用素以外は, 予想通り, 係数に因子 $128+1875y$ を含んでいる. それに反しリストの最後の作用素の s の係数はイデアル商のスタンダード基底のひとつ $4y+5z$ のみを因子として持つが, $128+1875y$ を因子として持っていない. *2* 節に与えた一般的な議論に当てはまらないように見えてしまう.

ここで, $4(128+1875yz^4)-(512-9375xz^5)=1875z^4(4y+5xz)$ に注目する. $z=1$ のとき, イデアル商の元 $4y+5x$ は, ヤコビイデアルの原点以外の零点における値は零である *!!* このことが理由で, s の係数に因子 $4y+5x$ を含むような *1* 階の *s-parametric annihilator* に対しては, s の係数に $128+1875y$ とか $512-9375x$ を掛けておく必要がなくなったわけである.

一般に, *3* 階以上の階数の *s-parametric annihilator* を構成するには膨大な計算を必要とする. N_{19} 特異点の場合, イデアル商がこの節で示したような特殊な性質を持っていることが幸いして, 古典的な方法でも *3* 階の *s-parametric annihilator* を求めることができたのだと思う.

数式処理システム *Risa/Asir* にあるプログラム **bfct** を用いて, x^4y+y^6 と $x^4y+y^6+x^5$ の b-関数を求めると, *quasi part* x^4y+y^6 の b-関数の根の内, $-\frac{34}{24},-\frac{35}{24},-\frac{39}{24}$ がそれぞれ $x^4y+y^6+x^5$ の b-関数の根 $-\frac{10}{24},-\frac{11}{24},-\frac{15}{24}$ に *jump* することが分かる.

2025 年 *4* 月に, 多項式 $g(x,y,z)=x^4y+y^6+x^5z$ の *s-parametric annihilator* と *local cohomology* に対するネター作用素の概念を用いることで, この *jump* の背後にある現象の解析を行った. (この解析では z はパラメータではなく, 独立変数として扱うので, g の特異点集合は $\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \mid z=0\}$ である). その結果, *3* つの b-関数の根 $-\frac{10}{24},-\frac{11}{24},-\frac{15}{24}$ に対応する *local cohomology* 類はそれぞれ

$$\left[\begin{array}{c} z \\ xy \end{array}\right],\ \left[\begin{array}{c} z^2 \\ xy \end{array}\right],\ \left[\begin{array}{c} z \\ x^2y \end{array}\right]-\frac{7}{8}\left[\begin{array}{c} z^2 \\ xy^2 \end{array}\right]+d\left[\begin{array}{c} z^6 \\ xy \end{array}\right]$$

であることが分かった. (ただし d は定数). この解析の仕方については, *[16]* を参照されたい.

謝　辞

本研究，科学研究費補助金基盤研究 *(C)*（*22K03334,23K03076*）の助成を受けたものである.

参 考 文 献

[1] *D. Andras, M. Brickenstein, V. Levandovskyy, L. Martin-Morales and J. Schönenmann, Constructive D-module theory with Singular, Mathematics in Computer Science* **4** *(2010), 359-383.*

[2] *J. Briançon et Ph. Maisonobe, Remarques sur l'idéal de Bernstein associé à des polynômes, Preprint, Univ. Nice Sophia-Antipolis, no. 650, 2002.*

[3] *.M. Kashiwara, B-functions and holonomic systems - ratinality of roots of b-functions, Invent. Math.* **38** *(1976/77), 33-53.*

[4] *K. Nabeshima and S. Tajima, On the computation of algebraic local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities, Advanced Studies in Pure Mathematics* **66** *(2015), 143–159.*

[5] *K. Nabeshima, K. Ohara and S. Tajima, Comprehensive Gröbner systems in rings of differential operators, holonomic D-modules and b-functions, Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, (2016), 349–356.*

[6] *K. Nabeshima and S. Tajima, Comprehensive Gröbner systems approach to b-functions of μ-constant deformations, Saitama Journal of Mathematics* **31** *(2017), 115–136.*

[7] *K. Nabeshima, K. Ohara and S. Tajima, Comprehensive Gröbner systems in PBW algebras, Bernstein-Sato ideals and holonomic D-modules, Journal of Symbolic Computation* **89** *(2018), 146-170.*

[8] *K. Nabeshima and S. Tajima, Solving parametric ideal membership problems and computing integral numbers in a ring of convergent power series via comprehensive Gröbner systems, Mathematics in Computer Sciences* **13***, 185–194 (2019)*

[9] *K. Nabeshima and S. Tajima, Generalized integral dependence relations, Lecture Notes in Computer Science* **11989** *(2020), 48–63.*

[10] *K. Nabeshima and S. Tajima, Computation methods of b-functions associated with μ-constant deformations -case of inner modality 2 –, Kyushu J. of Mathematics* **75** *(2021), 55–76.*

[11] *K. Nabeshima and S. Tajima, A new algorithm for computing logarithmic vector fields along an isolated singularity and Bruce-Roberts Milnor ideals, Journal of Symbolic Computation* **107** *(2021), 190–208.*

[12] 鍋島克輔, 田島慎一, 計算機代数の技法と矢野-加藤の計算法を用いたミルナー数が一定の特異点変形に付随するパラメータ付き $Ann_{D[s]}(f^s)$ 計算の実装について, 京都大学数理解析研究所講究録, **2320** *(2025), 204-216*

[13] *Y. Nakamura and S. Tajima: On weighted-degrees for algebraic local cohomologies associated with semiquasihomogeneous singularities, Advanced Studies in Pure Mathematics* **46** *(2007), 105–117.*

[14] *J. Scherk, Isolated singular points and the Gauss-Manin connection, D. Phii. Thesis, Exceter College, Oxford, 1977*

[15] *S. Tajima, K. Nabeshima and K. Ohara, Algorithms for computing Kashiwara operators and s-parametric annihilators associated with isolated hypersurface singularities, SUT Journal of Math.* **61** *(2025), 79-100.*

[16] 田島慎一, 孤立特異点変形族に付随するホロノミー D-加群と局所 b-関数, 京都大学数理解析研究所講究録投稿中

[17] *A. N. Varchenko, Gauss-Manin connection of isolated singular point and Bernstein polynomial, Bull. Sc. math.* **104** *(1980), 205-223.*

[18] *T. Yano, On the structure of differential equations associated with some isolated singularities, Sci, Rep. Saitama Univ. Ser A* **9** *(1977), 9-20.*

[19] *T. Yano, On the theory of b-functions, Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **14** *(1978), 111-202.*

[20] *E. Yoshinaga and M. Suzuki, Normal forms of nondegenerate quasihomogeneous functions with inner modarities* ≤ 4, *Invent. Math.* **55** *(1979), 185-206.*